*Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* *Vol.8 No.3 (2017), 513-550*

# İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Örüntüleri Genelleme Süreçleri: Stratejiler ve Gerekçelendirmeler[1]

**Yaşar Akkan[2], Mesut Öztürk[3] ve Pınar Akkan[4]**

***Makale geçmişi***
Makale geliş tarihi: 23 Haziran 2017
Yayına kabul tarihi: 7 Aralık 2017
Çevrimiçi yayın tarihi: 15 Aralık 2017

**Öz:** Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının farklı örüntü problemleri ile ilgili genelleme stratejilerini incelemek, genellemelerinin altında yatan gerekçelendirmeleri keşfetmek ve genelleme ile gerekçelendirmeleri arasındaki ilişkileri belirlemektir. Çalışma nitel araştırma desenlerinden olgubilim modeline göre tasarlanmıştır. Çalışma, Doğu Karadeniz Bölgesindeki bir üniversitenin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim gören 4. sınıf öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Veri toplama araçları, hem literatür hem de öğretim üyesi desteğiyle hazırlanan ve farklı çözüm stratejilerinin ve gerekçelendirme çeşitlerinin üretilebildiği lineer ve kuadratik örüntü problemleridir. Mülakatlar sonucu toplanan veriler araştırmanın kavramsal çerçevesi dâhilinde betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Elde edilen sonuçlardan, öğretmen adaylarının en yaygın kullandığı strateji türü fonksiyonel strateji olmakla birlikte, içeriksel, yinelemeli, tahmin-kontrol ve karma stratejileri de kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının çoğu gerekçelendirmelerini sayısal kontrol yoluyla doğrulama ile yapmışken, açıklama ve dışsal bilgi kaynağı yoluyla gerekçelendirme yapan öğretmen adayları da tespit edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Örüntü, genelleme, stratejiler, gerekçelendirme, öğretmen adayları

**DOI:** 10.16949/turkbilmat.323384

**Abstract:** The aim of this study is to investigate the generalizations created by pre-service elementary mathematic teachers, to explore the justifications predicted for their generalizations, and to determine any relationships between generalization and justification. We used phenomenology design from qualitative research methods in the study. The study was conducted by the 4th grade students/pre-service teachers who are studying in a department of Elementary Mathematics Teaching at a university located in the Eastern Black Sea region. Data collection tools are linear and quadratic pattern problems which are prepared with the support of literature and teaching staff and in which different solution strategies and justification types can be produced. Interviews were analyzed using the descriptive analysis technique within the conceptual framework of the research. The results show that the most common type of strategy used by pre-service teachers was functional strategy, contextual, recursive, guess-check and mixed strategies. While many of the pre-service teachers have justified their verification by numerical control, pre-service teachers who have justified through explanation and external knowledge sources have also been identified.

**Keywords:** Pattern, generalization, strategies, justification, pre-service teachers

See Extended Abstract

## 1. Giriş

Düşünmenin ve iletişimin hem amacı hem de aracı olan genelleme (Dörfler, 1991), matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temeli olarak ifade edilmektedir (Amit & Neria, 2008). Genelleme matematik yapmanın özüdür, çünkü örüntüler matematiğin kalbi ve ruhudur (Zazkis & Liljedahl, 2002); hatta cebir ve

[1] Bu çalışma 3. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildirinin genişletilmiş halidir.
[2] Doç. Dr. Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği, Türkiye akkanyasar61@hotmail.com
[3] Arş. Gör. Dr., Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi, Türkiye, mesutozturk@live.com
[4] Öğr. Gör., Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane Meslek Yüksek Okulu, Türkiye, p.akkan@gunushane.edu.tr

matematiğin tümü örüntü genelleme ile ilgilidir (Lee, 1996). Baki'ye (2008) göre ise belli bir durum veya olaydaki örüntüyü bulup bir düşüncede toplama işi olan genelleme, bu şekliyle aynı zamanda bir soyutlamadır. Bu nedenle tüm öğrencilerin öğrenimleri süresince genelleme yapma ile ilgili yeteneğini geliştirmek ve deneyimlerini artırmak çok önemlidir. Burada üzerinde durulması gereken en önemli kavram ise örüntü kavramıdır. Çünkü cebirin yapıtaşlarından birisi olan genellemenin oluşumunda örüntü etkin rol oynamaktadır (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Herbert ve Brown (1997) göre; okul öncesi, ilkokul ve ortaokul yıllarında gerçekleştirilen örüntü etkinlikleri cebirin temelini oluşturmada önemli bir role sahiptir. Nitekim örüntüler, matematiksel düşüncelerin ve ilişkilerin soyutlanmasında, matematiksel nicelikler arasındaki ilişkilerin genellenmesinde, matematiksel muhakeme becerilerinin gelişiminde etkili olmaktadır (Papic & Mulligan, 2005). Öğrencilerin küçük yaşlarda örüntülerle tanıştırılmaları ve örüntüler ile fonksiyon kavramı arasındaki ilişkinin farkına varmaları; problem çözme becerilerinin gelişimine, cebirsel ve fonksiyonel olarak düşünmelerine, aritmetikten cebire geçişlerine ve cebir öğrenimlerine katkı sağlayabilir (Armstrong, 1995; Bednarz, Kieran & Lee, 1996; English & Warren, 1998; Lannin, 2005; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989; Zazkis & Liljedahl, 2002).

Örüntülerin lineer ve lineer olmayan (kuadratik ve üstel) örüntüler, sayısal örüntüler, resimli örüntüler, şekil örüntüleri, geometrik örüntüler, tekrarlı ve genişleyen örüntüler gibi birçok çeşidinin yurt dışı ve yurt içi çalışmalarda yer aldığı görülmektedir (Akkan, 2013; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Amit & Neria, 2008; Feifei, 2005; Lannin, 2005; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Rivera, 2007; Tanışlı ve Olkun, 2009; Tanışlı ve Özdaş, 2009). Ancak Millî Eğitim Bakanlığının ilkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarında ve ülkemizdeki araştırmalarda (Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Çilingir ve Yanpar-Yelken, 2016; Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2011, 2013; Yeşildere ve Akkoç, 2011) genellikle lineer (birinci dereceden) ve kuadratik (ikinci dereceden) örüntülerin sayı dizisi ve şekil (geometrik ve görsel) formatında sunulan çeşitlerinin daha çok yer aldığı görülmektedir. Ayrıca farklı öğrenim seviyelerinde yapılan örüntü genelleme ile ilgili araştırmalarda, örüntü genelleme stratejilerini içeren araştırmalar merkezi konumdadır. Bu çalışmalarda araştırmacılar; yinelemeli veya eklemeli, parçaları sayma veya modelleme, tahmin ve kontrol, orantı, içeriksel, fonksiyonel gibi örüntü genelleme stratejilerine vurgu yapmışlardır (Akkan, 2013; Lannin, 2005; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Swafford & Langrall, 2000; Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2011). Bu araştırmacılar fonksiyonel stratejinin örüntüde gelecek terimleri bulmak için bir kural geliştirmede ve bu kuralı hem sözel hem de sembolik olarak ifade etmede diğer stratejilere göre daha geçerli olduğunu ifade etmişlerdir (Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Amit & Neria, 2008; Lannin, 2005; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000; Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2011). Özellikle Stacey (1989)'in yaptığı çalışma ilklerden biri olup, genelleme stratejileri ile ilgili pek çok çalışma için de temel oluşturmuştur. Stacey (1989) lineer örüntüler üzerine gerçekleştirdiği bu çalışmada, yakın genelleme (örüntünün devamında gelen en yakın terimi bulma) ve uzak genelleme (bir örüntüde genel bir kuralın bulma) kavramları arasındaki farkı ayırt etmiş ve üç temel genelleme stratejisi tanımlamıştır: Örüntünün bir önceki teriminden bir sonraki teriminin elde edildiği yinelemeli strateji, fonksiyonel bir ilişkinin arandığı fonksiyonel strateji, orantısal akıl yürütmenin uygulandığı ($f(x)=ax+b$ ($b\neq0$) ilişkisinin olduğu durumda $f(x)=ax$ oranını kullanma) bütüne genişletme (whole-object) stratejisi. Garcia-Cruz ve Martinon (1998) yinelemeli stratejiye dayanan kısmi (local) genelleme ve fonksiyonel bir ilişkiyi araştırmaya dayanan bütüncül (global) genelleme olmak üzere iki genelleme seviyesi tanımlamışlardır. Lannin (2005) ise genelleme stratejilerini belirgin olmayan (non-explicit) ve belirgin (explicit) olmak üzere ikiye ayırmıştır. Belirgin olmayan stratejiler başlığı altında sayma ve yinelemeli stratejiyi, belirgin stratejiler başlığı altında ise bütüne genişletme (whole-object), tahmin ve kontrol (guess and check) ve içeriksel (contextual) stratejileri ele almıştır. Amit ve Neria (2008) ilköğretim öğrencilerinin (12-14 yaş) lineer ve lineer olmayan örüntü problemlerini genelleştirme stratejilerine odaklanmış, öğrencilerin yerel (local) genelleştirmeler için yinelemeli veya eklemeli (additive) stratejiyi, genel (global) genelleştirme için fonksiyonel stratejiyi kullandıklarını belirtmişlerdir. Orton ve Orton (1999) lineer ve kuadratik örüntü problemlerinde genellikle yinelemeli stratejinin tercih edildiğini ifade etmişken, Swafford ve Langrall (2000) ve Ley (2005) ise öğrencilerin daha çok yinelemeli, orantı ve fonksiyonel stratejileri kullandıklarına vurgu yapmışlardır. Bununla birlikte literatürde örüntü genelleme süreci ile ilgili birçok çalışma olsa da, öğretmen adaylarının örüntü genelleme ve gerekçelendirme bilgisi üzerine çok az sayıda çalışma vardır (Çilingir ve Yanpar-Yelken, 2016; Kirwan, 2015; Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2011, 2013; Yeşildere ve Akkoç, 2011; Zazkis & Liljedahl, 2002). Örneğin Yeşildere ve Akkoç (2011) matematik öğretmen adaylarının genelleme sürecinde lineer şekil örüntülerinden lineer olmayanlara göre daha çok yararlandıklarını, şekil örüntüsünü sayısal olarak belirterek genelleme yapmaya çalıştıklarını, verilen örüntüdeki ortak özelliği belirleme bağlamında genelleme yapmaya yardımcı olacak seçimlerde bulunmadıkları ve sadece bir sonraki terimi bulmayı sağlayacak şekilde ortak bir özellik araştırdıklarını belirtmiştir. Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse (2011) ise sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntüsünü yakın/uzak bir adıma devam ettirmede ve örüntünün kuralını belirlemede sayısal yaklaşımı benimsediklerini, örüntüleri genellerken ise sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullandıklarını ifade etmişlerdir. Her ne kadar örüntü genelleme stratejileri bu alanla ilgili çalışmaların merkezinde yer alsa bile, son zamanlarda genellemenin ayrılmaz ikizi kabul edilen gerekçelendirme çeşitleri ile ilgili çalışmalarda önemini artırmaktadır.

Kararı verilmiş bir olay ya da duruma kendini de inandırmak için sunulan gerekçeler veya kişinin iddiasını doğrulayacak yeterli kanıtlara sahip olması olarak tanımlanabilen gerekçelendirme ile ilgili Radford (1996); gerekçelendirmenin genellemeyi destekleyen süreç olduğunu ifade etmiş, Ellis (2007a, 2007b) ise gerekçelendirme yapmanın bir öğrencinin genelleme yeteneğini etkilediğini belirtmiştir. Nitekim son yıllarda matematik derslerinde akıl yürütme, gerekçelendirme ve muhakeme gibi becerilerin kazandırılması matematik eğitiminde ön plana çıkmaktadır. Bu becerileri öğrencilere kazandırabilmek için öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm stratejileri sunabilecekleri sınıf ortamları oluşturulmaktadır. Bu becerilerin kazandırılmasına yönelik çalışmalar yapan araştırmacılardan bazıları öğrencilerin gerekçelendirmelerini inceleyerek farklı gerekçelendirme biçimleri tanımlamıştır (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998; Kirwan, 2015; Marrades & Gutiérrez, 2000). Örneğin; Bell (1976) matematiksel gerekçelendirmeyi, deneysel (iddianın doğruluğunun örnekler yardımıyla yapıldığı) ve tümdengelimli (sonuçlarla bağlantılı çıkarımların kullanıldığı) gerekçelendirme olarak iki kategoriye ayırmıştır. Marrades ve Gutiérrez (2000) ise bu iki kategoriyi daha ayrıntılı şekilde sınıflandırmışlardır. Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin gerekçelendirme biçimlerini, dışsal (problemleri çözmek için formülleri bire bir uygulama ve sonuca ulaşmak için yaratıcılıklarını kullanma yerine gerekli kuralları ezberleme), deneysel (varsayımları, fiziksel doğrular veya algısal deneyimlere başvurarak kabul etme ya da reddetme) ve analitik (varsayımın ispatlanması mantıksal çıkarımlar aracılığıyla yapma) olmak üzere üç genel kategoriye ayırmışlardır. Balacheff (1988) gerekçelendirme türlerini pragmatik (örneklerin kullanımına veya gösterimlere odaklanma) ve kavramsal (soyut formüllere ve matematiksel ifadelerin özellikleri arasındaki ilişkilere odaklanma) gerekçelendirme olmak üzere iki grupta ele almıştır. Kirwan (2015) ise örüntü genellemede doğrulama ve açıklama şeklinde iki çeşit gerekçelendirmeden bahsetmiştir.

Öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili anlamaları, problem çözme becerileri, matematiğe karşı eğilimleri ve inançları okulda karşılaştıkları öğretmenler tarafından şekillendirilmektedir (NCTM, 2000). Nitekim araştırmacılar son yıllarda öğretmenlerin öğrenmede oynadığı role dikkat çekmişlerdir. Cross'a (2009) göre öğretmenler öğrenme ortamını örgütleyip biçimlendirir; bundan dolayı, öğretmenler öğretilen ve öğrenilen şey üzerinde muazzam bir etkiye sahiptir. Nathan'a (2003) göre ise öğretmenlerin bilgi ve inançları; öğrencilerin öğrenme süreci için karar verici ve harekete geçirici ara buluculardır. Bu bağlamda öğretmenlerin genelleme kavramı ile ilgili bilgi düzeyleri, öğrencilerin genellemeyle ilgili düşüncelerini yorumlamaya ve anlamaya yeterli olmalıdır (Lannin, 2005). Mason'a (1996) göre öğretmenler genellemenin varlığından habersizse ve öğrencileri kendi genellemelerini ifade etmede alışkanlık edinmemişse, bu durum matematiksel düşünmeyi etkilemektedir. Ne yazık ki, öğrenci düşüncesini yorumlamak ve anlamak, birçok öğretmen için zordur (Maher & Davis, 1990). Bununla birlikte öğretmenlerin genelleme ile ilgili anlamaları tek başına yeterli değildir; çünkü gerekçelendirme genellemenin ayrılmaz ikizidir ve öğrenci gerekçelendirmeleri ile ilgili anlamalar, öğretmelerin öğrenci genellemelerini anlamasına yardım edebilir (Lannin, 2005). Bu bağlamda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının öğrenimleri süresince farklı örüntü problemlerini genelleme stratejileri ile bu genellemeleri sağlayan gerekçelendirme çeşitlerine dair bilgilerini belirleme, onların eğitimi ve gelecekte yetiştirecekleri öğrenciler açısından önemlidir. Çünkü ilköğretim matematik öğretmeni adayları, kendi öğrencilerinin genelleme ve gerekçelendirme konusundaki düşüncelerini yorumlayabilmeli ve anlayabilmelidir.

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının farklı örüntü problemleri ile ilgili genelleme stratejilerini incelemek, genellemelerinin altında yatan gerekçelendirmeleri keşfetmek ve genelleme stratejileri ile gerekçelendirme çeşitleri arasındaki ilişkileri belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki problemlere cevap aranmıştır:

1. İlköğretim matematik öğretmeni adayları farklı örüntü problemlerini genellemede ne tür stratejiler kullanmaktadır?

2. İlköğretim matematik öğretmeni adayları farklı örüntü problemlerini genellerken ne tür gerekçelendirmeler sunmaktadır?

3. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının farklı örüntü problemlerinde kullandıkları genelleme stratejileri ile gerekçelendirme çeşitleri arasında ilişki var mı?

## 2. Yöntem

Bu çalışma ile öğretmen adaylarının farklı örüntü problemlerini genelleme ve bu genellemeleri sağlayan gerekçelendirme eylemlerini anlamlandırma amaçlandığından, bu araştırma nitel araştırma olarak tasarlanmıştır. Bu çalışma, nitel araştırma desenlerinden olgubilim (fenomenoloji) modelinde desenlenmiştir. Olgubilim (fenomenoloji) araştırmaları farkında olduğumuz ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığımız olgulara odaklanmaktadır (Creswell, 2013). Olgubilim, "*Gerçek nedir?*" sorusuna cevap arayan bir araştırma modelidir (Çepni, 2010). Bu yaklaşımda araştırmacı katılımcının kişisel (öznel) tecrübeleri ile ilgilenmekte, bireyin algılamaları ve olaylara yükledikleri anlamları incelemektedir. Olgubilim tanımlayıcı bir araştırma olduğundan amaç genelleme yapmak değil, olguları tanımlamaktır (Akturan ve Esen, 2008).

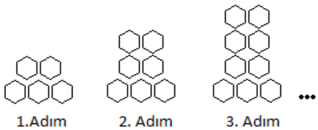
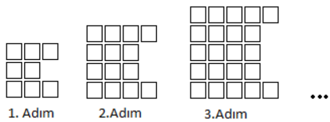
### 2.2. Çalışma Grubu

Çalışma, Doğu Karadeniz Bölgesinde yer alan bir üniversitenin Eğitim Fakültesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim gören 4. sınıf öğretmen adayları ile 2016-2017 eğitim- öğretim yılı Bahar dönemi Nisan ayının son haftasında yürütülmüştür. Çalışmanın yürütüldüğü Eğitim Fakültesinden iki öğretim üyesi ile yapılan görüşme neticesinde, 4.sınıf öğretmen adaylarının Özel Öğretim Yöntemleri dersi içeriğinde yer alan cebir öğrenme alanındaki örüntüler konusuna dair kazanımlarla ilgili bilgilendirildikleri belirlenmiştir. Bu bağlamda azda olsa öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme ile ilgili bilgi sahibi oldukları söylenebilir. Ancak yine öğretim üyeleri ile yapılan görüşmelerde bu öğretmen adaylarınınım gerekçelendirme çeşitlerine dair çok fazla bilgi sahibi olmadığı anlaşılmıştır. 30 kişiden oluşan öğretmen adaylarından 12 öğretmen adayının seçiminde ise amaçlı örnekleme yöntemlerinden, maksimum çeşitlilik yöntemi tercih edilmiştir. Buradaki amaç, göreli olarak küçük bir örneklem oluşturmak ve bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bir başka ifadeyle amaç, genelleme yapmak için bu çeşitliliği sağlamak değil, daha çok çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi bir ortak ya da paylaşılan olguların olup olmadığını bulmaya çalışmaktır. Patton'a (2014) göre, maksimum çeşitlilik gösteren küçük bir örneklem oluşturmanın yararlarından biri; büyük ölçüde farklı özellik gösteren durumlar arasında ortaya çıkabilecek ortak temalar ve bunların değerinin ortaya çıkarılmasıdır. Bu bağlamda maksimum çeşitliliği sağlamak için 30 öğretmen adayına katılımcı seçimi anketi uygulanmıştır. Katılımcı seçimi anketi, hangi öğretmen adaylarının araştırmaya katılmaya istekli olacağını belirlemek ve katılımcıların örneklendiği çalışma grubu hakkında arka plan bilgisi toplamak için tasarlanmıştır. Bu katılımcı seçimi anketi hazırlanırken hem literatürden hem ders kitaplarından yararlanılmış (Kirwan, 2015), ancak öğretim üyelerinin ve matematik eğitimcilerinin görüşleri dikkate alınarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak ankete son hali verilmiştir. Anketten elde edilen veriler doğru, kısmen doğru, yanlış veya boş kategorilerine göre değerlendirilmiş, öğretmen adayları aritmetik ortalama değerlerine göre iyi, orta ve düşük olarak gruplandırılmış ve 4'erli gruplar halinde 12 öğretmen adayı seçilmiştir. Bu seçilen öğretmen adayları asıl çalışmanın yürütüleceği öğretmen adayları olup bu öğretmen adayları ile mülakatlar yürütülmüştür. 5-li Likert tipte ve açık uçlu sorulardan oluşan katılımcı seçim anketi; $\frac{1}{x^2} = 16$, $x > \frac{36}{x}$, $x^2 + 2 = 0$, $x^2 + 6 > 0$, verilen bir grafiğin denklemini oluşturma ve $f(x) > 0$ olduğu aralıkları belirleme, verilen sayı ve şekil örüntü problemlerine ait bir kural oluşturma, verilen bir kurala göre örüntü problemleri kurma vb. soruları içermekte olup, bu sorular lineer ve kuadratik örüntü, denklem ve eşitsizlikleri ile ilgili öğretmen adaylarının bilgilerini, akıl yürütme, sembol kullanma ve farklı gösterimler arası dönüşüm yapma becerilerini, doğru cevap üretme durumlarını vb. özellikleri belirleyen sorulardır.

## 2.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada veriler açık uçlu dört problemi içeren yapılandırılmış görüşme formları yardımıyla toplanmıştır. Problemlerin seçiminde alan yazından yararlanılmış ve matematik eğitimi alanında uzman öğretim üyelerinin görüşleri alınmıştır. Problemler öğretmen adaylarının rahatlıkla cevap verebileceği lineer ve kuadratik örüntü içeren türden problemlerdir (English & Warren, 1998; Feifei, 2005; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Bu bağlamda problemler hazırlanırken, sırasıyla şu ölçütler göz önüne alınmıştır: Birinci olarak problemler bir veya birden fazla düşünme becerilerini kullanmaya teşvik etmelidir. İkinci olarak problemler birçok genelleme ve gerekçelendirme stratejisini yapılandırmaya ve çoklu temsilleri kullanmaya izin vermelidir. Bu şekilde öğretmen adayı kendi istediği stratejiyi seçmede özgür olacaktır. Ayrıca problemler ortaya çıkacak düşünme süreçleri ile ilgili tartışma ve diyaloga maksimum düzeyde izin vermelidir. Son olarak mümkün olduğunca öğretmen adayları için standart olmayan örüntü problemlerine yer verilmiştir. Bunun en önemli sebeplerinden biri öğretmen adaylarının ezbere işlem yapmasının önüne geçmektir. Hazırlanan bu veri toplama aracındaki problemlerin ölçülmek istenen amacı temsil edip etmediği yani problemlerin hazırlanma aşamasında yukarıda belirtilen özellikleri içerip içermediği uzman görüşüne göre saptanır (Karasar, 1996). Bu amaç doğrultusunda hazırlanan problemler üç matematik eğitimcisine ve mevcut fakültede görev yapan iki öğretim üyesine gösterilerek önerileri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Ayrıca hazırlanan lineer örüntü problemleri MEB'in ilkokul ve ortaokul matematik öğretim programlarında yer alan kazanımlar dikkate alınarak hazırlanmış olup, kuadratik örüntü problemleri ise hem yurt içinde hem de yurt dışında yapılan örüntü genelleme süreci ile ilgili çalışmalarda (Akkan ve Çakıroğlu, 2011; Çilingir ve Yanpar-Yelken, 2016; Feifei, 2005; Kirwan, 2015; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2011) yer alan problemler dikkate alınarak hazırlanmıştır. Öğretim programlarının ve literatürdeki çalışmaların dikkate alınmasındaki amaç ise soruların geçerliğini yükseltmektir. Çalışmada kullanılan problemler ve özellikleri Tablo 2 de verilmiştir.

**Tablo 2.** Çalışmada kullanılan örüntü problemlerin içerikleri ve özellikleri

| | **Sayı Örüntü Problemi** | **Şekil Örüntü Problemi** |
|---|---|---|
| | **1. Problem** | **2. Problem** |
| **Lineer Örüntü Problemleri** | 6, 10, 14, …<br>Yukarıdaki sayılar bir örüntü oluşturacak şekilde belli bir kurala göre dizilmiştir. Buna göre, örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, örüntünün n. terimi için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız. | <br>Yukarıda düzgün altıgenlerden oluşan bir şekil örüntüsü verilmiştir. Buna göre, örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, n. adımdaki kare sayısı için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız. |
| | **3. Problem** | **4. Problem** |
| **Kuadratik Örüntü Problemleri** | 1, 5, 13, …<br>Yukarıdaki sayılar bir örüntü oluşturacak şekilde belli bir kurala göre dizilmiştir. Buna göre, örüntünün n. terimi için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız. | <br>Yukarıda benzer karelerden oluşan bir şekil örüntüsü verilmiştir. Buna göre, örüntünün kuralını yazılı olarak ifade ederek, n. adımdaki kare sayısı için harfli bir ifade yazınız ve açıklayınız. |

Öğretmen adaylarının farklı örüntü problemlerini genellemede kullandıkları stratejileri ve gerekçelendirme çeşitlerini belirlemek amacıyla, öğretmen adayları ile yapılandırılmış görüşme formları üzerinden klinik görüşmeler yürütülmüştür. Klinik görüşme, öğretmen adaylarının düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğretmen adayları ile karşılıklı yapılan görüşmelerdir. Bu görüşme çeşidinin esas amacı, bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Zazkis & Hazzan, 1999). Klinik görüşmeler ile öğretmen adaylarından; yapılandırılmış görüşme formundaki görevi yerine getirmeleri (bu şekilde öğretmen adaylarının kullandıkları strateji biçimleri tanımlanmıştır), her bir görev için cevaplarının ne olduğunu ve bu cevaba nasıl ulaştıklarını açıklamaları (sesli düşünme protokolü), ihtiyaç duyulan ek soruları cevaplamaları ("Bunu nasıl yaptın?", "Niçin?" ve "Neden?" gibi sorularının yanında problemin içeriği ile ilgili ek sorular) beklenmiştir.

## 2.4. Verilerin Analizi

Bu araştırmada, toplanan veriler, nitel araştırma yöntemlerinde yer alan analiz tekniklerinden betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Betimsel analiz; nitel çözümlemelerdeki verilerin özgün biçimlerine sadık kalınarak, kişilerin söylediklerinden, yazdıklarından ve dokümanların içeriklerinden doğrudan alıntılar yaparak, betimsel bir yaklaşımla verilerin sunumudur (Kümbetoğlu, 2005). Bu çalışmada ilk önce araştırmanın kavramsal çerçevesi dâhilinde veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuştur. Daha sonra bir önceki aşamada oluşturulan genel çerçeveye göre elde edilen veriler okunarak düzenlenmiş ve düzenlenen verilerin tanımlanmıştır. Gerekli görülen yerlerde doğrudan aktarmalara yer verilmiştir. En son aşamada ise bulguların açıklanması ve ilişkilendirilmesi yapılmıştır. Verilerin sunumunda katılımcı öğretmen adaylarını ve araştırmacıyı nitelemek için takma isimler (ÖA1–ÖA12 ve A) kullanılmıştır. Elde edilen veriler, alan yazında daha önce yapılan araştırmalardaki örüntü genelleme stratejileri (Amit & Neria, 2008; Ebersbach & Wilkening, 2007; Garcia-Cruz & Martion, 1997; Krebs, 2003; Lannin, 2003, 2005; Ley, 2005; Orton & Orton, 1999; Rivera & Becker, 2005; Stacey,1989; Steele & Johaning, 2004; Swafford & Langrall, 2000) ile gerekçelendirme çeşitleri (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998; Kirwan, 2015; Marrades & Gutiérrez, 2000) dikkate alınarak oluşturulan Tablo 3' deki çerçeveye göre sınıflandırılmış ve analiz edilmiştir.

**Tablo 3.** Genelleme stratejileri ile gerekçelendirme çeşitleri

| | **Strateji** | **Açıklama** |
|---|---|---|
| **Genelleme strateji çeşitleri** | Yinelemeli veya Eklemeli (Recursive or Additive) | Gelecek terimleri veya terimi bulmak için örüntüdeki önceki terimin kullanımını içerir. Öğrenciler genellikle iki terim arasındaki farkı bulmaya çalışır ve gelecek terimi bulmak için elde ettikleri farkı son terime eklerler. Bu işlem yinelemeli ve eklemeli olarak devam ettiğinden eklemeli muhakeme olarak da adlandırılır. |
| | Tahmin ve Kontrol (Guess and Check) | Kuralın işleyip işlemediğine bakmaksızın, bir kural tahminini içerir. Problem durumunu temsilen bir cebirsel ilişki (kural) ortaya koyulur. Öğrenci ortaya koyduğu kuralın süreç boyunca geçerliliğini düşünmez. Oluşturduğu cebirsel yapı genellikle problem durumu ile ilgili sayıları ve işlemleri içerir. |
| | İçeriksel (Contextual) | Durumu sağlayan bilgiye yani içeriğe odaklı bir kural veya formül yapılandırmayı içerir. Bu kural veya formül, hesaplama tekniği ile ilişkili, genelde içeriğe bağlı olan ve daha çok aşina olunan veya ezberlenen bir kural veya formüldür. |
| | Fonksiyonel (Explicit) | Bu muhakeme becerisi herhangi bir değeri belirleyebilmek için iki değişken (adım ile adım sayısı veya terim ile terim yeri) arasındaki ilişkiyi genelleştirmeyi içerir. Bu muhakeme denklemleri ve formülleri kullanarak fonksiyonları belirlemeye doğru aşamalı bir ilerlemenin ilk adımıdır. Bu muhakeme kullanıldığında hem uzak hem de yakın terimler için değişmeyen ve uygulanabilir olur. Bundan dolayı bu muhakeme becerisi n. terimi bulmaya ve genel bir kural yazmaya imkân verir. |

Tablo 3'ün devamı

| Strateji | | | Açıklama |
|---|---|---|---|
| Gerekçelendirme çeşitleri | Doğrulama Yoluyla | Sayısal kontrol | Bu doğrulama çeşidinde belirli durumlar için sayısal değerleri yerine yazarak doğruluğu kontrol etme söz konusudur. Bu doğrulama çeşidi özellikle sayısal değerler yardımıyla varsayılan kuralı onaylamak için veya varsayılan bir kuralla ilgili bir kısmın geçerliliğini kontrol etmek için kullanılır. |
| | | Cebirsel kontrol | Bu doğrulama çeşidinde amaç; varsayılan kurala, sembolik manipülasyonlar sonucu özdeş olan farklı bir kural bulmak ve bu iki kuralı eşleştirerek varsayılan kuralın doğruluğunu göstermektir. |
| | | Figural kontrol | Bu doğrulama çeşidi, varsayılan kuralın figurallar (şekil, resim vb.) yardımıyla doğru veya yanlış olduğunu kontrol etmek için kullanılır. Burada amaç bir sonraki adımda oluşacak yeni durumu yinelemeli olarak şekil, resim vb. yardımıyla belirlemeye çalışmak ve genel kuralın doğruluğunu bu şekilde kontrol etmektir. |
| | Açıklama Yoluyla | Niçin yanlış? | Varsayılan kuralın niçin yanlış olduğu konusunda geçerli bir açıklama yaparak gerekçelendirmeyi amaçlar. |
| | | Niçin doğru? | Varsayılan kuralın niçin doğru olduğu konusunda geçerli bir açıklama yaparak gerekçelendirmeyi amaçlar. |
| | Dışsal Bilgi Yoluyla | Önceki bilgi | Bireylerin bir akıl yürütme yaparak değil sadece önceden bildikleri formül ve kurallardan yararlanarak varsayılan kuralı gerekçelendirmeyi içerir. |
| | | Otorite bilgi | Sorgulama gerektirmeyip, ders kitabı, öğretmen gibi bir otoriteye dayandırılarak varsayılan kuralı gerekçelendirmeyi içerir. |

Çalışmanın geçerliği dış geçerlik ve iç geçerlik olarak iki şekilde ele alınmıştır. Çalışmada dış geçerliği sağlamak için çalışmanın süreci detaylı bir şekilde açıklanmış ve yöntem bölümünde detaylı biçimde sunulmuştur. Ayrıca kuramsal bölüm açıkça sunularak tartışma için olanak sağlanmıştır. Çalışmanın iç geçerliğini sağlamak amacıyla veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuş ve bu doğrultuda veriler analiz edilmiştir. Bununla birlikte çalışmada geçen kavramların tamamı detaylı biçimde açıklanmıştır. Çalışmanın geçerliğini sağlamak için belirlenen araştırma problemine uygun araştırma modeli seçilmiş ve araştırmanın bulguları da bu doğrultuda sunulmuştur. Katılımcılardan doğrudan aktarmalar yapılmıştır. Çalışma süreci iki öğretim üyesi tarafından kontrollü olarak yürütülmüştür. Kodlama süreci belirlenen kuramsal çerçeve doğrultusunda yapılmış ve kodlamalar farklı araştırmacılar tarafından kontrol edilerek kodlama matrisi oluşturulmuştur. Kod matrisi sonucunda araştırmacılar arasındaki uyum .92 olarak belirlenmiştir. Araştırmacılar arasındaki uyumun bu kadar yüksek olması çalışmanın veri analizinin betimsel analiz yoluyla yapılmasından ve kuramsal çerçevenin detaylı bir şekilde açıklanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

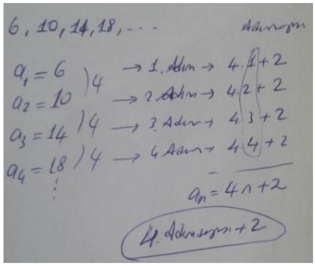
## 3. Bulgular ve Tartışma

### 3.1. Öğretmen adaylarının örüntü problemlerini genellemede kullandıkları stratejiler

#### *Lineer Sayı Örüntüsü Problemi*

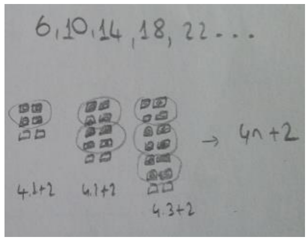
Öğretmen adaylarının 10'u lineer sayı örüntüsünü genellemede doğru bir strateji geliştirmişlerdir. 7 öğretmen adayı fonksiyonel stratejiyi genellemek amacıyla kullanmışken, 2 öğretmen adayı içeriksel, bir öğretmen adayı ise tahmin-kontrol stratejisinden yararlanarak doğru genellemelere ulaşmışlardır. Öğretmen adaylarının bazıları lineer örüntü probleminde iki değişken olan adım ile adım yeri arasındaki ilişkiden yararlanarak oluşturdukları formüller hakkında kavramsal bilgiye sahiptirler. Öğretmen adaylarının çoğunluğu sıralı çizelgeler veya şekiller yardımıyla iki değişken arasındaki ilişkiyi oluşturmaya çalışırken, diğerleri ise doğrudan sayı dizisinde yer alan sayılar arasındaki ilişkilere odaklanmışlardır. Bazı öğretmen adayları ise lineer sayı örüntü probleminde terim ile terim sayısından yola çıkarak oluşturduğu genellemeyi “ 4 × adım + 2” şeklinde ifade etmiştir. Bu şekilde genelleme yaptığı belirlenen ÖA5 öğretmen adayının ifadeleri ile yaptığı işlemler şöyledir:

*ÖA5: Adım ile adım sayısı arasındaki ilişkiyi bulabilirsem tüm adımlarda yer alan sayı değerlerini bulabilirim. Önce aradaki farkı bulayım, 4 olur… [A: Farkı bulmadaki amacın ne?]… Çünkü o fark sayesinde ilişkiyi elde edebilirim… [A: Tamam, devam edelim.]… Mesela sayılar arasındaki fark olan 4 ile 1’i çarparsam, birinci adımdaki 6 sayısını elde etmek için 2 eklemeliyim. O halde $4 \times 1 + 2$ olur. İkinci adım için 4 ile 2 çarpalım ve ne eklemeliyim 2 eklemeliyim, üçüncü adım için çarpıma yine 2 eklemeliyim. Hep böyle devam ediyor…[A: Tamam, genel bir kural veya n. terimi bulabilir misin?]… O halde ilişki adım sayısının 4 katından iki fazla, yani $4 \times$ Adım sayısı $+ 2$ olur.*



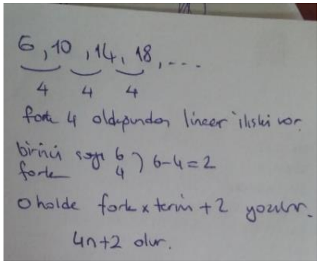

Bazı öğretmen adayları ise sayı örüntü problemini şekil örüntü problemine çevirmiş, genel terim için “4.n+2” ifadesini yazdıkları tespit edilmiştir. Bu şekilde genelleme yaptığı belirlenen ÖA8 öğretmen adayının ifadeleri ve yaptığı işlemler aşağıda sunulmuştur:

*ÖA8: Ben öncelikle altı kare çizeyim, daha sonra 4 kare daha ekleyeyim 10 kare çizeyim, 4 daha ekleyeyim 14 kare çizeyim, yeterli gibi… [A: Amacın ne?]… Şimdi bu şekiller yardımıyla daha kolay ilişkiyi bulabilirim. Yani amacım ilişkiyi bulmak… [A: Tamam, devam edelim.]… Şimdi bu üç şekilde 4’er gruplar oluşturursam, birinci şekilde 4’erli bir grup ve 2 kare artmış, ikinci şekilde 4’erli iki grup ve 2 kare artmış, üçüncü şekilde 4’erli üç grup ve 2 kare artmış…4’erli grupları karalayıp daire içine alsak durum daha net gözükür …[A: Tamam da genel bir kuralı nasıl yazacaksın?]… İlişki belli, 4 ile adım sayısını çarp 2 ekle yani $4n + 2$ dir.*

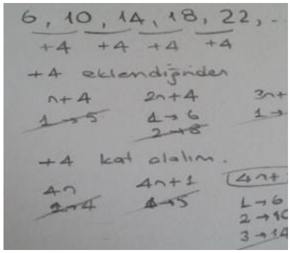



İki öğretmen adayı ise bu çeşit problemlerin çözümünde kullanılan bir formül bildiğini ifade etmişler ve bu formül yardımıyla probleme cevap verebileceklerini belirtmişlerdir. Fakat bu öğretmen adaylarının, bu örüntü probleminde iki değişken (terim ile terim sayısı) arasında ilişkilendirme yapılarak oluşturulan bu formülün sınırları hakkındaki bilgisi kavramsal anlama düzeyinde değildir. Yani öğretmen adayları her ne kadar daha önceden ezberledikleri bir kural ile genelleme yapmaya çalışsalar da yine de doğru bir genelemeye ulaşamamışlardır. Bu türde genelleme yapan ÖA2 öğretmen adayının ifadeleri ve işlemleri aşağıdaki gibidir:

*ÖA2: Bu aradaki farklara bakılırsa lineer ilişki var… [A: Neden?]… Çünkü sayılar arasındaki fark hep sabit kalıyor, yani 4 oluyor. O halde işimizi kolay, çünkü direkt genel terimi yazabilirim… [A: Nasıl yani?]… Genel terimi veren veya n. terimi içeren bir formül yazarak… [A: Nasıl bir formül?]… Daha önce birkaç kez kullanmıştım. Kolaylık sağlıyor bu formül… Fark 4 olduğundan 4 ile n çarpmalıyız, 4n olur. Birinci sayı ile bulduğumuz fark arasındaki fark 2 olur. O halde $(fark \times terim + 2)$ dir… [A: Neden böyle yapıyorsun?]… Formül öyle oluşuyor da ondan… Demek ki 4.n ile 2 toplayayım. O halde bu örüntünün formülü "$4.n + 2$" olur.*

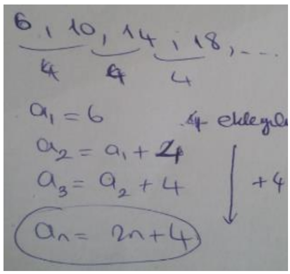



ÖA9 öğretmen adayı ise yandaki şekildeki gibi lineer sayı örüntü probleminde +4 ifadesini önce ekleme kabul etmiş, bu eklemeden yararlanarak $n + 4, 2n + 4, 3n + 4$ şeklinde ifadeleri tahmin etmiştir. Denemeler yaparak bu ifadelerin doğruluklarını kontrol etmeye çalışmış, fakat bunların geçerli kurallar olmadığı belirlemiştir. Öğretmen adayının daha sonra +4 ifadesini kat olarak aldığı, yeniden tanımladığı 4n ifadesinden yararlanarak $4n + 2$ ifadesini oluşturduğu, bu ifadeyi deneyince doğru olduğunu anladığı saptanmıştır…

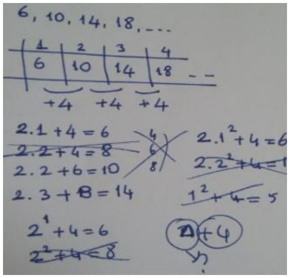



Öğretmen adayı ilişkilere odaklanmış ve birkaç denemeden sonra tahminde bulunmuştur. Yani tahmin-kontrol stratejisini kullanarak uygun bir kuralı cebirsel olarak ifade etmiştir.

Bununla birlikte bu örüntü çeşidinde genelleme yapmayı deneyen ancak yanlış genellemeye ulaşan öğretmen adaylarının sayısı ikidir. Bu öğretmen adayları yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejisini kullanmışlar ancak genel bir kural oluşturamamışlardır. Örneğin ÖA4 öğretmen adayının yandaki şekildeki gibi +4, +4, +4, … farklarını belirlemiş, birinci terimi 6 kabul edip her bir terime 4 eklediği görülmüştür. Buna bağlı olarak öğretmen adayının yinelemeli bir kural yazmaya çalışmış [2n+4], ancak geçerli bir kural bulamadığı tespit edilmiştir. Öğretmen adayının başlangıçtaki ve süreç içindeki düşüncesi doğru olmakla birlikte yazdığı kural doğru değildir.



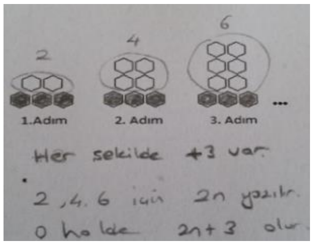
ÖA11 öğretmen adayı öncelikli yandaki şekildeki gibi bir tablo yapılandırmış, ardından aradaki farkların +4 şeklinde ilerlemesinden dolayı ilişkinin lineer olduğunu varsayarak ve denemeler yaparak bir kural elde etmeye çalışmıştır. Ancak öğretmen adayı tahmin edip deneyerek kontrol ettiği kuralların geçerli olmadığını fark etmiş, daha sonra ilişkinin kuadratik ve üstel olabileceği ile ilgili denmeler yapmış, ancak yine başarısız olmuştur. Bu öğretmen adayı da durumu tanımlamak için uygun bir sembolik kural geliştirememiş, sadece n+4 ifadesini yazıp soru işareti bırakmıştır.



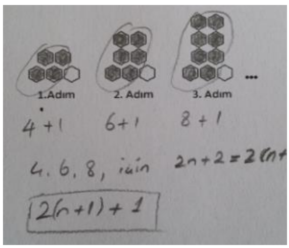

### *Lineer Şekil Örüntüsü Problemi*

Lineer şekil örüntüsü problemi ile ilgili doğru bir genellemeye ulaşan on öğretmen adayı vardır. Doğru bir genelleme geliştiren bu öğretmen adaylarından sekizi fonksiyonel stratejiyi genellemek amacıyla kullanmışken, iki öğretmen adayı ise içeriksel stratejiyi kullanmıştır. Öğretmen adaylarından dördü benzer bir çözüm yapmış ve doğru bir şekilde genel kuralı tespit etmişlerdir. ÖA1 öğretmen adayı sabit olan ve karalanan 3 düzgün altıgen için +3 ifadesini yazmış, her bir adımdaki karalanmayan karelerin 2, 4, 6, … olması nedeniyle de 2n ifadesini elde etmiştir. Bu iki ifadeyi toplayarak *2n+3* genellemesine ulaşmıştır. Şöyle ki:

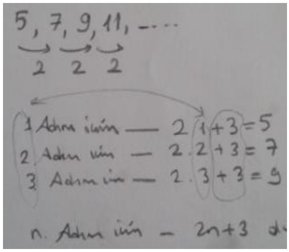
*ÖA1: Önce şekillerdeki altıgenlere bakalım. Her üç şekildeki en alt kısımdaki üç altıgeni karalayalım. Bunlar her şekilde aynı olduğundan +3 yazılabilir… [A: Tamam, şimdi ne yapacaksın?]… Karalanmayan kareler var ya hani yuvarlak içini aldığım şunlar bunlarda 2, 4, 6, şeklinde gidiyor. O halde 2'in katları bunlar. Demek ki karalanmayanlar için 2n yazılabilir… Tamam, işte, kural belli karalananlar ile karalanmayanları toplarsak kuralı elde ederiz. [A: Nasıl yani?]… Şöyle ki: 2n ifadesi karalanmayanlardan geliyor. Karalananlarda ise hep +3 sabit oluyor. O halde 2n+ 3 olur.*




Benzer şekilde ÖA8 öğretmen adayı da yandaki şekildeki gibi karalamadığı 1 düzgün altıgen için +1 ifadesini yazmıştır. Daha sonra her bir adımdaki karaladığı altıgenlerin 4, 6, 8, … şeklinde artması nedeniyle $2n + 2 = 2(n + 1)$ ifadesini elde etmiş ve elde ettiği bu iki ifadeyi toplayarak $2(n + 1) + 1$ şeklinde doğru bir genellemeye ulaşmıştır. Bu öğretmen adayı da tıpkı ÖA1 öğretmen adayı gibi şekillerin dizilişinden yararlanarak geneleme yapmaya çalışmıştır.

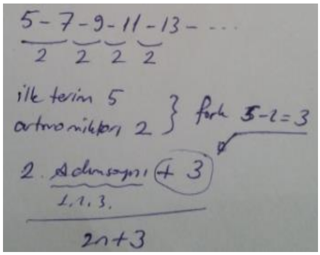


Üç öğretmen adayı ise şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmişler, iki değişken olan adım ile adım yeri arasındaki ilişkiden yararlanarak doğru genelleme yapmışlardır. Bu öğretmen adayları oluşturdukları kural hakkında kavramsal bilgiye sahiptirler. Özellikle öğretmen adayları sıralı çizelgeler ve tablolar yardımıyla ilişkileri daha ayrıntılı inceledikleri belirlenmiştir. Örneğin, ÖA5 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi adım ile adım yeri arasındaki ilişkiden ve sıralı çizelgeden yararlanarak n. adım için $2n + 3$ şeklinde doğru bir kural oluşturmuştur. Bu öğretmen adayları şekillerin dizilişinden yararlanmamış, sayıların dizilişinden yararlanmışlardır.

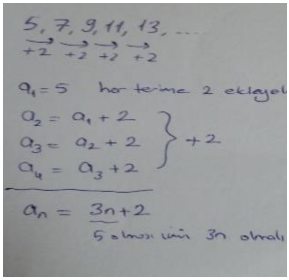



Doğru genellemeye ulaşan iki öğretmen adayı ise ilk önce şekil örüntüsü problemini sayı örüntü problemine çevirmişler, daha sonra önceden oluşturmaya aşina oldukları ve ezbere bildikleri bir kural yardımıyla genelleme yapmaya çalışmışlardır. Öğretmen adayları her ne kadar ezber bir kural ile genelleme yapmaya çalışsalar da doğru genellemelere ulaşmışlardır. Bu şekilde genelleme yaptığı belirlenen ÖA6 öğretmen adayının ifadeleri ve yaptığı işlemler şöyledir:

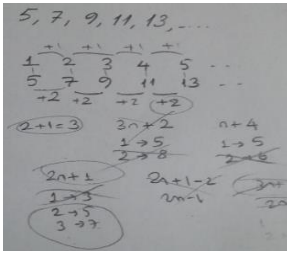
*ÖA6: İlk olarak şekillerdeki altıgenlerin sayısını dikkate alalım; 5, 7, 9,… şeklinde artıyor. [A: Neden böyle yaptın?]… Daha önce sayı dizileri ile ilgili bir kural biliyorum. Ondan şekillerdeki altıgenlerin sayıları ile sayı dizisi oluşturdum. [A: Tamam, devam edelim.]… Aradaki farklar yani sayı dizisindeki artma miktarı 2 ve ilk terim ile artma miktarı arasındaki fark 5 – 2 = 3 olduğundan, bu sayı dizisi için kuralı şöyle yazabiliriz: 2 ile adım sayısını çarpalım 3 ekleyelim, yani 1, 2, 3, ... için 2n +3 olur. [A: Bu yaptıklarını niçin yaptığını biliyor musun?]… Hocam gerek var mı? Kural artma miktarı eşit olan her sayı dizisi için doğru…*




Bununla birlikte lineer şekil örüntü probleminde genelleme yapmayı deneyen ancak yanlış genellemeye ulaşan öğretmen adaylarının sayısı ise ikidir. Bu öğretmen adayları da tıpkı lineer sayı örüntü problemindeki gibi yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejisini kullanmışlar ancak doğru olan genel bir kurala ulaşamamışlardır.



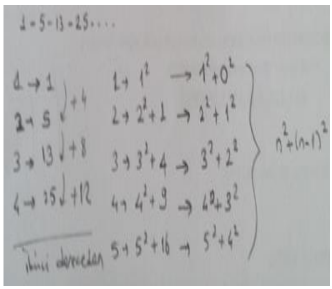

Örneğin ÖA9 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmiş, daha sonra sayı örüntüsündeki +2, +2, +2, … şeklindeki farkları belirlemiştir. Öğretmen adayı birinci terimi 5 kabul edip her bir terime +2 eklemiş, buna bağlı olarak yinelemeli bir şekilde 3n+2 şeklinde bir kural yazmıştır. Ancak öğretmen adayının başlangıçtaki ve süreç içindeki düşüncesi doğru olmakla birlikte yazdığı kural ile ilgili düşüncesi doğru değildir. Bu nedenle yinelemeli stratejiyi kullanan bu öğretmen adayının doğru bir sembolik kural geliştiremediği görülmüştür.




Ayrıca ÖA11 öğretmen adayı şekil örüntü problemini sayı örüntü problemine çevirmiştir. Bu öğretmen adayı tıpkı lineer sayı örüntüsünde yaptığı işlemlere benzer işlemlerle genelleme yapmaya çalışmıştır. Öğretmen adayı öncelikli olarak bir sıralı çizelge yapılandırmış, daha sonra aradaki farkların +2 şeklinde ilerlemesinden dolayı ilişkinin lineer olduğunu varsaymış ve denemeler yapmaya başlamıştır. Ancak tahmin edip deneyerek kontrol ettiği kuralların geçerli olmadığını fark etmiştir.

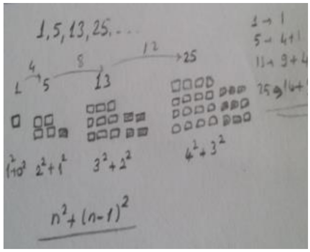
***Kuadratik Sayı Örüntü Problemi***

Öğretmen adaylarının sekizi kuadratik sayı örüntüsünü doğru bir genelleme geliştirmişlerdir. Beş öğretmen adayı fonksiyonel stratejiyi genellemek amacıyla kullanmışken, iki öğretmen adayı içeriksel, bir öğretmen adayı ise yinelemeli stratejisinden yararlanarak doğru genellemelere ulaşmışlardır. Öğretmen adaylarından ikisi, sayı örüntüsündeki sayılar arasındaki ilişkilerden yani terim ile terim sayısı arasındaki ilişkiden yararlanarak her bir terim için sırasıyla hesaplamalar yapmışlar ve bu ilişkilerden yararlanarak bir genellemeye ulaşmaya çalışmışlardır. Örneğin ÖA10 öğretmen adayı için:



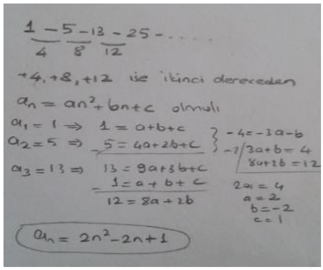
*ÖA10: İlk önce aradaki farklara bakalım, farklar eşit değil. O halde bu doğrusal yani birinci dereceden değildir. [A: Ne olabilir?]… Bu durumda ikinci dereceden olabilir. Çözdükçe anlayacağız. Şimdi +4, +8, +12, ... şeklindeki artışı ikinci derece ilişki olarak düşünelim. Şöyle yapalım 1, 5, 13, 25,… sayılarını nasıl elde edebiliriz.* $1^2$, $2^2+1$, $3^2+4$, $4^2+9$, $5^2+16$, *... olur. Şimdi de bu ifadeleri şöyle yazalım birinci terim için* $1^2+0$, *ikinci terim için* $2^2+1^2$, *üçüncü terim için* $3^2+2^2$, *dördüncü terim için* $4^2+3^2$, *beşinci terim için* $5^2+4^2$, *... olur……[A: Tamam da genel bir kuralı nasıl yazacaksın?]… bu sayılar arasındaki ilişkilere bakarsak terim yerinin karesi ile terim yerinin bir eksiğinin karesi alınıyor. O halde n. terim için* $n^2+(n-1)^2$*olur.*

Öğretmen adaylarının üçü ise sayı örüntü problemini şekil örüntü problemine dönüştürmüşlerdir. Elde ettikleri şekil örüntüsündeki karelerin sayılarından yararlanarak her bir adımdaki kare sayısını dikkate almış ve genel bir kurala ulaşmışlardır. Örneğin ÖA7 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne dönüştürmüş, ardından karaladığı ve karalamadığı karelerin sayısını dikkate alarak her bir adımdaki karelerin altına sırasıyla $1^2, 2^2+1^2, 3^2+2^2, \ldots$ şeklinde hesaplamalar yapmış ve ilişkilerden yararlanarak $n^2+(n-1)^2$ şeklinde doğru bir kurala ulaşmıştır.

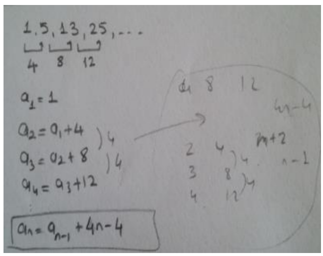



ÖA2 ve ÖA4 öğretmen adayları ise ikinci dereceden örüntülerde daha önceden ezbere bildikleri bir formülün her zaman işe yaradığını ifade etmiş ve bu formül yardımıyla genel bir kurala ulaşmışlardır. Fakat öğretmen adayları, iki değişken (terim ile terim yeri) arasında ilişkilendirme yapamadığı, daha önceden aşina oldukları formül yardımıyla doğru bir genellemeye ulaştıkları belirlenmiştir. Bu şekilde genelleme yaptığı belirlenen ÖA2 öğretmen adayının ifadeleri ve yaptığı işlemler şöyledir:

*ÖA2: Sayılar arasındaki +4, +8, +12,… şeklindeki artış olduğundan ikinci dereceden olur. Bu durumda $a_n$ genel terimi için $an^2+bn+c$ şeklinde ikinci dereceden genel bir denklem yazalım. Şimdi sırasıyla ilk üç terimi bulalım... [A: Niçin ilk üç terim?]… Çünkü denklemde üç bilinmeyen var. Birinci terim için n yerine 1 yazarsak a + b + c = 1 olur. İkinci terim için, 2 yazarsak 4a + 2b + c = 5 olur. Üçüncü terim için 3 yazarsak 9a + 3b + c = 13 olur. Bu denklemleri çözelim…. Bu durumda $a=2, b=-2$ ve $c=1$ olur... [A: Genel bir kuralı nasıl yazacaksın?]… Bunları genel denklemde yani $an^2+bn+c$ de yerine yazarsak $2n^2-2n+1$ şeklinde bir kural oluşturabiliriz.*

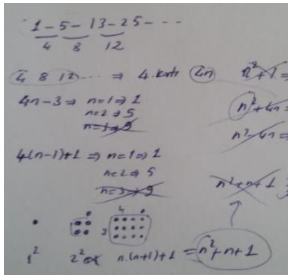



ÖA6 öğretmen adayı ise yandaki şekildeki gibi +4, +8, +12, şeklinde bir artış olduğunu belirlemiştir. Daha sonra birinci terim için 1, ikinci terim için ise birinci terim artı 4, üçüncü terim için ikinci terim +8, … şeklinde bir sıralama yapmıştır. Sonra +4, +8, +12,… artış miktarları arasındaki ilişkilerden yararlanarak artış miktarları için 4n – 4 şeklinde bir genelleme elde etmiştir. Sonunda bu genellemeyi her bir terim için geçerli olacak örüntünün genel kuralına $a_n = a_{n-1}+4n-4$ şeklinde monte ederek kural oluşturmuş.

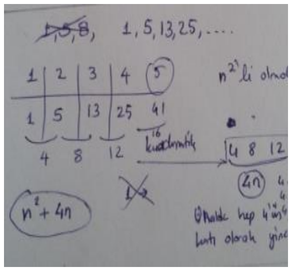



Yinelemeli stratejiyi kullanan bu öğretmen adayının oluşturduğu kural geçerli bir kuraldır. Öğretmen adayının elde ettiği bu kural geçerli bir kural olmakla beraber, bu kural sadece lokal genellemelere izin verir, fakat global genelemelere izin vermez.

Bununla birlikte bu örüntü çeşidinde genelleme yapmayı deneyen ancak yanlış genellemeye ulaşan öğretmen adaylarının sayısı iki iken, herhangi bir girişimde bulunmayan ise bir öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adayları kuadratik sayı örüntü probleminde yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejisini kullanmışlar, ancak genel bir kurala ulaşamamışlardır.



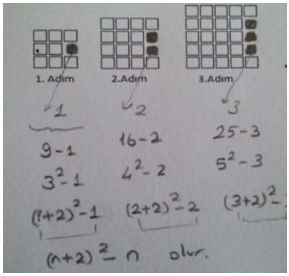

Örneğin ÖA3 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi aradaki farkların 4, 8, 12,.. şeklinde ilerlemesinden dolayı ilk olarak ilişkinin doğrusal olabileceğini varsayıp 4n ifadesini dikkate almıştır. Daha sonra 4n-3 ve 4 (n – 1 ) +1 ifadelerini tahmin etmiş ve üçüncü denemede veya kontrolde bu ifadelerin doğru olmadığını belirlemiştir. Sonra ikinci derece bir ilişki olabileceğini varsaymış ve $n^2 + 1, n^2 + 4n, n^2 - 4n, ...$ ifadelerini kontrol etmiş, yine de geçerli bir kural elde edememiştir. Daha sonra sayı örüntüsünü noktalar kullanarak şekil örüntüsüne dönüştürmüş, buradan $n^2 + n + 1$ kuralını belirlemiştir. Ancak bunu da kontrol edince olmadığını görmüştür. Yani öğretmen adayı durumu tanımlamak için uygun bir sembolik kural geliştirememiştir.



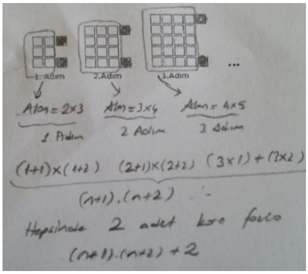

ÖA9 öğretmen adayı ise yandaki şekildeki gibi bir tablo yapmış, sırasıyla 4, 8, 12,… şeklindeki farkları belirlemiştir. Burada ilişkinin kuardatik olduğunu ve $n^2$ yi içeren bir kural yazması gerektiğini varsayarak, 4, 8, 12, … farklarını dikkate alıp yinelemeli bir kuralla 4n ifadesini oluşturmuştur. En sonunda ise $n^2 + 4n$ şeklinde bir kural yazmıştır. Bu nedenle öğretmen adayının bu örüntüyü ifade eden doğru bir sembolik kural geliştiremediği anlaşılmıştır. ÖA11 öğretmen adayı ise bu örüntü problemi için herhangi bir kural bulma girişimde bulunmamıştır.

***Kuadratik Şekil Örüntü Problemi***

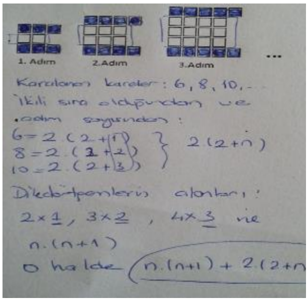
Kuadratik şekil örüntüsü problemi ile ilgili doğru bir genelleme yapan dokuz öğretmen adayı vardır. Doğru genellemeye ulaşan bu öğretmen adaylarından altısı fonksiyonel stratejiyi genellemek amacıyla kullanmışken, iki öğretmen adayı içeriksel stratejiyi, bir öğretmen adayı ise yinelemeli stratejiyi kullanmışlardır. Öğretmen adaylarından üçü şekilleri tam bir kareye tamamlayarak işe başlamışlardır. Bu öğretmen adayları şekillerin durumuna göre (örneğin bazıları şekli bir bütün alarak tam kareler $(3^2, 4^2, 5^2, ...)$ oluşturmuşken, bazıları şeklin içindeki parçalardan tam kareler $(1^2, 2^2, 3^2, ...)$ oluşturmuşlar) tam kareler oluşturmuş ve bu tam kareler yardımıyla ilişkileri belirleyerek doğru genellemelere ulaşmışlardır.




Örneğin ÖA1 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi verilen şekilleri tam kareler $(3^2, 4^2, 5^2, \ldots)$ tamamlamak için içi karalanan kareleri sırasıyla adımlara göre 1, 2, 3, … şeklinde şekillere eklemiştir. Birinci adımda 9 kare olduğundan adım sayısının 2 fazlasının karesi alındığını, ikinci adımda 16 kare için adım sayısının 2 fazlasının karesinin alındığını vb. ifade etmiş, sonra her adıma eklediği kareleri tam karelerden çıkararak $(n+2)^2 - n$ şeklinde doğru bir kural elde etmiştir. ÖA7 ve ÖA8 öğretmen adayları ise dikdörtgenlerin alanlarından yararlanarak genel bir kural bulmaya çalışmışlardır. ÖA7 öğretmen adayının ifadeleri ve yaptığı işlemler şöyledir:

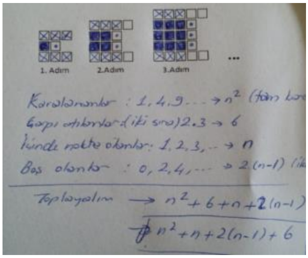



*ÖA7: Şekildeki gibi alt ve üst satırdaki birer kareyi karalayalım. [A: Niçin böyle yaptın?]… Çünkü amacım dikdörtgen oluşturup alanlarından yararlanmak. [A: Tamam, şimdi nasıl devam edeceksin?]…Adımları dikkate alırsak her adım için en son dikdörtgen alanlarına 2 ekleyeceğiz. Şimdi dikdörtgenlerin alanlarına bakalım; birinci adım için alan 2×3, ikinci adım için 3 × 4, üçüncü adım için 4 × 5. Dikdörtgenlerin alanı, adım sayısının bir fazlası* $(n+1)$ *ile adım sayısının iki fazlasının* $(n+2)$ *çarpımıdır [*$(n+1)(n+2)$*]. Daha sonra fazlalık olan iki kare için 2 ekleriz. Sembolik olarak ise,* $(n+1)(n+2)+2$ *olur.*




Benzer şekilde ÖA8 öğretmen adayı da yandaki şekildeki gibi karaladığı karelerin sayısı ile adım sayısı arasındaki ilişkiden $2.(n+2)$ ifadesini elde etmiştir. Daha sonra geriyi kalan karelerin oluşturduğu dikdörtgenin alanı adım sayısı ile adım sayısının bir fazlasının çarpımına eşit olacak şekilde 1 × 2, 2 × 3, 3 × 4 ifadelerinden yararlanarak $n(n+1)$ ifadesini elde etmiştir. En sonunda bu iki ifadeyi toplayarak $2(n+2) + n(n+1)$ kuralını oluşturmuştur. Bu öğretmen adayı da diğer öğretmen adayları gibi adım ile adım sayısı arasındaki ilişkiye odaklandığından doğru bir sonuca ulaştığı saptanmıştır.

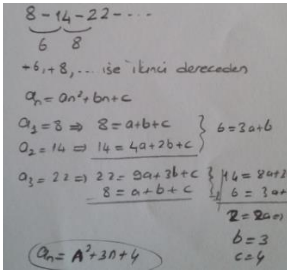
Ayrıca ÖA3 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi diğer öğretmen adaylarından çok daha farklı bir kural oluşturmuştur. Bu öğretmen adayı da şekillerin bir parçasında tam kare elde edecek şekilde şekilleri parçalara bölmüş, daha sonra her parça için oluşturduğu kuralları toplayarak bütüne ait bir kural elde etmiştir. Öğretmen adayı karaladığı tam kareler için $n^2$, çarpı attığı sabit kareler için 6, içine nokta koyduğu kareler için n ve kalan boş karelerin her iki sırası için 2×(n+1) ifadelerini yazmış



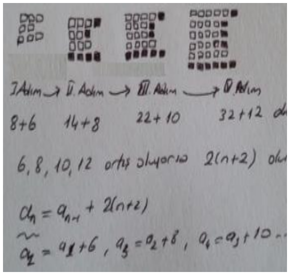

ve bunları toplamından $n^2 + n + 2(n+1) + 6$ şeklinde sembolik geçerli bir kural oluşturmuştur. Bu öğretmen adayı diğer kuadratik örüntü probleminde (sayı örüntü problemi) tahmin- kontrol stratejisini kullanmış ancak geçerli bir kural bulamamış, buna rağmen örüntü probleminde şekillerden yararlanarak doğru ve geçerli bir kural oluşturmuştur. Buradan şekillerin kuadratik örüntüleri genellemede yarar sağladığı söylenebilir.

ÖA2 ve ÖA4 öğretmen adayları tıpkı kuadratik sayı örüntü probleminde olduğu gibi kuadratik şekil örüntülerinde de daha önceden aşina oldukları bir formülün her zaman işe yaradığını ifade etmişlerdir. Fakat öğretmen adayları terim ile terim yeri arasında ilişkilendirme yapmamış, daha önceden aşina oldukları bir formül yardımıyla doğru bir genellemeye ulaşmışlardır.

Örneğin ÖA2 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi şekil örüntü problemini sayı örüntü problemine çevirmiş, daha sonra 6, 8, … şeklindeki artışı dikkate alarak $an^2 + bn + c$ şeklinde ikinci dereceden genel bir denklem yazmıştır. Öğretmen adayı ikinci dereceden genel denklemde ilk üç terim için hesaplamalar yaparak $a = 1, b = 3$ ve $c = 4$ sayısal değerlerini elde etmiştir. Ardından bu sayısal değerleri genel denklemde yerine yazarak $n^2 + 3n + 4$ şeklinde bir kural oluşturmuştur.

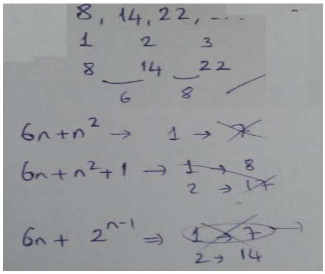


ÖA6 öğretmen adayı ise yandaki şekildeki gibi ilk şeklin en üst satırına ve orta satırına birer kare ile üst satırdaki kare sayısı kadar kareyi en alt satırına ekleyerek (karalanan kareler) ikinci adımdaki kareyi elde etmiştir. Aynı şekilde diğer adımlardaki şekilleri de yinelemeli veya eklemeli bir şekilde oluşturmuştur. 8 kareli birinci adımdaki şekle 6 kare ekleyerek ikinci adımdaki şekli, 14 kareli ikinci adımdaki şekle 8 kare ekleyerek üçüncü adımdaki 22 kareli şekli elde etmiş ve bunu yinelemeyi tekrar ettirmiştir… Yani her bir adıma eklenen kareler sırasıyla 6, 8, 10, … gibi yinelemeli gittiğinden bu ilişkiyi (2n+2) olarak yazmış, daha sonradan $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$ şeklinde bir genellemeye ulaşmıştır. Öğretmen adayının elde ettiği bu kural geçerli bir kural olmakla beraber, bu kural sadece lokal genellemelere izin verir, fakat global genelemelere izin vermez.

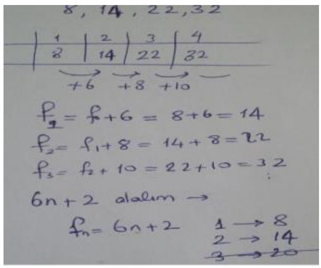



Kuadratik şekil örüntü probleminde genelleme yapmayı deneyen ancak yanlış genellemeye ulaşan öğretmen adaylarının sayısı üçtür. Bu öğretmen adayları da yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejilerinin yanı sıra karma stratejiyi kullanmışlar ancak doğru olan genel bir kurala ulaşamamışlardır.

Örneğin ÖA9 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi ilk olarak şekil örüntü problemini sayı örüntü problemine çevirmiş, aradaki farkların 6, 8, şeklinde ilerlemesinden dolayı ilişkinin ikinci derece olduğunu varsayarak, ilk terimi dikkate alıp tahmin ettiği $6n + n^2$ ve $6n + n^2 + 1$ şeklindeki cebirsel ifadeleri denemiş, ancak başarılı olamamıştır. Daha sonra yeni bir tahminle $6n + 2^{n-1}$ gibi bir üstel ifade yazmış, ancak deneme sonucu kuralın doğru olmadığını fark etmiştir. Sonuç olarak ÖA9 durumu tanımlamak için uygun bir sembolik kural geliştirememiştir.




Öğretmen adayı ÖA11 ise yandaki şekildeki gibi bir tablo yapmış, sırasıyla +6, +8, +10,… şeklindeki farkları belirlemiş. Bu farkları dikkate alarak yinelemeli bir kural yazmaya çalışmış, ancak öğretmen adayı yinelemeli bir şekilde elde ettiği 6n+2 kuralın doğru olmadığını sayısal değerler vererek anlamıştır. O halde öğretmen adayı doğru bir sembolik kural geliştirememiştir. ÖA12 öğretmen adayı ise önce yinelemeli daha sonra fonksiyonel stratejilerden yararlanmaya çalışmış, ancak doğru bir kural geliştirememiştir. Öğretmen adayı karma strateji olarak adlandırılan bu strateji yardımıyla $a_n = a_{n-1} + 6 + 2^n$ şeklinde yanlış bir kural oluşturmuştur.



Doğru genellemelere ulaşan ya da genelleme yapmaya çalışan ancak yanlış genellemeye ulaşanlar veya girişimde bulunmayan on iki öğretmen adayının dört farklı örüntü problemine dair geliştirdikleri strateji dağılımları Tablo 4 deki gibidir.

Tablo 4. On iki öğretmen adayının dört farklı problem için geliştirdiği stratejiler

| | Doğru genellemeye ulaşanlar | | | | Yanlış genellemeye ulaşanlar veya girişimde bulunmayanlar | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.Problem | 2.Problem | 3.Problem | 4.Problem | 1.Problem | 2.Problem | 3.Problem | 4.Problem |
| ÖA1 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA2 | İçeriksel | İçeriksel | İçeriksel | İçeriksel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA3 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | Fonksiyonel | --- | --- | Tahmin-Kontrol | --- |
| ÖA4 | --- | Fonksiyonel | İçeriksel | İçeriksel | Yinelemeli | --- | --- | --- |
| ÖA5 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA6 | İçeriksel | İçeriksel | Yinelemeli | Yinelemeli | --- | --- | --- | --- |
| ÖA7 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA8 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA9 | Tahmin-Kontrol | --- | --- | --- | --- | Yinelemeli | Yinelemeli | Tahmin-Kontrol |
| ÖA10 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- |
| ÖA11 | --- | --- | --- | --- | Tahmin-Kontrol | Tahmin-Kontrol | Girişim Yok | Yinelemeli |
| ÖA12 | Fonksiyonel | Fonksiyonel | --- | --- | --- | --- | Yinelemeli | Karma |

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının çoğunluğu farklı tipteki örüntü problemlerine yönelik en az bir strateji geliştirmiş veya geliştirmeye çalışmıştır. Ancak bir öğretmen adayı kuadratik sayı örüntü probleminde herhangi bir strateji geliştirme girişiminde bulunmamıştır. Özellikle öğretmen adayları içerisinde en yaygın kullanılan strateji türü Mason (1996) ve Lannin (2003) tarafından tanımlanan fonksiyonel stratejidir. Neredeyse her öğretmen adayı (Ö2, Ö9 ve Ö11 hariç) dört farklı örüntü çeşidini genelleme amacıyla en az bir veya iki fonksiyonel strateji geliştirmiş veya denemiştir. Doğru bir kural oluşturmada fonksiyonel stratejiyi kullanan öğretmen adayları diğer stratejileri kullananlara göre daha başarılı olmuşlardır. Nitekim fonksiyonel stratejinin global genellemelere izin verdiğini ifade eden birçok araştırmacı mevcuttur (Akkan, 2013; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Lannin, 2005; Mason, 1996; Tanışlı ve Özdaş, 2009).

Bununla birlikte öğretmen adaylarının kullandığı diğer stratejiler ise içeriksel, yinelemeli (eklemeli), tahmin-kontrol ve karma stratejilerdir. İçeriğe odaklı bir kural veya formül yapılandırmayı içeren içeriksel strateji; genel olarak aynı öğretmen adayları tarafından kullanılmıştır. Ancak fonksiyonel ve içeriksel stratejiler haricindeki stratejileri tercih eden öğretmen adaylarının çoğunluğu sembolik bir genelleme yapamamışlar, bu ise öğretmen adaylarının genelleme yapmadaki başarısızlığını doğurmuştur. Çünkü tahmin-kontrol ile yinelemeli stratejiler genel olarak global genellemelere izin vermez (Akkan, 2013; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Amit & Neira, 2008; Krebs, 2003; Orton & Orton, 1999; Rivera, 2007). Her ne kadar tahmin-kontrol ile yinelemeli stratejiler genel bir kural bulmada çok kullanışlı değilse de, lineer sayı örüntü probleminde tahmin-kontrol stratejisini ve kuadratik sayı ve şekil örüntü problemlerinde yinelemeli stratejiyi kullanarak doğru genellemeler yapan iki öğretmen adayı vardır. Yinelemeli stratejiyi kullanarak doğru genellemeler yapan öğretmen adayının bulduğu kurallar geçerli olmakla beraber, bu kural sadece lokal genellemelere izin verir, fakat global genelemelere izin vermez.

Öğretmen adayları lineer örüntü problemlerinde kuadratik örüntü problemlerine göre daha başarılı genellemeler yapmışlardır. Birçok araştırmacı aşina olunan örüntü problemlerinde bireylerin daha başarılı olduğuna vurgu yapmışlarıdır (Feifei, 2005; Lannin, 2005; Orton & Orton, 1999). Ek olarak öğretmen adayları örüntü genelleme sürecinde sayısal ve figural (şekil, diyagram ve diğer görseller) gösterimlerden çokça yararlanmışlardır. Ancak sayısal gösterimlerden yararlanan öğretmen adaylarının sayısı diğer gösterimlerden yararlanılanlara göre daha fazladır. Chau ve Hoyles (2010) de öğretmenlerin sayısal muhakeme yoluyla sayısal gösterimleri daha çok tercih ettiklerine vurgu yapmışlardır. Ancak figural (şekil, diyagram ve diğer görseller) gösterimlerden yararlanan öğretmen adayları genelleme yapmada daha başarılı olmuşlardır. Elde edilen bu sonuç ile literatürdeki sonuçlar tutarlıdır (Becker & Rivera, 2005, 2006; Krebs, 2003; Mason, 1996; Rivera, 2007; Swafford & Langrall, 2000).

### 3.2. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının farklı örüntü problemlerini genelleştirirken sundukları gerekçelendirme çeşitleri

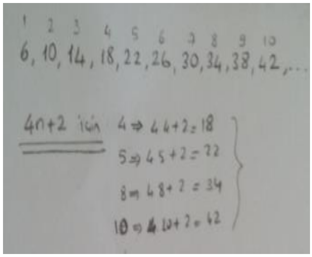
Çalışmanın bu bölümünde, klinik görüşmeler sonucu öğretmen adaylarından elde edilen veriler gerekçelendirme çeşitlerine (doğrulama, açıklama, dışsal bir kaynak) göre sunulmuştur.

***Doğrulama Yoluyla Gerekçelendirme***

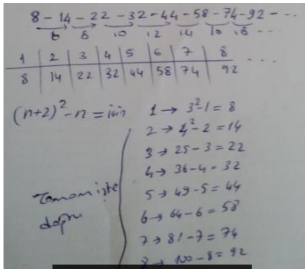
Öğretmen adaylarının büyük bir kısmı dört farklı örüntü probleminde de en çok sayısal kontrol yoluyla doğrulama yaparak genellemelerini gerekçelendirmişlerdir. Lineer sayı örüntü probleminde yedi, lineer şekil örüntü probleminde beş, kuadratik sayı örüntü probleminde altı ve kuadratik şekil örüntü probleminde ise beş öğretmen adayı sayısal kontrol yoluyla elde ettikleri genellemelerin doğruluğunu gerekçelendirmişlerdir. Öğretmen adayları elde ettikleri genel kuralın doğruluğunu, belirli durumlar için sayısal değerleri genel kuralda yerine yazarak kontrol etmişlerdir. Öğretmen adayları özellikle sayısal değerler yardımıyla varsayılan genel kuralı onaylamak için veya varsayılan bir kuralla ilgili bir kısmın geçerliliğini kontrol etmek için bu doğrulama çeşidini kullanmışlardır.

ÖA5 öğretmen adayı görüşme formu üzerine yinelemeli olarak sayı örüntüsünü devam ettirmiş ve belli adımlar için sayısal değerler yazarak elde ettiği kuralın doğruluğunu gerekçelendirmiş ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

*ÖA5: Bu sayı örüntüsünün sayı değerlerini 10.adıma kadar yazalım: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42,… demek ki 10.adımdaki sayı 42. [A: Niçin böyle bir şey yaptın?]… Şimdi biz bulmuş olduğum 4n+2 kuralının doğruluğunu farklı adımlardaki birkaç değer için doğrularsak yeterli olur… [A: Nasıl yani?]… Şöyle ki 4.adımdaki sayısal değer 18, tamam, şimdi 4n+2 kuralında n=4 yazalım. 4.4 + 2 = 18 olur. Demek ki 4.adım için doğru. 5.adım için 4.5 + 2 = 22. Bu da doğru. 8. Adım için n=8 ise 4.8 + 2 = 34. Bu da doğru. 10.adım için 4. 10 + 2 = 42. … Eee bu da doğru. Demek ki kural doğru imiş.*

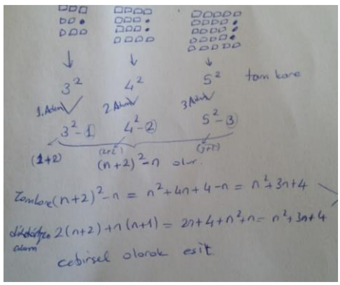



Benzer şekilde ÖA10 öğretmen adayı ise yandaki şekildeki gibi kuadratik şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmiş ve ilk sekiz terimi yinelemeli olarak yazmıştır. Elde ettiği kuralın doğruluğunu göstermek için, ilk sekiz terim için $(n+2)^2 - n$ genel kuralına değerler vermiş, ardından sırasıyla her bir adımda elde ettiği değerler ile yaptığı tablodaki değerleri karşılaştırmıştır. Her iki veri grubundaki değerlerin eşit olduğunu görünce kuralın doğru olduğunu ifade etmiştir. Bu öğretmen adayı da sayısal kontrol ile genel kuralın doğruluğunu gerekçelendirmiştir.



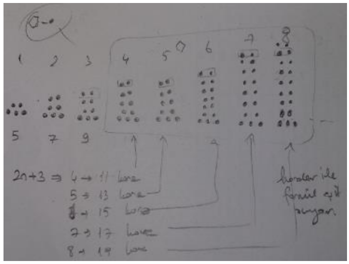

Öğretmen adaylarından ikisi ise sadece kuadratik sayı ve şekil örüntü problemlerinde elde ettikleri genellemelerin doğruluğunu cebirsel kontrol yoluyla gerekçelendirmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından ÖA8 elde ettiği genellemenin yani varsayılan kuralı, sembolik manipülasyonlar sonucu özdeş olan farklı bir kural ile eşleştirme yaparak doğrulama yoluna gitmiştir. Öğretmen adayı daha önceden kuadratik şekil örüntüsü için dikdörtgen alan formülünden $2(n+2) + n(n+1)$ kuralını bulmuştur. Bu kuralın doğruluğunu göstermek için öğretmen adayı tam kare yönteminden yaralanmış ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

*ÖA8: … Daha önce ben dikdörtgenlerin alanlarından yararlanarak $2(n+2) + n(n+1)$ şeklinde bir kural oluşturmuştum. Aslında biz verilen şekilleri tam kareye çevirerek kural oluşturabiliriz. [A: Nasıl yani?]… İkinci dereceden veya kuadratik örüntülerde genel de tam kare yöntemiyle kural oluşturulur. Bu yöntem çok geçerlidir. [A: Tamam, nasıl bir yol izleyeceksin?]… Tamam, yapmaya başlayalım. Önce şekilleri tam kare yapalım. Sırasıyla adımlar için $3^2, 4^2, 5^2, \ldots$ olur. Tam kare yapmak için eklediğimiz karelerin sayısını çıkaralım. $3^2 - 1, 4^2 - 2, 5^2 - 3$, … olur. Burada 3= 1+2, 4= 2+2, 5= 3+2,… olursa ve fazlalık 1, 2, 3,… dikkate alırsak $(n+2)^2 - n$ genel kuralını yazabiliriz. [A: Tamam, şimdi ne yapacaksın?]… Dikdörtgenlerin alanları yardımıyla bulduğum*



$2(n+2)+n(n+1)$ *kuralı cebirsel olarak* $(n+2)^2-n$ *kuralına eşitse yani özdeş ise kural doğrudur.* $2(n+2)+n(n+1)=2n+4+n^2+n=n^2+3n+4$ *olur.* $(n+2)^2-n=n^2+4n+4-n=n^2+3n+4$ *olur. O halde bunlar eşit. Demek ki kuralımız doğru.*

Bununla birlikte lineer şekil örüntü probleminde iki, kuadratik sayı örüntü probleminde bir ve kuadratik şekil örüntü probleminde ise iki öğretmen adayı figural kontrol yoluyla doğrulama yaparak genellemelerini gerekçelendirmişlerdir. Öğretmen adayları bu doğrulama çeşidini, elde ettikleri kuralın şekil, resim vb. figuraller yardımıyla doğru ve yanlış olduğunu kontrol etmek için kullanmışlardır. Burada amaç bir sonraki adımda oluşacak yeni durumu yinelemeli olarak şekil, resim vb. yardımıyla belirlemeye çalışmaktır. örüntünün kuralının geçerliliğini doğrulama yoluyla gerekçelendirmiştir. Örneğin ÖA4 öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi lineer şekil örüntüsünü sayı dizisi örüntüsüne çevirerek elde ettiği 2n+3 kuralının doğruluğu gerekçelendirirken, ilk sekiz terim için sayısal değerler bulmuş, ardından yinelemeli olarak şekil örüntüsünü devam ettirmiş ve en sonunda şekillerin sayısal değerlerle uyumlu olduğunu tespit etmiştir.




## *Açıklama Yoluyla Gerekçelendirme*

Öğretmen adayları gerekçelendirmelerini açıklama yoluyla iki şekilde yapmıştır: Elde ettiği genelleme ile ilgili kuralın (varsayılan kuralın) niçin yanlış olduğu konusunda geçerli bir açıklama yaparak gerekçelendirme yapanlar, elde ettiği genelleme ile ilgili (varsayılan) kuralın niçin doğru olduğu konusunda geçerli bir açıklama yaparak gerekçelendirme yapanlar. Açıklama yoluyla gerekçelendirmenin her iki çeşidini kullanan öğretmen adaylarının sayısı dört iken, bu öğretmen adayları dört farklı örüntü problemine göre eşit dağılmışlardır. Yani aynı öğretmen adayları bu gerekçelendirme türünü kullanmışlardır. ÖA12 öğretmen adayı kuadratik şekil örüntüsü için 6n+2 şeklinde doğrusal bir kural elde etmişlerdir. Bu kuralın geçerli olup olmadığı ile ilgili öğretmen adayından gerekçelendirme yapması istenmiş ve öğretmen adayı kuralın yanlışlığını şöyle doğrulamıştır:

*ÖA12: ...Değerleri sıralı çiftler olarak düşünürsek (1, 8), (2, 14), (3, 22),… Yazdığımız kurala göre bunların doğrusal olması gereklidir… O halde bunların eğimleri eşit olmalı, ancak (14-8/2-1=6, 22-14/3-2=8) eğimler eşit değil o halde kural yanlış olmalı…*

ÖA5 öğretmen adayı ise lineer şekil örüntüsü için bulmuş olduğu 2n+3 kuralının niçin doğru olduğunu gerekçelendirirken aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

ÖA5: *....Düzgün altıgenlerin her seferinde iki artar, o halde 2n+3 kuralını (2n+1)+2 yazarsak Tek sayı + 2 olur. Tek sayılar 1 den başlar ve örüntü ilk terimi 5 tek sayısı ile başladığına ve devamı da 7, 9, 11, ... şeklinde gittiğine göre [tek sayı+2 = (2n+1)+2= 2n+3] ifadeleri bu duruma uymaktadır. O halde kural doğrudur…*

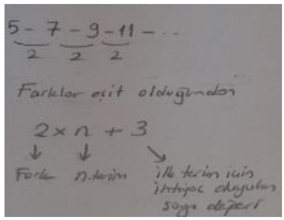
ÖA6 öğretmen adayının da kuadratik şekil örüntü problemi için elde ettiği $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$ şeklindeki kuralın niçin doğru olduğu ile ilgili gerekçelendirmesi şöyledir:

*ÖA6:… Birinci terim 8 olduğu için ikinci terim 14 olur, ikinci terim 14 ise üçüncü terim 22 olur, zaten elde edilen üç değere karşılık gelen karelerin sayısı aynıdır…*

### *Dışsal Bilgi Kaynağına Dayandırarak Gerekçelendirme*

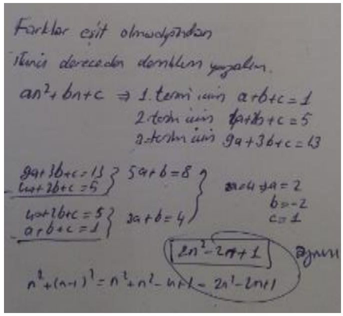
Dışsal bir bilgi kaynağına dayandırılarak yapılan gerekçelendirmeler bu çalışmada ikiye ayrılmıştır: Önceden bildiği formüller yardımıyla kontrol, otorite (ders kitabı, öğretmen vb.) bilgisine dayandırarak kontrol. Öğretmen adaylarının dördü sadece lineer sayı ve şekil örüntü problemlerinde elde ettikleri genellemeleri gerekçelendirirken önceden aşina oldukları formülleri veya kuralları kullanmışlardır. Bu öğretmen adayları tıpkı içeriksel stratejiyi kullanan öğretmen adayları gibi akıl yürüterek değil sadece önceden bildikleri ezbere bir formül ve kurallardan yararlanarak varsayılan kuralı gerekçelendirmeye çalışmışlardır. Örneğin ÖA10 öğretmen adayı lineer şekil örüntüsü probleminde düzgün altıgenlerin diziliş düzeninden yararlanarak 2n+3 şeklinde bir kural oluşturmuştu. Bu öğretmen adayı formülün doğruluğunu gerekçelendirirken önceden bildiği formülün işe yarayacağını şöyle belirtmiş:

*ÖA10: Aslında bu formül her zaman işe yarıyor ama ezber olduğundan çokça tercih etmiyor. Ancak bulduğum 2n+3 kuralının doğruluğunu gerekçelendirirken işe yarar. [A: Nasıl bir formül?]… Şöyle ki şekil örüntüsünü sayı örüntüsü şeklinde yazarsak 5, 7, 9, 11, … olur. Aradaki farklar eşit ve 2 olur. O halde fark ile n çarpılır ve ilk terim için ihtiyaç duyulan sayı eklenir. O halde 2n+3 olur. O halde bulduğum kural doğru.*

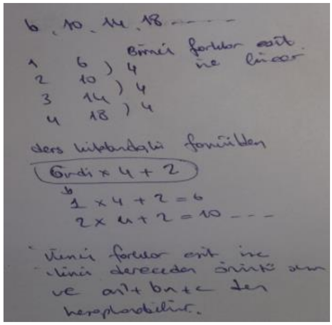



ÖA7 ve ÖA10 öğretmen adayları ise otorite (ders kitabı, öğretmen vb.) bilgiye dayandırarak genellemelerinin doğruluğunu kontrol etmişlerdir. Bu gerekçelendirmeyi tercih eden öğretmen adayları sorgulama yapmaksızın ders kitabı, öğretmen gibi bir otoriteye dayandırarak varsayılan kuralın doğruluğunu gerekçelendirmişlerdir. Örneğin ÖA7 öğretmen adayı kuadratik sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne çevirerek elde ettiği $n^2 + (n-1)^2$ kuralının doğruluğunu daha önceden ders hocasının öğrettiği ikinci dereceden bir formül yardımıyla gösterebileceğini ifade etmiş ve aşağıdaki açıklamayı sunmuştur:

*ÖA7: … Daha önceden ders hocalarımdan biri, eğer aradaki farklar eşit değilse $an^2 + bn + c$ şeklinde ikinci dereceden genel bir denklem yazarak, $n = 1, 2, 3$ değerleri için ilk üç terime karşılık gelecek üç denklem oluşturarak bu tür örüntüleri çözebileceğimi söylemişti. Şimdi bunu deneyelim…. Birinci terim için n yerine 1 yazarsak a + b + c = 1 olur. İkinci terim için, 2 yazarsak 4a + 2b + c = 5 olur. Üçüncü terim için 3 yazarsak 9a + 3b + c = 13 olur. Üçüncü denklem ile ikinci denklemi ve birinci denklem ile ikinci denklemi ortak çözersek $a = 2, b = -2$ ve $c = 1$ olur… O halde kural $2n^2 - 2n + 1$ olur. Şekillerin dizilişinden yararlanarak elde ettiğim $n^2 + (n-1)^2$ ifadesini düzenlersem $n^2 + n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - 2n + 1$ elde ederiz. O halde doğru yapmışım.*




ÖA10 öğretmen adayı ise terim ile terim sayısı arasındaki ilişkiden yola çıkarak oluşturduğu 4n+2 kuralını doğrulamada, özel öğretim yöntemleri dersi için ihtiyaç duyduğu bir konuyu araştırırken kaynak bir kitapta rasgeldiği ifade etmiştir. Bu öğretmen adayı lineer ve kuadratik örüntü problemlerinin çözümleri için daima geçerli olan kurallar olduğunu belirtmiş ve bu kurallardan biri ile gerekçelendirmesini yapmıştır. Öğretmen adayı yandaki şekildeki gibi birinci farkların eşit olması durumunda örüntünün lineer, ikinci farkların eşit olması durumunda ise örüntünün kuadratik olacağını belirtmiş ve her iki örüntü çeşidi için kitapta yer alan formüllerin geçerli olduğunu ifade etmiştir. ÖA10 öğretmen adayı dışsal kaynak alan bir kitaptan yararlanarak "Girdi × 4 + 2" şeklinde bir formül ile genellemenin doğruluğunu gerekçelendirmiştir.




Gerekçelendirme türlerinin frekans (F) ve toplam (∑) değerlerinin farklı örüntü problemlerine göre dağılımları ise Tablo 5'deki gibidir.

. Bununla birlikte On iki öğretmen adayının sunduğu gerekçelendirmelerin farklı örüntü problemlerine göre dağılımı Tablo 6'da sunulmuştur

**Tablo 5.** Gerekçelendirme çeşitlerinin farklı örüntü problemlerine göre frekans (F) ve toplam (∑) değerlerinin dağılımları

| **Gerekçelendirme çeşitleri** | | **Lineer Örüntü Problemleri** | | | | **Kuadratik Örüntü Problemleri** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Sayı** | | **Şekil** | | **Sayı** | | **Şekil** | |
| | | **F** | **∑** | **F** | **∑** | **F** | **∑** | **F** | **∑** |
| Doğrulama Yoluyla | Sayısal kontrol | 7 | 7 | 5 | 7 | 6 | 8 | 5 | 8 |
| | Cebirsel kontrol | - | | - | | 1 | | 1 | |
| | Figural kontrol | - | | 2 | | 1 | | 2 | |
| Açıklama Yoluyla | Niçin yanlış? | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| | Niçin doğru? | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | |
| Dışsal Bilgi Yoluyla | Önceki bilgi | 2 | 3 | 2 | 3 | - | 1 | - | 1 |
| | Otorite bilgi | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | |
| Gerekçelendirme yapmayan | | - | | - | | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Tablo 6.** On iki öğretmen adayının dört farklı problem için sunduğu gerekçelendirmeler

| | **Lineer Örüntü Problemleri** | | **Kuadratik Örüntü Problemleri** | |
|---|---|---|---|---|
| | **1.Problem (Sayı)** | **2.Problem (Şekil)** | **3.Problem (Sayı)** | **4.Problem (Şekil)** |
| **ÖA1** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) |
| **ÖA2** | Açıklama (Yanlış) | Açıklama (Doğru) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Figural) |
| **ÖA3** | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | (Yanlışlığı) Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) |
| **ÖA4** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Figural) | Doğrulama (Figural) | Doğrulama (Figural) |
| **ÖA5** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) |
| **ÖA6** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Figural) | Açıklama (Doğru) | Açıklama (Doğru) |
| **ÖA7** | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Kitabı) | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Kitabı) | Doğrulama (Cebirsel) | Doğrulama (Cebirsel) |
| **ÖA8** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) |
| **ÖA9** | Açıklama (Doğru) | (Yanlışlığı) Doğrulama (Sayısal) | Açıklama (Yanlış) | (Yanlışlığı) Doğrulama (Sayısal) |
| **ÖA10** | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Hocası) | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Hocası) |
| **ÖA11** | (Yanlışlığı) Doğrulama (Sayısal) | Açıklama (Yanlış) | Gerekçelendirme Yapmamış | Açıklama (Yanlış) |
| **ÖA12** | Doğrulama (Sayısal) | Doğrulama (Sayısal) | (Yanlışlığı) Doğrulama (Sayısal) | Gerekçelendirme Yapmamış |

Tablo 5 ve Tablo 6 incelendiğinde öğretmen adaylarının çoğu doğrulama yoluyla gerekçelendirmeyi kullanmıştır. Öğretmen adayları doğrulama yoluyla gerekçelendirmenin daha çok sayısal kontrol çeşidini tercih etmişlerdir. Öğretmen adaylarının çoğu bu gerekçelendirme çeşidini daha çok, genelleme ile ilgili kuralın elde edilmesinden sonra belirli adımlar için sayısal değerler vererek bu kuralın doğruluğunu gerekçelendirme maksadıyla yapmışlardır. Araştırmacılarda genel olarak sayısal kontrolle doğrulama yoluyla gerekçelendirme yapıldığına vurgu yapmışlardır (Harel & Sowder, 2007; Kirwan, 2015; Lannin, 2005). Fakat öğretmen adaylarının çok azı cebirsel ve figural kontrol yoluyla genellemelerinin doğruluğunu gerekçelendirmişlerdir. Yani varsayılan ya da elde edilen bir kuralı sembolik olarak manipüle ederek daha önce geçerli olan bir kuralla eşleşecek şekilde doğrulamaya çalışan öğretmen adayları ile şekil, resim, vb. figuraller kullanarak doğrulama yapan öğretmen adaylarının sayası daha azdır. Kirwan (2015) göre literatürde cebirsel kontrol ile doğrulama çok fazla yer almamaktadır. Nitekim bu çalışmada da cebirsel kontrol yoluyla doğrulama yapan bir öğretmen adayı (ÖA7) vardır. Kirwan (2015) göre bu doğrulama çeşidi dönüşümsel kanıt şemasına (Harel & Sowder, 2007) benzer olmakla birlikte biraz daha farklıdır.

Bununla birlikte diğer bir gerekçelendirme çeşidi olan açıklamayı öğretmen adayları doğrulamaya göre daha az kullanılmıştır. Mevcut bilginin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek amacıyla kullanılan açıklama yoluyla gerekçelendirmeyi (Becker & Rivera, 2003, 2007; Lannin, 2003), öğretmen adaylarının bazıları varsayılan ya da elde edilen kuralın niçin yanlış veya niçin doğru olduğu ile ilgili kullanmışlardır. Öğretmen adayları açıklamalarını daha çok sayısal değerler ile yapmış olmalarına rağmen, literatürde açıklamaların daha çok figuraller yardımıyla yapıldığına dair çalışmalar da mevcuttur (Kirwan, 2013, 2015).

Ayrıca dışsal bir bilgi kaynağı yoluyla gerekçelendirme yapan öğretmen adayları da vardır. Bu öğretmen adayları herhangi bir otoriteye dayandırarak (ders kitabı, ders hocası, vb.) veya kendi ön bilgilerini dikkate alarak gerekçelendirmelerini yaparak elde ettikleri kuralların doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Bununla birlikte ÖA11 ve ÖA12 öğretmen adayları kuadratik örüntü problemlerinde herhangi bir gerekçelendirme yapmamışlardır.

### 3.3. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının farklı örüntü problemlerinde kullandıkları stratejiler ile sundukları gerekçelendirme çeşitleri arasındaki ilişki

Araştırmadan elde edilen diğer bulgular ise genelleme stratejileri ile gerekçelendirme çeşitleri arasındaki ilişki veya etkileşimle ilgilidir. Çalışmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının dört farklı örüntü probleminde kullandıkları stratejiler ile sundukları gerekçelendirme çeşitleri arasındaki bağlantılara vurgu yapılmıştır. Bu bağlamda genelleme stratejilerini, sunulan gerekçelendirme çeşitlerini ve öğretmen adaylarının bu iki değişkene göre dağılımlarını içeren veriler Tablo 7 de sunulmuştur.

Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları, genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adaylarına göre daha fazla gerekçelendirme sunmuşlardır. Lineer örüntü problemlerinde tüm öğretmen adayları herhangi bir türde gerekçelendirme yapmış iken, kuadratik örüntü problemlerinde ise Ö11 ve Ö12 öğretmen adayları birer problem türünde gerekçelendirme yapmamışlardır. Genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adayları daha çok sayısal kontrol yoluyla veya kuralın niçin yanlış olduğunu açıklama yoluyla gerekçelendirmelerini yapmışlardır. Genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adayları cebirsel ve figural kontrol yoluyla doğrulama çeşitlerini hiç kullanmamışlardır. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları ise daha çok sayısal kontrol yoluyla doğrulama yaparak gerekçelendirmelerini yapmışlardır. Öğretmen adayları dört farklı örüntü probleminde genel olarak sayısal kontrol ile elde ettiği kuralı doğrulama yoluna gitmişken, sayı örüntü problemlerine göre şekil örüntü problemlerinde cebirsel ve figural kontrol ile doğrulamaları az da olsa daha fazla kullanmışlardır. Özellikle ÖA4 ve ÖA7 öğretmen adayları cebirsel ve figural kontrol ile doğrulama çeşidini diğer öğretmen adaylarına göre daha çok tercih etmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları şekil örüntü problemlerinde daha çok figural gösterimlerden yararlanmışlardır. Literatürde figural gösterimlerle doğrulama arasında sıkı bir ilişki olduğu ifade edilmesine (Rivera & Becker,

**Tablo 7.** Genelleme stratejileri ve gerekçelendirme çeşitlerinin dağılımları

| | | Doğru genellemeye ulaşanlar | | | | Yanlış genellemeye ulaşanlar | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stratejiler | | Fonksiyonel | İçeriksel | Yinelemeli | Tahmin-Kontrol | Yinelemeli | Tahmin-Kontrol |
| 1.Problem (Lineer sayı örüntüsü) | Doğrulama (Sayısal) | Ö1, Ö5, Ö8,Ö12 | Ö4, Ö6 | | --- | --- | Ö11 |
| | Açıklama (Yanlış) | --- | --- | | --- | Ö2 | --- |
| | Açıklama (Doğru) | --- | --- | | Ö9 | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | Ö3, Ö10 | --- | | --- | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Kitabı) | Ö7 | --- | | --- | --- | --- |
| 2.Problem (Lineer şekil örüntüsü) | Doğrulama (Sayısal) | Ö1, Ö5, Ö8,Ö12 | --- | | | Ö9 | --- |
| | Doğrulama (Figural) | Ö4 | Ö6 | | | --- | --- |
| | Açıklama (Yanlış) | --- | --- | | | --- | Ö11 |
| | Açıklama (Doğru) | --- | Ö2 | | | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Önceki bilgi) | Ö3, Ö10 | --- | | | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Kitabı) | Ö7 | --- | | | --- | --- |
| 3.Problem (Kuadratik sayı örüntüsü) | Doğrulama (Sayısal) | Ö1, Ö5, Ö8 | Ö2 | Ö12 | | --- | Ö3 |
| | Doğrulama (Cebirsel) | Ö7 | --- | --- | | --- | --- |
| | Doğrulama (Figural) | --- | Ö4 | --- | | --- | --- |
| | Açıklama (Yanlış) | --- | --- | --- | | Ö9 | --- |
| | Açıklama (Doğru) | --- | --- | Ö6 | | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Hocası) | Ö10 | --- | --- | | --- | --- |
| 4.Problem (Kuadratik şekil örüntüsü) | Doğrulama (Sayısal) | Ö1, Ö3, Ö5, Ö8 | --- | --- | | --- | Ö9 |
| | Doğrulama (Cebirsel) | --- | Ö2, Ö4 | --- | | --- | --- |
| | Doğrulama (Figural) | Ö7 | --- | --- | | --- | --- |
| | Açıklama (Yanlış) | --- | --- | --- | | Ö11 | --- |
| | Açıklama (Doğru) | --- | --- | Ö6 | | --- | --- |
| | Dışsal bilgi (Otorite-Ders Hocası) | Ö10 | --- | --- | | --- | --- |

2003; Stacey, 1989) rağmen, bu çalışmada daha çok sayısal gösterimlerle doğrulama arasında daha sıkı bir ilişki bulunmuştur. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları daha çok fonksiyonel strateji çeşidini ve sayısal kontrol ile doğrulama gerekçelendirme çeşidini kullanmışlardır. Bu ilişki literatürdeki farklı çalışmalarda da açıklanmıştır (Kirwan, 2013, 2015; Rivera & Becker, 2003). Yani öğretmen adayları fonksiyonel strateji ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken doğrulamadan çokça yararlandıkları, yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejileri ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken ise doğrulamaya kıyasla açıklamadan daha çok yararlandıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adayları kuadratik örüntü problemlerine göre lineer örüntü problemlerinde dışsal bilgi kaynağı ile doğrulama yoluyla gerekçelendirmeyi daha çok tercih etmişlerdir. Bu tür gerekçelendirme yapanlar daha çok önceki bilgilerinden kalan veya bir kaynak ders kitabında bulunan veya ders hocasından öğrendiği aşina bir formül ile bunu gerçekleştirmişlerdir. Özellikle dışsal bir kaynak yoluyla gerekçelendirme fonksiyonel stratejilerle daha çok ilişkili bulunmuştur.

Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları, genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adaylarına göre daha fazla gerekçelendirme sunmuşlardır. Lineer örüntü problemlerinde tüm öğretmen adayları herhangi bir türde gerekçelendirme yapmış iken, kuadratik örüntü problemlerinde ise Ö11 ve Ö12 öğretmen adayları birer problem türünde gerekçelendirme yapmamışlardır. Genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adayları daha çok sayısal kontrol yoluyla veya kuralın niçin yanlış olduğunu açıklama yoluyla gerekçelendirmelerini yapmışlardır. Genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adayları cebirsel ve figural kontrol yoluyla doğrulama çeşitlerini hiç kullanmamışlardır. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları ise daha çok sayısal kontrol yoluyla doğrulama yaparak gerekçelendirmelerini yapmışlardır. Öğretmen adayları dört farklı örüntü probleminde genel olarak sayısal kontrol ile elde ettiği kuralı doğrulama yoluna gitmişken, sayı örüntü problemlerine göre şekil örüntü problemlerinde cebirsel ve figural kontrol ile doğrulamaları az da olsa daha fazla kullanmışlardır. Özellikle ÖA4 ve ÖA7 öğretmen adayları cebirsel ve figural kontrol ile doğrulama çeşidini diğer öğretmen adaylarına göre daha çok tercih etmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları şekil örüntü problemlerinde daha çok figural gösterimlerden yararlanmışlardır. Literatürde figural gösterimlerle doğrulama arasında sıkı bir ilişki olduğu ifade edilmesine (Rivera & Becker, 2003; Stacey, 1989) rağmen, bu çalışmada daha çok sayısal gösterimlerle doğrulama arasında daha sıkı bir ilişki bulunmuştur. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları daha çok fonksiyonel strateji çeşidini ve sayısal kontrol ile doğrulama gerekçelendirme çeşidini kullanmışlardır. Bu ilişki literatürdeki farklı çalışmalarda da açıklanmıştır (Kirwan, 2013, 2015; Rivera & Becker, 2003). Yani öğretmen adayları fonksiyonel strateji ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken doğrulamadan çokça yararlandıkları, yinelemeli ve tahmin-kontrol stratejileri ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken ise doğrulamaya kıyasla açıklamadan daha çok yararlandıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adayları kuadratik örüntü problemlerine göre lineer örüntü problemlerinde dışsal bilgi kaynağı ile doğrulama yoluyla gerekçelendirmeyi daha çok tercih etmişlerdir. Bu tür gerekçelendirme yapanlar daha çok önceki bilgilerinden kalan veya bir kaynak ders kitabında bulunan veya ders hocasından öğrendiği aşina bir formül

ile bunu gerçekleştirmişlerdir. Özellikle dışsal bir kaynak yoluyla gerekçelendirme fonksiyonel stratejilerle daha çok ilişkili bulunmuştur.

## 4. Sonuçlar ve Öneriler

Öğretmen adaylarının çoğunluğu farklı tipteki örüntü problemlerine yönelik en az bir strateji geliştirmiş veya geliştirmeye çalışmışlardır. Özellikle öğretmen adayları içerisinde en yaygın kullanılan strateji türü fonksiyonel stratejidir. Doğru bir kural oluşturmada fonksiyonel stratejiyi kullanan öğretmen adayları diğer stratejileri kullananlara göre daha başarılı olmuşlardır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının kullandığı diğer stratejiler ise içeriksel, yinelemeli (eklemeli), tahmin-kontrol ve karma stratejilerdir. Ancak fonksiyonel ve içeriksel stratejiler haricindeki stratejileri tercih eden öğretmen adaylarının çoğunluğu sembolik bir genelleme yapamamışlardır. Öğretmen adayları lineer örüntü problemlerinde kuadratik örüntü problemlerine göre daha başarılı genellemeler yapmışlardır. Ek olarak öğretmen adayları örüntü genelleme sürecinde sayısal ve figural (şekil, diyagram ve diğer görseller) gösterimlerden çokça yararlanmışlardır. Ancak sayısal gösterimlerden yararlanan öğretmen adaylarının sayısı diğer gösterimlerden yararlanılanlara göre daha fazla olmasına rağmen, figural (şekil, diyagram ve diğer görseller) gösterimlerden yararlanan öğretmen adayları genelleme yapmada daha başarılı olmuşlardır.

Öğretmen adaylarının çoğu doğrulama yoluyla gerekçelendirmeyi ve bu gerekçelendirmenin ise daha çok sayısal kontrol türünü kullanmışlardır. Ancak öğretmen adaylarının çok azı cebirsel ve figüral kontrol yoluyla genellemelerinin doğruluğunu gerekçelendirmişlerdir. Bununla birlikte diğer bir gerekçelendirme çeşidi olan açıklamayı öğretmen adayları doğrulamaya göre daha az kullanılmıştır. Öğretmen adayları açıklamalarını daha çok sayısal gösterimler yardımıyla yapmışlardır. Ayrıca dışsal bir bilgi kaynağı yoluyla gerekçelendirme yapan öğretmen adayları da vardır. Bu öğretmen adayları herhangi bir otoriteye dayandırarak (ders kitabı, ders hocası, vb.) veya kendi ön bilgilerini dikkate alarak gerekçelendirmelerini yapmış ve elde ettikleri kuralların doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır.

Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adaylarına göre daha fazla gerekçelendirme sunmuşlardır. Lineer örüntü problemlerinde tüm öğretmen adayları herhangi bir gerekçelendirme yapmış iken, kuadratik örüntü problemlerinde ise iki öğretmen adayı gerekçelendirme yapmamışlardır. Genelleme yapmaya çalışan veya hiçbir girişimde bulunmayan öğretmen adayları daha çok sayısal kontrol yoluyla ya da kuralın niçin yanlış olduğunu açıklama yoluyla da gerekçelendirme yapmışlar, ancak cebirsel ve figural kontrol yoluyla gerekçelendirme çeşitlerini hiç kullanmamışlardır. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları ise daha çok sayısal kontrol yoluyla doğrulama yaparak gerekçelendirmelerini sunmuşlardır. Öğretmen adayları dört farklı örüntü probleminde genel olarak sayısal kontrol ile elde ettiği kuralı doğrulama yoluna gitmişken, sayı örüntü problemlerine göre şekil örüntü problemlerinde cebirsel ve figural kontrol ile doğrulamaları az da olsa daha fazla kullanmıştır. Ayrıca öğretmen adayları şekil örüntü problemlerinde daha çok figural gösterimlerden yararlanmışlardır. Doğru genellemeye ulaşan öğretmen adayları daha çok fonksiyonel strateji çeşidini ve sayısal kontrol ile doğrulama gerekçelendirme çeşidini kullanmışlardır. Yani öğretmen adayları fonksiyonel strateji ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken doğrulamadan çokça yararlandıkları, yinelemeli ve tahmin kontrol stratejileri ile oluşturdukları kuralları gerekçelendirirken ise doğrulamaya kıyasla açıklamadan daha çok yararlandıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte öğretmen adayları kuadratik örüntü problemlerine göre lineer örüntü problemlerinde dışsal bilgi kaynağı ile doğrulama yoluyla gerekçelendirmeyi daha çok tercih etmişlerdir. Özellikle çalışmada dışsal bir kaynak yoluyla gerekçelendirme ile fonksiyonel stratejiler arasında daha fazla ilişki tespit edilmiştir.

Literatürde genelleme ile gerekçelendirme arasında ilişki olduğuna vurgu yapan (Ellis, 2007a, 2007b; Lannin, 2005; Radford, 1996) ve bu ilişkiyi sadece kuadratik örüntü problemlerinde inceleyen çalışmalar (Kieran, 2007; Kirwan, 2015; Vaiyavutjamai & Clements, 2006) olmasına rağmen, genelleme ile gerekçelendirmeyi etkileşimli olarak farklı örüntü çeşitleri ile inceleyen çok az çalışma (Kirwan, 2015; Richardson, Berenson & Staley, 2009) vardır. Sonuç olarak bu çalışma, öğretmen adaylarının genelleme yaparken kullandıkları stratejiler ile kullandıkları gerekçelendirme türleri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı amaçlamış ve literatüre katkı sağlamıştır.

Bu bağlamda öğretmen adaylarına farklı örüntü problemlerini içeren etkinlikler verilerek farklı stratejiler geliştirmelerine izin verilmelidir. Farklı örüntü problemlerini genelleme sadece aritmetikten cebir'e geçişin değil, aynı zamanda cebirsel düşünmenin de önemli göstergelerinden biridir (Blanton & Kaput, 2011; Lee, 1996) ve erken yaşlardaki öğrencilerin cebirsel düşünme yeteneklerini geliştirmektedir. O halde öğretmen adaylarına farklı örüntü problemlerini genellemede ve farklı çözüm stratejilerini tanımlamada fırsatlar sağlanması, ileride eğitim verecekleri öğrencilerin daha sonraki cebir öğrenimi için önemlidir. Ayrıca öğrencilerin gerekçelendirme ile ilgili sınırlı bilgiye sahip olmalarından (Becker & Rivera, 2007; Lannin, 2003) dolayı, öğretmen adaylarının gerekçelendirme ile ilgili öğrencilerin düşüncelerini yorumlamak ve anlamak için farklı gerekçelendirme çeşitleriyle karşılaştırılması gerekmektedir. Unutulmamalıdır ki, öğretmenler gerekçelendirmenin varlığından habersizse ve öğrencileri kendi gerekçelendirmelerini ifade etmede alışkanlık edinmemişse, bu durum matematiksel düşünmeyi etkilemektedir.

# Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Generalization Processes of Patterns: Strategies and Justifications

## Extended Abstract

Generalization is the essence of doing mathematics. Thus, many mathematics educators have dealt with patterns from different points of view and agreed on the idea that discovering and generalizing patterns are important for learning mathematics. They have also expressed that the study of patterns could improve students' algebraic concepts at early ages, and contribute to that algebraic thinking required in future learning (English & Warren, 1998; Lannin, 2003; Orton & Orton, 1999; Zazkis & Liljedahl, 2002). Lee (1996) stated, "algebra, and indeed all of mathematics is about generalizing patterns (p.103)". Zazkis and Liljedahl (2002) agreed, stating, "patterns are the heart and soul of mathematics (p.379)". Based upon this assumption, it is vital that all students experience and develop their ability to generalize during their study of mathematics. This vital component of mathematics implies the necessity for teachers to be aware of generalization and to be prepared to interpret and understand students' thinking about generalization. Mason (1996) commented that "generalization is the heartbeat of mathematics, and appears in many forms. If teachers are unaware of its presence, and are not in the habit of getting students to work at expressing their own generalizations, then mathematical thinking is not taking place (p.65)." Even though it may be difficult for teachers to interpret and understand the generalization of the students, they must be able to understand student thinking about generalization to be able to support and encourage mathematical growth in their students (Kirwan, 2015). According to Maher and Davis (1990), unfortunately, interpreting and understanding student thinking is difficult for many teachers. This implies that both teachers and pre- service teachers should be prepared to give support student thinking about generalization. Teachers and pre- service teachers' understanding of generalization alone is inadequate justification is the inseparable twin of generalization (Lannin, 2005). Radford (1996) stated that justification is the process that supports generalization and Ellis (2007a) interpreted that engaging in justification effects a student's ability to generalize. In addition to, Lannin (2005) stated that having students justify can ensure a medium for teachers to understand student generalizations. Teachers and pre-service teachers understanding and promotion of student justification can assist them understand student generalization. Noted differently, teachers and pre-service teachers who will be teachers of your future must also be able to comment and understand how students justify their generalizations, intercalary how students make generalizations. Therefore, the aim of this study is to investigate the generalizations created by pre-service elementary mathematic teachers, to explore the justifications predicted for their generalizations, and to determine any relationships between generalization and justification.

Since the aim of this study is to investigate the generalizations created by pre-service elementary mathematic teachers, to explore the justifications predicted for their

generalizations, and to determine any relationships between generalization and justification, the study is designed as qualitative research. Because qualitative researchers try to make sense of actions (Creswell, 2013). This study was carried out within the scope of the "phenomenology" design, which is one of the qualitative research methods. Phenomenology studies are usually intended to reveal and interpret individual perceptions or perspectives of a particular phenomenon. Because, phenomenology is an appropriate research area for studies that are not entirely foreign to us at the same time but which aim to investigate phenomena that we cannot fully grasp (Yıldırım & Şimşek, 2013). The study was conducted by the 4th grade students/pre-service teachers who are studying in a department of Elementary Mathematics Teaching at a university located in the Eastern Black Sea region. Twelve students were selected from these students with the help of the participant selection questionnaire, and these students were interviewed. In the study, the data were collected using structured interview forms with four open-ended questions. Literature was used in the selection of problems, and opinions of specialist faculty members in the field of mathematics education were also taken. Problems are linear and quadratic pattern problems that pre-service teachers can easily answer. In order to determine the strategies and justification types in which pre-service teachers use different pattern problems in their generalization; clinical interviews were conducted through structured interview forms with pre-service teachers. After each interview was made and recorded, a transcript was made. Data collected in this study were analysed using descriptive analysis technique. The obtained data were classified and analysed by taking into consideration the pattern generalization strategies and the justification types in the previous studies in the literature.

The majority of pre-service elementary mathematics teachers have developed or have tried to develop at least one strategy for different types of pattern problems. The type of strategy most commonly used by pre-service elementary math teachers is functional (explicit) strategy. Pre-service elementary math teachers who use functional (explicit) strategies to create a correct rule have been more successful than those using other strategies. However, other strategies used by pre-service teachers are contextual, recursive, guessing and checking and mixed strategies. However, the majority of pre-service teachers who prefer other strategies outside functional (explicit) and contextual strategies have not made a symbolic generalization. Pre-service teachers performed more successful generalizations in linear pattern problems than quadratic pattern problems. In addition, pre-service teachers have benefited much from numerical and figural (figure, diagram and other visual) representations in the pattern generalization process. However, even though the number of pre-service teachers using numerical representations is higher than the number of prospective teachers using other representations, prospective teachers using figural (figure, diagram and other visuals) representations have been more successful in generalizing. Most of the teacher candidates used justification through verification (this justification has used more numerical control). However, very few of the pre-service teachers have justified the validity of their generalizations by algebraic and figurative control. Pre-service teachers are less used explanation the other justification type and they made more explanations with the help of numerical representations. There are also pre-service teachers who make justification through external knowledge sources. They have justified them based on any authority or taking into account their previous knowledge, and have tried not to show the correctness of the rules they have obtained. Pre-service teachers who have reached the right generalities have offered more justification than pre-service teachers who have reached the wrong generalities or have not made any attempt. While all of the pre-service teachers made any justification for the linear pattern problems, the two pre-service teachers did not justify the quadratic pattern problems. Pre-service teachers who are trying to generalize or have no attempt have justified by numerical control or by explaining why the rule is wrong, but they have never used any kind of justification by algebraic and figural control. Pre-service teachers who have reached the right generalizations have offered more justification by verifying through numerical control. Also, pre-service teachers have benefited more from figural displays in shape pattern problems. Pre-service teachers who attained correct generalizations have used more functional strategies, and verifications via numerical control. However, they prefer to justify by means of external knowledge sources in linear pattern problems according to quadratic pattern problems. In the study, more relationships were established between the justifications by external knowledge sources and functional strategies.

## Kaynaklar/References

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *BOLEMA, 27*(47), 703-732.

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Education and Science*, *37*(165), 104-120.

Akturan, U. ve Esen, A. (2008). *Nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Amit, M., & Neria, D. (2008). Rising to the challenge: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 111-129.

Armstrong, B. E. (1995). Teaching patterns, relationships and multiplication as worthwhile mathematical tasks. *Teaching Children Mathematics, 1,* 446-450.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics teachers and children* (pp. 216–235). London: Holdder & Stoughton.

Becker, J., & Rivera, F. (2003). Research on gender and mathematics from multiple perspectives. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol.1, p. 190). Hawaii: University of Hawaii.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95-101). Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2007). Factors affecting seventh graders' cognitive perceptions of patterns involving constructive and deconstructive generalizations. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Procedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 129-136). Seoul: PME.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra.* London: Kluwer Academic Publisher.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23–40.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5–23). Heidelberg, Germany: Springer.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2010). Generalisation and perceptual agility: how did teachers fare in a quadratic generalising problem?. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 71-72.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev. Ed.). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' beliefs structures and their influence on instructional practices. *J Math Teacher Education*, *12*, 325-346.

Çepni, S. (2010). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (5. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Çilingir, E. ve Yanpar-Yelken, T. (2016). Sınıf öğretmenleri adayları ile sınıf öğretmenlerinin şekil örüntüleri konusundaki alan bilgilerinin karşılaştırılması. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, *3*(4), 1-16.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63–85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Children Development, 78,* 296-308.

Ellis, A. B. (2007a). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194–229.

Ellis, A. B. (2007b). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflective generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, *912*, 166–170.

Feifei, Y. (2005). *Diagnostic assessment of urban middle school student learning of pre-algebra patterns* (Unpublished doctoral dissertation), Ohio State University, USA.

Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalizing problems. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 2, pp. 289-296). Helsinki: University of Helsinki.

Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In A. Olivier & K. Karen (Eds.), *Proceeding of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). South Africa: PME.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*, 123- 128.

Karasar, N. (1996). *Bilimsel araştırma yöntemi: Kavramlar, ilkeler, teknikler* (7. Baskı). Ankara: Nobel Yayınevi.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kirwan, J. V. (2013). *Pre-service elementary teachers' anchors for generalization.* Poster session presented at the 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Chicago, IL.

Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric numerical patterning tasks* (Unpublished doctoral dissertation), Illinois State University, USA.

Krebs, A. S. (2003). Middle grade students' algebraic understanding in a reform curriculum. *School Science and Mathematics*, *103*(5), 233-243.

Kümbetoğlu, B. (2005). *Sosyolojide ve antropolojide niteliksel yöntem ve araştırma*. İstanbul: Bağlam Yayıncılık.

Lannin, J. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(7), 342-348.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *73*(7), 231-258.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). London: Kluwer Academic Publishers.

Ley, A. F. (2005). A *cross-sectional investigation of elementary school students' ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice* (Unpublished master's dissertation), Toronto University, Canada.

Maher, C. A., & Davis, R. B. (1990). Building representations of children's meanings. In R. B. Davis, C. A. Maher & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 7-18). Reston, VA: NCTM.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics 44*(1/2), 87-125.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Nathan, M. J. (2003). *Confronting teachers' beliefs about algebra development: Investigating an approach for professional development* (Technical Report No. 03- 04). Boulder, CO: University of Colorado, Institute of Cognitive Science.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104–120). Cassell, London: Continuum.

Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A, Downton, D. Gronn, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building Connections: Theory, research and practice* (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, Vol. 2, pp. 609-616). Sydney: MERGA.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün & S. B. Demir, Çev. Ed.). Ankara: Pegem Akademi.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 107–111). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Richardson, K., Berenson, S., & Staley, K. (2009). Prospective elementary teachers use of representation to reason algebraically. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(2/3), 188–199.

Rivera, F., & Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *In Mathematics Teaching in the Middle* School, *11*(4),198-203.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2003). The effects of numerical and figural cues on the induction processes of preservice elementary teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 4, pp. 63 – 70). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, *101*(1), 69-75.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.

Steele, D., & Johanning D. I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 65–90.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' pre-instructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 89–112.

Tanışlı, D. ve Olkun, S. (2009). *Basitten karmaşığa örüntüler*. Ankara: Maya Akademi.

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, *36*(160), 184-198.

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *12*(44), 255-283.

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice, 9*(3), 1453-1497.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal, 18*(1), 47–77.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(2), 141-153.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaskis, R., & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(4), 429-439.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

**Kaynak Gösterme**

Akkan, Y., Öztürk, M. ve Akkan, P. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının örüntüleri genelleme süreçleri: stratejiler ve gerekçelendirmeler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 8*(3), 513-550.

**Citation Information**

Akkan, Y., Öztürk, M., & Akkan, P. (2017). Pre-Service elementary mathematics teachers' generalization processes of patterns: strategies and justifications. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 8*(3), 513-550.