

Matematiksel Modellemede GeoGebra Kullanımı: Boy-Ayak Uzunluğu Problemi

Çağlar Naci HIDIROĞLU*, Esra Bukova-GÜZEL**

Özet

Matematiksel modelleme ile teknolojinin entegrasyonu ve modelleme sürecine teknolojinin sağladığı avantajlar günümüzün hızlı gelişen toplumunda daha önemli hale gelmektedir. Teknolojinin matematiksel modelleme sürecini nasıl etkilediği ve daha etkili nasıl kullanılabileceğine ilişkin çalışmalar önem taşımaktadır. Bu çalışmanın amacı, matematiksel modelleme sürecinde GeoGebra'nın nasıl kullanılabileceğini örnekleme. Çalışmada, matematiksel modellemeye uygun olarak tasarlanan bir problemin çözüm sürecinde GeoGebra'dan yararlanılmış ve GeoGebra'nın süreçteki kullanım amaçları açıklanmıştır. Araştırmacılar tarafından tasarlanmış Boy-Ayak Uzunluğu probleminin çözümü, yedi basamaklı matematiksel modelleme süreci dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. Çalışma ile öğretmenlerin matematiksel modelleme ile GeoGebra'yı derslerinde nasıl kullanabilecekleri örneklenmeye çalışılmıştır. GeoGebra'nın modelleme becerilerinin ortaya çıkarılmasında ve geliştirilmesinde katkı sağlayacağı ve işlemler içinde kaybolmayı önleyerek daha fazla kavramsal ve matematiksel düşüncenin ortaya çıkarılmasını sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel modelleme, GeoGebra, teknoloji destekli matematik eğitimi, deneysel modelleme.

Using GeoGebra in Mathematical Modeling: The Height-Foot Length Problem

Abstract

The integration of mathematical modeling with technology and the advantages of technology to modeling process have become more important in today's fast-growing society. The studies about how the technology affects the mathematical modeling process and how to use the technology more effectively are of importance. The purpose of this study is to illustrate how to use GeoGebra in the process of mathematical modeling. In this study, GeoGebra was used in solution process of a problem designed in accordance with mathematical modeling and the intended uses of GeoGebra were described in the mathematical modeling process. The solution of the Height-Foot Length Problem designed by the researchers was carried out taking into account the seven step modeling process. With this study, it was exemplified how the mathematics teachers will be able to use the mathematical modeling and the GeoGebra in their lessons. It is thought that GeoGebra will contribute to the uncovering and the development of modeling skills and will be provided more conceptual and mathematical thinking by preventing losing in procedures.

Key Words: Mathematical modeling, GeoGebra, technology-aided mathematics education, experimental modeling.

*Doktora Öğrencisi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, İZMİR
e-posta: caglarr.naci@gmail.com

** Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, İZMİR
e-posta: esra.bukova@gmail.com

Giriş

Son yıllardaki araştırmalar, geleneksel matematik öğrenme ve öğretme yaklaşımlarının günümüz bireylerinin ihtiyaç duyacakları problem çözme, ilişkilendirme ve akıl yürütme gibi temel matematiksel becerilerini geliştiremeyeceğini ifade etmektedir (English ve Watters, 2004; Greer, 1997; Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2006; Mousoulides, Christou ve Sriraman, 2006; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Schoenfeld, 1992; Verschaffel, De Corte ve Borghart, 1997; Zawojewski, Lesh ve English, 2003). Bu nedenle, matematik öğrenme ve öğretme uygulamalarının modern çağın talepleri doğrultusunda yeniden tanımlanmaları ve gözden geçirilmeleri gerekmektedir. Berry (2002), öğretmenlerin matematik öğretimi ve öğreniminde tartışma yaratma, uygun ve kullanışlı çalışmalar yapma, temel yetenek ve rutinleri sağlamlaştırma, bunlarla ilgili uygulamalar sağlama, gerçek yaşam problemleri çözme ve araştırmaya dayalı çalışmalar yapma olmak üzere altı önemli içeriğe yer vermeleri gerektiğini ifade etmektedir. Sözü edilen gerçek yaşam problemlerini çözme, gerçek yaşam ile matematik arasında ilişki kurmayı gerektirmektedir. Bunlar dikkate alındığında, gerçek yaşam problemlerinin çözüm sürecini içeren matematiksel modellemeye derslerde yer verilmesinin günümüz matematik öğretimi için önemli olduğu düşünülmektedir. Bu düşünceye paralel olarak, Almanya, Amerika, Avustralya, İsveç, İsviçre ve Singapur gibi çoğu ülkenin matematik öğretim programlarında (MEB; 2006; NCTM, 1979; 1989; 2000; Skolverket, 1997; Swedish Ministry Education, 1994) matematiksel modellemenin ön plana çıkan temel kavramlardan biri olduğu görülmektedir.

Matematiksel modelleme, gerçek yaşam problemlerinin çözümünü, matematiksel olmayan durumların matematikselleştirilmesini içeren; gerçek yaşam durumuna ilişkin bir matematiksel modelin inşasını, bilinmeyenlerin bulunmasını ve matematiksel modelden çıkarılan matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumuna transferini gerektiren bir süreç olarak ifade edilmektedir (Berry ve Houston, 1995; Hıdıroğlu, 2012; Peter-Koop, 2004). Galbraith, Stillman, Brown ve Edwards (2007) matematiksel modelleme sürecinde

teknoloji kullanımının öğrenciler için yaratıcı ortamlar sağlayacağını ve öğrencilerin bu süreç boyunca duruma uygun teknolojiyi kullanarak uygun modeli oluşturmalarını sağlayacağını belirtmişlerdir. Öğrenciler, öncelikle modelleme problemiyle uğraşırken gerçek bir durumun modelini kurmak için teknoloji ile birlikte bilgilerini kullanmakta ve farklı stratejiler sergileyebilmektedirler (Lingefjärd, 2000). Matematiksel modelleme sürecinin karmaşık yapısı (Lingefjärd, 2000) göz önüne alındığında teknolojinin yaratıcı bir çözüm sürecini ortaya çıkarabileceği, farklı tercihleri daha kolay değerlendirmeyi sağlayabileceği düşünülmektedir. Özellikle, 2002 yılından bu yana hızlı bir şekilde gelişmiş GeoGebra yazılımının modelleme süresine katkı sağlayacağı varsayılabilir. GeoGebra Türkçe olması, cebir, geometri ve tablo gösterimleriyle etkileşimli çalışma olanağı yaratması gibi özellikleriyle Dünya’da matematik eğitime entegrasyonda son on yıldır dikkat çeken ve kullanılmaya başlanan önemli yazılımlardan birisi haline gelmiştir. Bu doğrultuda çalışmada, bir matematiksel modelleme probleminin GeoGebra yazılımıyla entegre edilmiş kapsamlı bir çözüm raporu sunulmaktadır. Çalışma, modelleme problemi çözme stratejilerinin örneklenmesine, matematiksel modelleme sürecinin yapısına, teknolojinin derslere ve problem çözümüne entegrasyonuna ve bu tür modelleme problemlerinin nasıl kullanılabileceğine yönelik bir açıklama sunmaktadır. Çalışmada modelleme sürecinde sergilenen matematiksel düşüncelerin ve stratejilerin hem araştırmacılar hem de öğretmenler için teknoloji destekli modelleme sürecini içeren bir öğrenme tasarımı için ayrıntılı bir açıklama sunacağı düşünülmektedir. Bu şekilde çalışma, öğrencilerin “hangi becerilerinin nasıl geliştirilebileceği”, “hangi becerilerinde eksiklerinin olduğu”, “teknolojinin ve matematiksel modellemenin becerilerine etkisinin nasıl olduğu” ve “daha fazla beceriyi geliştiren ve ortaya çıkaran zengin ve daha iyi bir öğrenme ortamının nasıl tasarlanabileceği” gibi sorulara cevap oluşturabilecek bir süreci ortaya koyacaktır. Çalışmanın GeoGebra destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm sürecine ve stratejilerine yönelik ilk ve kapsamlı araştırma olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle çalışma, bu

tür problemlere yönelik yapılacak ölçme değerlendirme kriterlerini açıklaması bakımından da hem araştırmacılara, hem de öğretmenlere önemli bir bakış sağlayacaktır.

Matematiksel Modelleme ve Matematiksel Modelleme Süreci

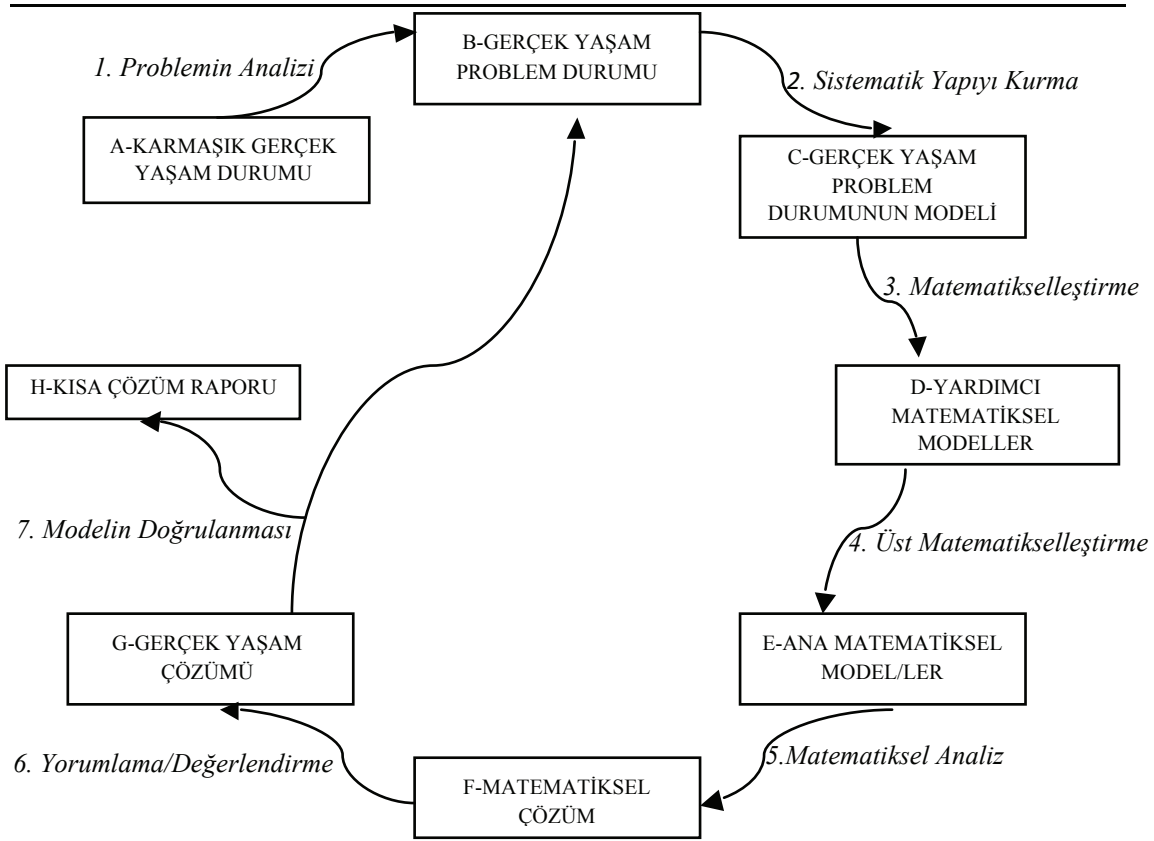
Sriraman (2005), matematiksel modellemenin bir duruma yanıt verebilmek için, ihtiyacımız olan durumun modelini oluşturma süreci olduğunu ifade ederken; Lingefjärd (2000), modellemenin bir problem durumunu açıklamak için, model oluşturma sürecinden çok daha fazlasını içeren karmaşık bir süreç olduğunu vurgulamaktadır. Matematiksel modelleme çok yönlü problem çözme sürecini (Blum ve Niss, 1989) içeren, doğrusal veya tek yönlü olmayan bir süreçtir (Stillman, Galbraith, Brown ve Edwards, 2007). Daha kapsamlı olarak, matematiksel modellemenin bir olayın gözlemlenmesi, ilişkilerin ortaya çıkarılması, matematiksel analizlerin yapılması, sonuçların elde edilmesi ve modelin tekrar yorumlanması vb. zihinsel süreçleri içerdiğini (Lingefjärd, 2000) vurgulayarak matematiksel modelleme sürecinin önemini ve görünenden karmaşık olan yapısını daha iyi ortaya koyabiliriz. Matematiksel modelleme sürecinin kapsamlı yapısının ayrıntılı analizi için, süreçte gerçekleşebilecek yaklaşımların ve düşünme aktivitelerinin ortaya çıkarılmasını ve geliştirilmesini sağlayacak en uygun ortamın oluşturulması büyük önem taşımaktadır.

Matematiksel modellemedeki zihinsel aktivitelerin açıklanmasında odak nokta modelleme süreci esnasındaki eylemler boyunca açıklanan yaklaşım ve düşünme süreçleridir (Borromeo-Ferri, 2007). Matematiksel modellemede problemi anlama, yorumlama, çözüme yönelik düşünce üretme ve gerçekleştirilen zihinsel eylemleri kontrol edip gerektiğinde değişikliklere gitmeyi sağlayan bazı beceriler de önemli bir rol üstlenmektedir (Maaß, 2006). Bu doğrultuda, modelleme problemlerinin karmaşık yapısı, çözüm esnasında çeşitli teknolojik araçların kullanımı, farklı bilgilere, becerilere ve gerçek yaşam deneyimlerine sahip bireylerin süreç içerisinde bulunması gibi faktörler; düşünme süreçlerinin karmaşıklığını, orijinalliğini ve zenginliğini sağlayan önemli faktörler olmaktadır.

Geçmişe oranla matematiksel modellemenin matematik öğretim programlarında daha etkin bir role sahip olmasına rağmen, hala matematik derslerinde gerçek modelleme problemlerinin kullanımının nadir olduğu görülmektedir (Blum, 2002). Bu doğrultuda, matematiksel modellemeye uygun gerçek yaşam problemlerinin tasarımı ve tasarlanan problemlerin kapsamlı bir modelleme süreci çerçevesinde çözümleri önem kazanmaktadır. Çalışmada, Hıdıroğlu (2012) tarafından oluşturulan teknoloji destekli ortamdaki matematiksel modelleme süreci ele alınmaktadır. Teknoloji kullanımı kapsamında yaklaşım ve düşünme süreçlerinin açıklanmasını amaçlayan matematiksel modelleme sürecinin temel yapısı Şekil 1'de verilmektedir.

Bu doğrultuda, çalışmada araştırmacılar tarafından geliştirilen modelleme probleminin bir çözümü Şekil 1'deki matematiksel modelleme süreci çerçevesinde örneklenmekte ve GeoGebra'nın modelleme sürecinde kullanımı ve sürece olan etkisi vurgulanmaktadır.

Matematiksel modelleme sürecini açıklayan teoriye göre, ilk olarak karşılaşılan karmaşık gerçek yaşam durumu anlaşılmalı çalışılmaktadır. Anlamlandırmayı sağlamak için, problem ifadesi sadeleştirilerek, problemdeki verilenler ve istenenler hakkında ön görüşler sergilenmektedir. Kısacası problemin analizi yapılarak gerçek yaşam durumunun karmaşıklığı ortadan kaldırılmaktadır. Sürecin devamında, gerçek yaşam durumunda istenilene ulaşmak için gerekli stratejik etkenler (değişken, sabit vb.), matematiksel kavramlar, teknolojik araçlar vb. düşünülerek bir genel çözüm stratejisi ortaya atılmaktadır. Bu doğrultuda, gerçek yaşam durumundan yola çıkılarak yapılan varsayımlardan hareketle sistematik yapı kurularak gerçek yaşam durumunun bir modeline ulaşılmaktadır. İdeal çözüm, zihinsel gösterimin bir yansıması olan gerçek yaşam durumunu temsil eden model üzerinden ilerlemekte ve matematiksel semboller, bilgiler ve beceriler doğrultusunda veriler gruplandırılmaktadır. Teknolojiden uygun olarak yararlanılarak, gerekli yardımcı matematiksel modeller [YMM] elde edilerek matematikselleştirme gerçekleştirilmektedir. Teknoloji de kullanılarak elde edilen YMM'lerden ana matematiksel modele [AMM]



Şekil 1. Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Bileşenleri ve Temel Basamakları

ulaşmak için, YMM lerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanılmaktadır. Bir başka deyişle, AMM için gerekli değişkenler doğrultusunda YMM ler ilişkilendirilerek üst matematikselleştirme gerçekleştirilmektedir. Problemde istenen duruma ilişkin verilenler, elde edilen AMM' de yerlerine koyulmakta ve problemdeki istenilene bir başka deyişle matematiksel çözüme ulaşılmaktadır. Bu basamakta, gerçek yaşam durumunun matematiksel analizi gerçekleştirilerek matematiksel çözümle birlikte matematiksel sonuçlar da elde edilmektedir. Matematiksel çözüm; AMM den elde edilen ve istenilen duruma cevap veren matematiksel ifadeler olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematiksel sonuçlar ise, bazen matematiksel çözüme ulaşmada kullanılırken; bazen de gerçek yaşam durumunun farklı durumları için AMM ye genel bir bakış sağlamaktadır. Söz konusu matematiksel çözüm ve sonuçların gerçek yaşam durumunda bir anlam ifade etmesi için gerçek yaşama uyarlanmaları gerekmektedir. Bu aşamada, matematiksel dünya ile gerçek yaşam arasındaki ilişki irdelenerek yorumlama/ değerlendirme yapılmakta ve matematiksel

çözümünden gerçek yaşam çözümüne, matematiksel sonuçlardan da gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmaktadır.

Modelleme sürecinde, gerçek yaşam çözümünün elde edilmesinin ardından günlük yaşam deneyimlerinden, problemlerle birlikte verilen animasyon, video ve resimlerden ve çözüm esnasında ortamda yapılabilen ölçümlerden yararlanılarak modelden elde edilen gerçek yaşam sonuçlarının doğruluğunun irdelendiği görülmektedir. Gerçek yaşam problemine ait teorik ve deneysel olarak elde edilen veriler karşılaştırılmakta ve modelin geçerliliği hakkında bir karara varılmaktadır. Bu temel basamak, gerçek yaşam sonuçlarından yararlanarak modelin doğrulanmasını içeren temel süreç olarak karşımıza çıkmaktadır. Modelin doğrulanması basamağında, sadece gerçek yaşam çözümünden hareketle değil aynı zamanda gerçek yaşam sonuçları da dikkate alınarak modelin geçerliliği sorgulanmaktadır. Eğer modelin geçerliliği çözücü tarafından tatmin edici bir boyuttaysa ileriki bileşen kısa çözüm raporu olmaktadır. Kısa çözüm raporunda ise çözüm sürecindeki

temel düşünceler, çözümü sağlayan temel stratejilere ait düşünceler sergilenmekte ve çözümün veya modelin geliştirilmesi için önerilerde bulunmaktadır. Eğer modelin gerçek yaşam sonuçlarının gerçekçi olmadığı düşünülüyorsa; problem tekrar gözden geçirilmekte ve önceki basamaklara geri dönülerek modelin geçerliliği sağlanmaya çalışılmaktadır.

Matematiksel Modelleme ve Teknoloji

Günümüzde pek çok ülkede matematik dersi öğretim programlarında yer bulan matematiksel modellemenin ve teknolojinin, birbirleriyle iç içe olduğu durumlar farklı bir araştırma alanı olarak karşımıza çıkmakta ve teknoloji ile zenginleştirilmiş matematiksel modelleme sürecinin önemi araştırmacılar tarafından vurgulanmaktadır (Cheng, 2010; Galbraith, Stillman, Brown ve Edwards; 2007; Lingefjård, 2000). NCTM'de (1998) de teknolojinin matematiksel öğrenmeyi en iyi şekilde nasıl destekleyebileceğinin yanında, öğrencilerin matematiksel gücüne, farklı düşüncelerine ve kavramsal becerilerine ne şekilde etki edeceğinin ortaya konulmasının önemi vurgulanmaktadır.

Bilgisayar donanımlı ders ortamları ile öğrenciler küçük gruplar halinde çalıştırılarak karmaşık problemleri çözme, farklı çözüm yolları geliştirme, analiz yapma, varsayımlara dayalı genellemelerde bulunma gibi yaklaşımlarda bulunabilmekte ve işlevsel öğrenme ortamları sağlanabilmektedir (Baki, 2002). Baki'ye (2002) göre, öğrenciler bu ortamlarda bilgisayar yazılımlarını kullanarak matematiksel bir örüntünün, modelin veya ilişkilerin sayısal ve grafiksel olarak görüntülenmesini sağlayabilmektedirler. MEB' de (2006, s.16) teknolojinin matematik öğretimindeki önemi şu şekilde ifade edilmektedir: "Bilgisayar destekli matematik öğretimi yapılan bir ortamda, öğrenciler problemleri adım adım çözer, dönütler alarak yanlışlarını öğrenir. Burada teknoloji, öğrencinin bilgi ve becerilerini ön plana çıkaran bir köprü rolü oynar".

Karmaşık bir yapıdaki düzeni çözümlenebilmek için ona farklı açılardan bakabilmek önem taşımaktadır. Bu doğrultuda, matematik öğretiminin önemli bileşenlerinden birisinin kavramlara ve olaylara farklı özellikleri

açısından bakabilmeyi öğretmek olduğu ifade edilmektedir (Kabaca, Aktümen, Aksoy ve Bulut, 2010). Bu çalışmada, çözüme farklı açılardan yaklaşılmasını sağlamak ve matematiksel düşünmeye dair kapsamlı bir bakış sunmak için, tasarlanan modelleme probleminin GeoGebra yazılımı yardımıyla modelleme süreci çerçevesinde olası bir çözümü verilmektedir.

Kabaca ve Aktümen (2010, s.12), GeoGebra'nın temel özelliğini ve bu özelliğinin sağladığı önemi şu sözlerle ifade etmektedir: "GeoGebra'nın benzer yazılımlardan ayrılan en önemli özelliği geometrik ve cebirsel temsiller arasındaki ilişkileri karşılaştırma fırsatını kendi bünyesinde sunmasıdır. Çoklu temsiller yolu ile matematik kavramlarını incelemek her çağda matematik öğretirken ve öğrenirken başvurulması gereken bir noktadır".

GeoGebra yazılımının çoklu gösterim yapısı (cebir, grafik ve tablo), kullanım kolaylığı, elli farklı dile çevrilmesi gibi onu özel kılan özellikleri dikkate alındığında, matematiksel modelleme problemlerinin çözümünde kullanmak için uygun bir araç olacağı düşünülmektedir. GeoGebra'nın yapısında bulunan geometri ve cebir ekranının varlığının, değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma ve onları gözleme imkânı vermesi ve çözüm esnasında cebirsel ifadelerle geometrik ifadeler arasındaki sınırsız bir geçişi sunması sürece dair zengin bir açıklama getirecektir.

Çalışmada, dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra yardımıyla matematiksel modelleme problemlerinin yapısı dikkate alınarak tasarlanan bir problemin olası çözüm yaklaşımları ve stratejileri sergilenmektedir. Çalışma, GeoGebra'nın sürece nerede ve nasıl etki ettiğinin bir örneğini sunmasının yanında, matematiksel modelleme sürecine dair ayrıntılı ve farklı bir bakış sağlanmayı da amaçlamaktadır. Bu sayede, öğretmenlere ders içi ve ders dışı uygulamalarda farklı matematiksel modelleme problemlerinin teknolojiyle desteklenmiş bir ortamda nasıl kullanılabileceğine, çözen kişiye hangi fırsatları sağlayacağına dair zengin bir bakış sağlayacak ve bu doğrultuda daha etkili, amacına uygun bir teknoloji-matematik öğretimi entegrasyonu sağlamasına zemin hazırlayacaktır.

Boy-Ayak Uzunluğu Problemi ve Tasarım Süreci

Boy-Ayak Uzunluğu problemi tasarlanırken literatürdeki matematiksel modelleme problemlerinin yapısı, özellikleri incelenmiş ve araştırmacılar tarafından modelleme problemlerinde bulunması gereken özellikler tanımlanmıştır. Araştırmacıların problemi tasarlariken dikkate aldıkları hususlar şunlardır:

Tasarlanan matematiksel modelleme probleminin;

- açık ve anlaşılır olmasına,
- açık uçlu olmasına,
- ilgi çekici ve günlük yaşamla ilişkili olmasına,
- gerçek ve zengin verilerden oluşmasına,
- içerisinde birden fazla değişkeni, parametreyi, sabiti ve matematiksel kavramı barındırmasına,
- öğrencilerin kendilerinin veri oluşturmasını gerektirmesine,
- öğrencilerin teknoloji bilgisini, deneyimlerini ve matematik bilgisini ilişkilendirerek kullanmasına olanak sağlamasına dikkat edilmiştir.

Bunun yanı sıra, problem tasarlanırken Berry ve Houston'ın (1995) matematiksel modellemeye yönelik sınıflandırmasındaki deneysel modelleme problemlerinin temel yapısı dikkate alınmıştır. Eldeki verileri kullanarak grafik ya da bir eşitlik elde edilerek yapılan modellemeye deneysel modelleme (Berry ve Houston, 1995) denir. Bu doğrultuda, Boy-Ayak Uzunluğu problemi, bir deneysel modelleme problemi yapısını taşımaktadır (bkz. Tablo 1). Deneysel modelleme, bir nevi toplanmış verilerin eğilimini yakalayan matematiksel bir çözüme ulaşmaktır. Bir başka deyişle, gerçek yaşam çözümü için gerekli olduğu düşünülen veri noktalarının eğilimini yakalayan bir eğri ya da doğru bulmak temel amaçtır (Thomas, Hass ve Giordano, 2010).

Boy-Ayak Uzunluğu Probleminin Olası Bir Çözümü

Şekil 1'deki matematiksel modelleme süreci çerçevesinde, Boy-Ayak Uzunluğu probleminin olası bir çözümü aşağıdaki gibidir:

Tablo 1. Boy-Ayak Uzunluğu Problemi

Kişi	Cinsiyet	Boy Uzunluğu (cm)	Ayak Uzunluğu (cm)
1	K	160	25
2	E	111	15
3	K	160	23
4	K	152	23,5
5	K	146	24
6	K	157	24
7	E	136	21
8	K	143	23
9	E	147	20
10	E	133	20
11	K	153	25
12	E	148	23
13	E	125	20
14	K	150	20
15	E	183	28
16	E	184	25
17	E	125	18
18	K	140	20
19	E	170	27,5
20	K	168	25,5
21	E	131	23
22	E	149	23
23	K	156	21
24	K	130	19,5
25	K	142	22
26	K	159	24
27	K	145	25,5
28	K	162	25
29	E	149	22
30	K	169	24,5
31	E	126	20
32	E	150	24
33	E	170	26
34	K	141	21
35	K	123	20
36	K	122	19
37	E	125	20
38	K	133	20
39	E	165	25
40	K	131	20
41	K	134	17
42	E	158	25
43	K	170	25
44	K	125	15
45	K	135	21
46	K	138	19
47	E	134	20,5
48	E	145	22
49	K	171	25
50	K	181	24
51	K	139	19,5
52	E	147	25
53	E	134	19
54	K	164	24
55	E	127	19,5
56	K	138	23
57	E	180	24
58	E	159	26
59	K	151	23,5
60	E	165	29

Yukarıdaki tabloda 60 kişilik bir grubun cinsiyet, boy ve ayak uzunlukları verileri verilmiştir. Bu verilere göre şu anda dünyanın en uzun boylu (247 cm) insanı yaklaşık olarak kaç numara ayakkabı giyer? Boyları aynı olan herhangi erkek ve kadının ayak uzunluklarının arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ediniz.

A. Problemin Analizi

Problem ifadesinde, 60 kişinin verileri (ayak uzunluğu, boy uzunluğu) erkek ve bayan olma faktörleri dikkate alınarak tabloda verilmektedir. Bu tablodan hareketle, dünyanın en uzun boylu insanının ayakkabı numarası ve aynı boya sahip erkek ve bayanın ayak uzunlukları arasındaki ilişki istenmektedir. Bu doğrultuda, problemde verilenler 60 kişinin cinsiyeti, boy ve ayak uzunluklarıdır. İstenilenler ise, 247 cm. uzunluğundaki insanın ayakkabı numarası ile aynı boya sahip erkek ve bayanın ayak uzunlukları arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesidir. İlk olarak istenilen gerçek yaşam çözümünün, sayısal bir değer olacağı, ikinci istenilenin ise, matematiksel bir model olacağı düşünülebilir. 60 kişinin verileri problemin ideal bir çözümü için gereklidir.

B. Sistemik Yapıyı Kurma

Problem dikkate alındığında, çözüm için gerekli değişkenlerin boy uzunluğu, ayak uzunluğu ve ayakkabı numarası olduğu görülmektedir. Gerçek yaşam durumuna ilişkin varsayımlar doğrultusunda çözüm için üç farklı genel stratejiden söz edilebilmektedir:

1) Dünyanın en uzun boylu insanının bir erkek olduğu düşünülerek, sadece erkeklerin verileri dikkate alınarak istenilen cevaba ulaşılabılır.

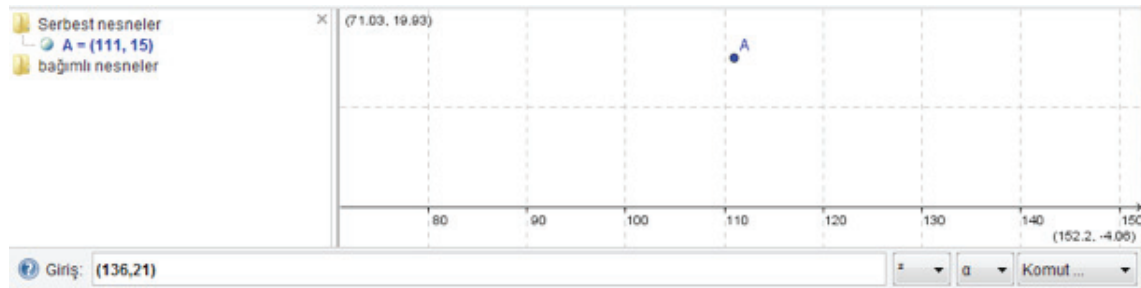
2) Erkeklerin ve bayanların verileri ayrı ayrı girilerek, iki farklı ana matematiksel model çerçevesinde erkek veya bayan için istenilen ayakkabı numaraları bulunabilir.

3) Farklı bir yaklaşım olarak da, erkek ve bayanların verileri birlikte girilerek ortalama bir değer dikkate alınabilir.

Gerçek yaşamdan hareketle ele alınan çözümde dünyanın en uzun boylu insanının bir erkek olduğu gerçek yaşam deneyimine bağlı varsayımla kızların verilerinin gereksiz olduğu düşünülerek erkeklerin verilerine odaklanılabilir. Fakat, problem ifadesinin devamında, aynı boya sahip erkek ve bayanın ayak uzunlukları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkaran matematiksel bir model bulunması istenmektedir. Bu da bayanların verilerinin ikinci aşamada gerekli olduğunu göstermektedir. Bu doğrultuda, problemle birlikte verilen tablodaki hem erkeklere hem de bayanlara ait veriler göz önüne alınmıştır. 60 kişinin ayak uzunluğu y , boy uzunluğu da x olacak şekilde sıralı ikili olarak (bkz. Şekil 2) GeoGebra'ya bayanlar ve erkekler olmak üzere iki farklı dosyada ayrı ayrı girilmiştir.

C. Matematikselleştirme

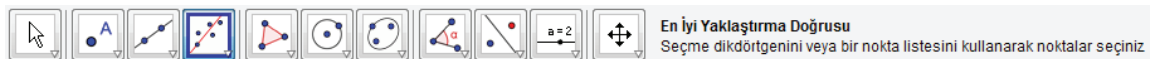
Çözüm için ilk aşamada kullanılabilecek dört farklı değişkenden söz etmek mümkündür. Bunları, erkek boy uzunluğunu x_e , erkek ayak



Şekil 2. Erkeklerin Verilerini İçerecek GeoGebra Dosyasından Kesit

uzunluğunu y_e , bayan boy uzunluğunu x_b ve bayan ayak uzunluğunu da y_b sembollerile ifade edelim. Gerekli olacak değişkenler olan erkeklerin ayakkabı numarasını z_e ve bayanların ayakkabı numarasını ise z_b ile gösterelim. Söz konusu veriler GeoGebra'ya girildiğinde

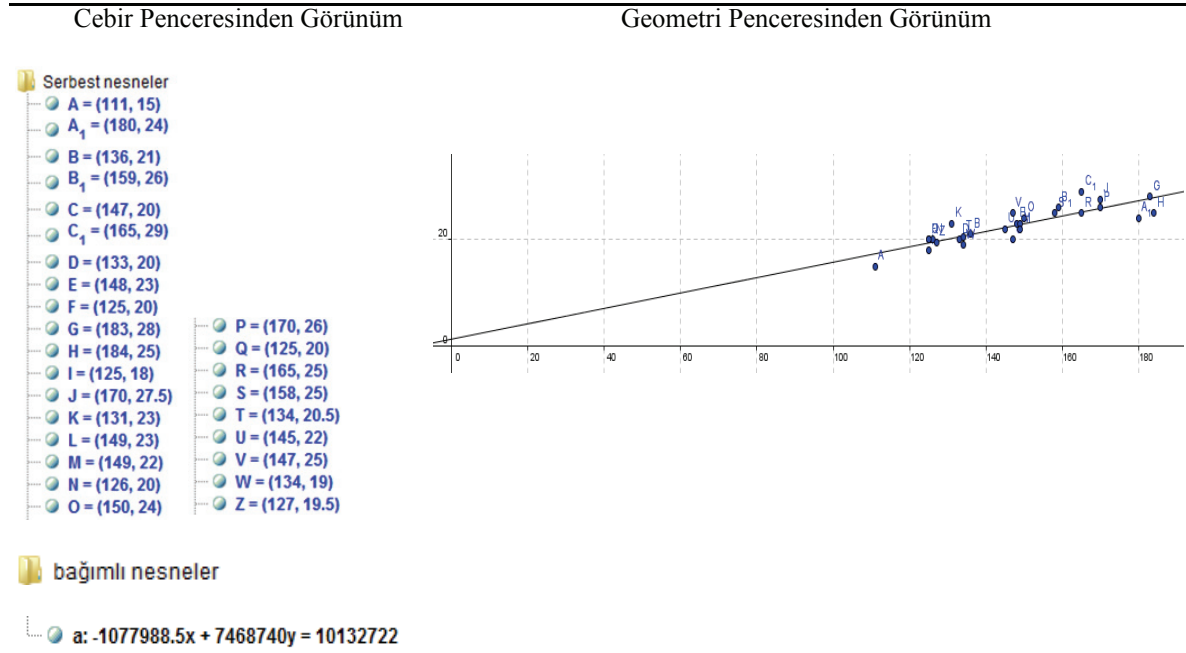
noktaların bir doğru boyunca hareket ettikleri gözlemlenmektedir. GeoGebra'nın kendi yapısında var olan ve bu ilişkiyi ortaya çıkaran bir fonksiyon olan *en iyi yaklaşıma doğrusu* ile bu doğru bulunabilmektedir (bkz. Şekil 3).



Şekil 3. GeoGebra' da En İyi Yaklaşıma Doğrusu

GeoGebra'nın söz konusu fonksiyonu kullanılarak, hem erkekler hem de bayanlar için boy uzunluğu ve ayak uzunluğu arasındaki ilişkiyi veren YMM lere ulaşılmaktadır.

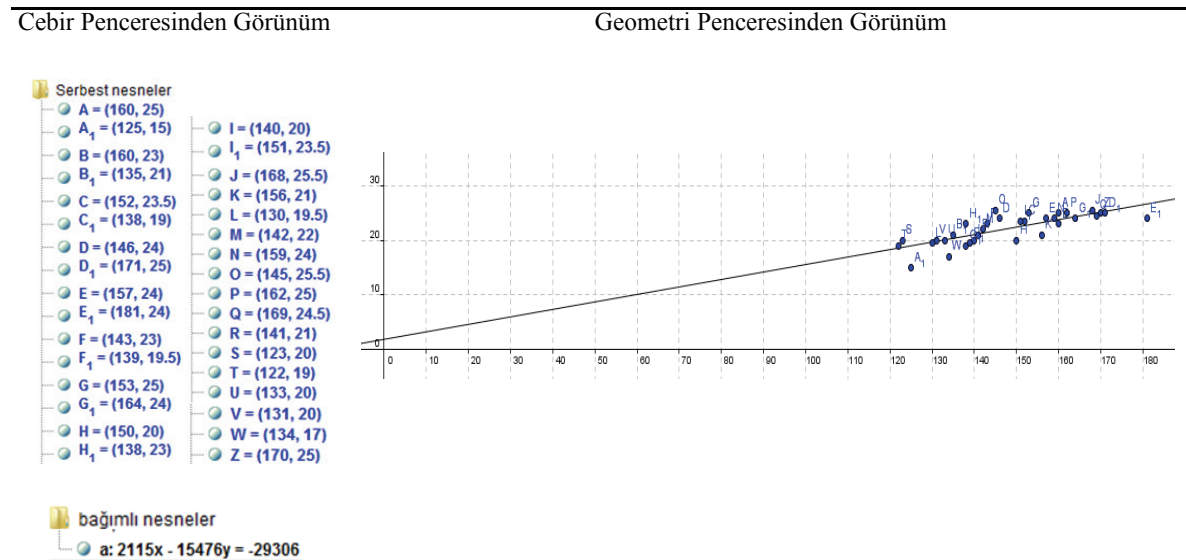
GeoGebra'da bayanlar ve erkekler için iki ayrı dosyada elde edilen bilgiler Şekil 4 ve Şekil 5'de verilmiştir.



Şekil 4. GeoGebra' da Erkeklerin Boy-Ayak Uzunluğu Arasındaki İlişkiyi Veren Yardımcı Matematiksel Model

Buna göre, erkekler için boy uzunluğu ile ayak uzunluğu arasındaki ilişkiyi veren birinci YMM, $-1077988,5x_e + 7468740y_e = 10132722$ 'dir (bkz. Şekil 4). Bayanlar için boy uzunluğu

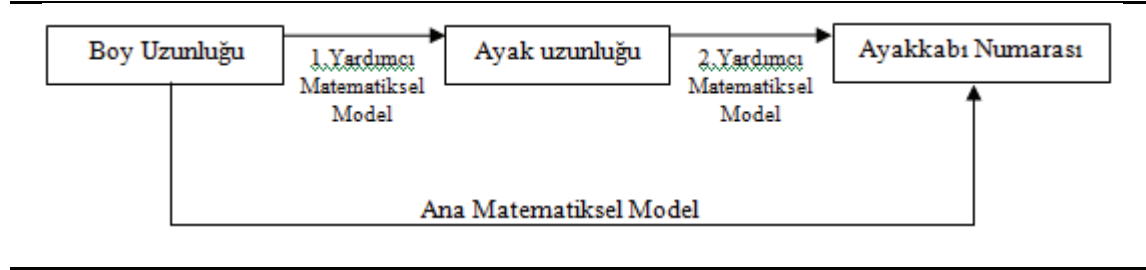
ile ayak uzunluğu arasındaki ilişkiyi veren ikinci YMM ise, $2115x_b - 15476y_b = -29306$ 'dir (bkz. Şekil 5).



Şekil 5. GeoGebra'da Bayanların Boy- Ayak Uzunluğu Arasındaki İlişkiyi Veren Yardımcı Matematiksel Model

Problemde ilk olarak istenen 247 cm boy uzunluğundaki bir insanın ayakkabı numarasıdır. Bir başka deyişle, boy uzunluğu ve ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model, problemde istenen ilk

durum için gerekli AMM dir. Şekil 6'da, boy uzunluğuyla ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi ortaya çıkaracak AMM ye nasıl ulaşılabileceği gösterilmektedir.



Şekil 6. Gereki Değişkenler ve Matematiksel Modeller Arasındaki İlişki

Boy uzunluğu ile ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi verecek AMM yi bulmak için, ayak uzunluğuyla ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi verecek YMM yi bulmak gerekmektedir. Gerçek yaşam deneyimine bağlı olarak, en uzun boylu insanın ismi ve erkek olduğu bilgisi ve varsayımı, genel çözüm stratejisini değiştirmektedir. Bir başka ifadeyle, en uzun boylu insanın erkek olduğu bilindiğinden bayanların ayak uzunluğuyla ayakkabı numarası arasındaki ilişki arka plana atılabilir.

Problemde verilenler, erkeklerin ayak uzunluğuyla ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak için yetersiz kalmaktadır. Buradaki yaklaşımlarda, deneyimlere dayalı yapılacak tahminler ve çözüm esnasında yapılabilecek ölçümler yol gösterici olacaktır. Ayak uzunluğuyla ayakkabı numarası arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu düşünülerek; ideal uzunluklara sahip olduğu düşünülen erkeklerin verilerinden hareketle bir yaklaşımda bulunulabilir. Bu doğrultuda, sınıf içi uygulamada çözüm için grupların veya öğrencilerin sınıftaki akranlarından bilgi alması ve onlardan yararlanması sağlanabilir.

Çözümde herhangi bir kişinin verilerinden yola çıkarak, YMM yi kurmaya çalışmak zayıf bir yaklaşım olabilmektedir. Bu doğrultuda, bireyin elindeki şartları en iyi şekilde kullanabilmesi gerekmektedir. Kişi sayısının fazla olması ideal matematiksel modele ulaşmak için önemli olmaktadır. Bu uyarı dikkate alınarak, aynı boydaki beş kişinin verileri doğrultusunda çözüme devam edelim. Bu varsayım doğrultusunda, inceleme sonucunda, 42 numara ayakkabı giyen beş kişi

ele alınmış ve ayak uzunlukları ortalama olarak 26,5 cm. olarak belirlenmiştir.

$$\begin{array}{cc} 26,5 \text{ cm} & 42 \text{ numara ise} \\ y_e \text{ cm} & z_e' \text{ dir.} \end{array}$$

Basit bir orantıyla varsayım doğrultusunda söz konusu üçüncü YMM, $y_e = 0,631z_e$ olarak bulunmuştur. Bu ilişkiyi farklı stratejiler sergileyerek bulmak da mümkündür. Örneğin, sınıftaki öğrenciler ayakkabı numaralarını boyu 30 cm olan A4 kağıtlarla ölçerek ya da uzunluğunu tahmin edebildikleri kalem vb. bir araçla ayağını oranlayarak veya elinde mevcut bir metreyi kullanarak bulabilirler.

D. Üst Matematikselleştirme

Bu aşamada eldeki YMM ler gruplandırılarak ve ilişkilendirilerek AMM ye ulaşılmalıdır. Elde edilen birinci ve üçüncü YMM ler, erkekler için boy uzunluğu ve ayakkabı numarası arasındaki ilişkiyi verecek AMM yi bulmak için yeterlidir. Söz konusu iki YMM deki y_e ' ler (erkek boy uzunluğu) çekilip modeller eşitlenirse x_e (erkek ayak uzunluğu) ve z_e (erkek ayakkabı numarası) arasındaki ilişkiyi veren matematiksel model ortaya çıkmaktadır.

$$-1077988,5x_e + 7468740y_e = 10132722 \rightarrow y_e = 1,357 + 0,144x_e \text{ elde edilir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_e = 0,631z_e \\ y_e = 1,357 + 0,144x_e \end{array} \right\} \begin{array}{l} 631z_e = 1357 + 144x_e \\ \text{ana matematiksel model} \\ \text{elde edilir.} \end{array}$$

Elde edilen ana matematiksel model GeoGebra'nın giriş ekranında yazılarak cebirsel

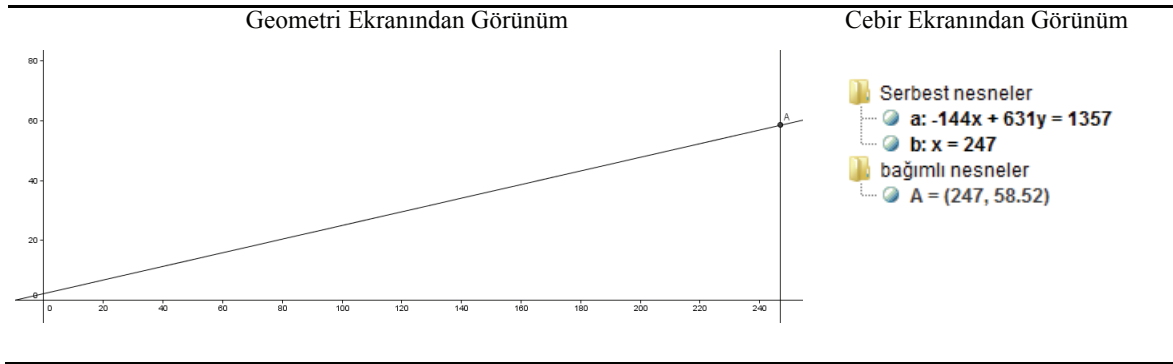
gösterimden grafiksel gösterime ulaşılabilir. GeoGebra'da x_e ve z_e biçiminde ifade edilmiş değişkenler x ve y olarak kodlanmalıdır. Bu durumda, GeoGebra'da oluşturulan grafikte x eksenini erkeklerin boy uzunluğunu, y eksenini ise erkeklerin ayakkabı numarasını temsil etmektedir.

AMM'ye, YMM'lerin geometrik gösterimlerinden yararlanarak ulaşmak da farklı bir yaklaşımdır. Bu doğrultuda, grafikler GeoGebra'da aynı düzleme atılarak doğrular arasındaki açıdan veya doğruların eğimlerinden yararlanarak da

söz konusu AMM'ye ulaşılabilir. Bunun yanı sıra, GeoGebra yardımıyla AMM için gerekli değişkenler olan boy uzunluğu ve ayakkabı numarasının veri tablosu oluşturularak da ana modele ulaşılabilir.

E. Matematiksel Analiz

Çözümün devamında, GeoGebra yardımıyla 247 cm boyundaki bir erkeğin ayakkabı numarası bulunurken $x_e=247$ için z_e' nin değerine bakılmalıdır (bkz. Şekil 7).



Şekil 7. Ana Matematiksel Modelin Geometrik ve Cebirsel Gösterimi

Bunun için de, GeoGebra'da $x=247$ doğrusuyla AMM'nin kesişim noktasını bulmak yeterlidir. Söz konusu değeri bulabilmek için, GeoGebra'da grafiksel gösterimden yararlanılarak bir çözüm gerçekleştirilebilir veya hesap makinesi yardımıyla AMM'nin cebirsel ifadesinden yararlanılarak çözüme (58.52) ulaşılabilir. Matematiksel analizde bulunan 58.52 en uzun boylu insanın erkek olduğu varsayımından hareketle tek matematiksel çözüm olarak karşımıza çıkmıştır. Bu süreçte aynı zamanda AMM'den yararlanarak farklı durumlar için de matematiksel sonuçlar bulunur ve bu sayede ileriki basamakta örneklenecek durumlar için matematiksel sonuçlardan elde edilecek gerçek yaşam sonuçları irdelenebilmektedir. Varsayımların değiştirilmesi matematiksel çözümü ve matematiksel sonuçları değiştirebilmektedir.

F. Yorumlama/Değerlendirme

247 cm boyundaki en uzun boylu insanın ayak uzunluğunun ideal orana yakın olduğu düşünülürse, yaklaşık 59-60 numara ayakkabı giyebileceği söylenebilir. Burada, 58.52

numara çözüm sürecindeki matematiksel çözüm, bu matematiksel çözümden elde edilen 59-60 numara ise, bu süreçteki gerçek yaşam çözümüdür. Bunun yanı sıra, AMM'den elde edilen matematiksel sonuçlarından hareketle de gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılabilir. AMM incelendiğinde, AMM'de boyu sıfır olan bir kişinin ayak uzunluğunun veya ayakkabı numarasının sıfır olmaması modelin yapısı için ilginç bir durumdur. Bu durumun model kurmak için kullanılan verilerin idealliyiyle ilişkili olduğu düşünülebilir. Bunun dışında, AMM bir fonksiyon olarak tanımlandığında, tanım ve değer kümeleri belirlenmelidir. Bu doğrultuda, elde edilen değerler gerçek yaşam sonuçları olarak karşımıza çıkmaktadır.

G. Modelin Doğrulanması

Dünya'nın en uzun boylu insanının ayakkabı numarasının 60 numara olduğu TV programlarında çoğu zaman haber konusu olmuştur. Bu doğrultuda, gerçek yaşam deneyimine dayalı bilgiyle AMM yardımıyla elde edilen gerçek yaşam çözümünün ideal olduğu söylenebilir. Çözüm sürecinde, öğrencilerin

hem varsayımlarını belirleyerek sistematik yapıyı kurmalarında hem de gerçek yaşam deneyimleriyle doğrulama yapmalarında ideal ortamların yaratılması önemli olmaktadır. Ayrıca, ideal olduğu düşünülen bir kişinin verilerinin, AMM deki karşılığı (gerçek yaşam sonuçlarından biri) kıyaslanarak çözümün ve AMM nin ideallığı sorgulanabilmektedir.

Problemde ikinci istenilen durum, aynı boydaki erkek ve bayanın ayak uzunlukları arasındaki ilişkidir. Burada, ikinci bir istenilene yer verilmesinin temel amacı, çözüm sürecinde sergilenecek yaklaşımları ve stratejileri zenginleştirmektir. Çözümde sırayla problem analiz edilmekte, sistematik yapı kurulmakta ve YMM ler doğrultusunda AMM bulunmaktadır. Üst matematikselleştirmede, GeoGebra kullanılarak ya da kullanılmadan farklı stratejiler izlenebilmektedir. En önemli olan nokta, AMM için gerekli değişkenler doğrultusunda gerekli YMM lerden yararlanmaktadır.

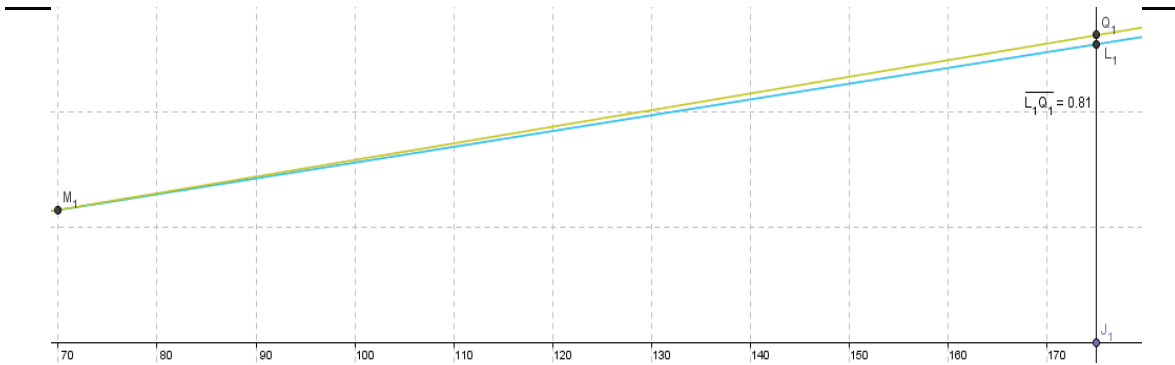
Gerekli YMM ler erkeklerin boy uzunluğu ve ayak uzunluğunun ilişkisini veren,

$-077988,5x_e + 7468740y_e = 10132722$ ve bayanların boy uzunluğuyla ayak uzunluğunun ilişkisini veren $2115x_b - 15476y_b = -29306$ 'dir. Aynı boy uzunluğundayken ayak uzunlukları arasındaki ilişki istendiğinden dolayı $x_e = x_b$ olduğunda y_e ve y_b arasındaki ilişki bulunması gerekmektedir.

$$\left. \begin{aligned} -1077988,5x_e + 7468740y_e &= 10132722 \\ 2115x_b - 15476y_b &= -29306 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_e &= -9,4 + 6,92y_e \\ x_b &= -13,85 + 7,31y_b \end{aligned}$$

$x_e = x_b$ için de AMM, $144x_e = 543 + 137x_b$ olarak bulunur.

Bu cebirsel çözümün yanında, farklı bir yaklaşım olarak YMM ler GeoGebra'da aynı düzleme yerleştirilerek doğrular arasında ilişkilerin kurulmasıyla da AMM bulunabilmektedir (bkz. Şekil 8).

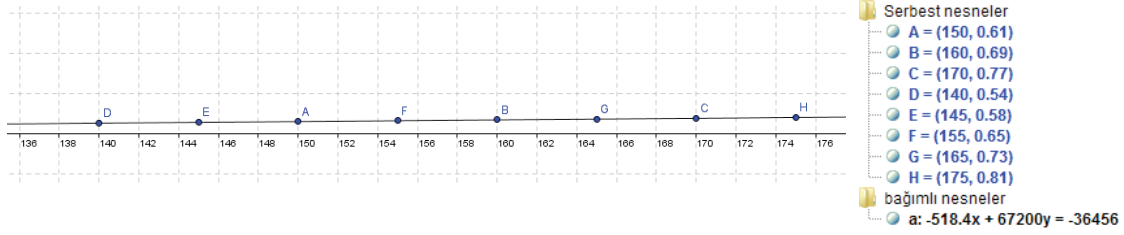


Şekil 8. GeoGebra'da YMMler Arasındaki İlişkiyi Ortaya Çıkaran Teknolojik Sistem

Şekil 8'de, sarı doğru erkeklerin boy uzunluğu ve ayak uzunluğunun ilişkisini veren YMM, yeşil doğru ise bayanların boy uzunluğuyla ayak uzunluğunun ilişkisini veren YMM dir. M_1 (70,11.4) noktası 70 cm boyundaki erkek ve bayanın ayak uzunluklarının aynı olduğunu ifade etmektedir. 70 cm den büyük boylarda erkeğin ayak boyu bayaninkinden daha büyüktür. X ekseninde bir J_1 noktasından geçen ve x eksenine dik bir doğru çizilerek YMM lerle kesiştilerim. Erkeklerin YMM si ile kesişimi Q_1 , bayanların YMM si ile kesişimi ise L_1 'dir. J_1 GeoGebra'da x ekseninde hareket ettikçe Q_1-L_1 bize aynı boydaki erkek ve bayanın ayak uzunluklarının farkını bize verecektir. GeoGebra'da YMM ler yardımıyla 140, 145,

150, 155, 160, 165, 170, 175 cm boyları için Q_1-L_1 ' i yazarak 8 kişinin veri tablosunu oluşturabiliriz. Daha sonra yeni bir dosyada, boy uzunluğu apsisi, Q_1-L_1 verileri ise ordinat olacak şekilde sıralı ikilileri GeoGebra'ya girelim (Şekil 9). Verilerin bir doğru şeklinde hareketi dikkate alınarak bu noktalardan geçen en iyi yaklaşıma doğrusunu GeoGebra yardımıyla bulabiliriz.

GeoGebra'da, AMM nin cebirsel ifadesi, $-518.4x + 67200y = -36456$ olarak bulunmuştur. Daha önce boy uzunluğunun x, erkek boy uzunluğunun y_e , bayan boy uzunluğunun y_b olduğu düşünülürse AMM, $-518.4x + 67200(y_e - y_b) = -36456$ 'dir. Görüldüğü gibi stratejiye



bağlı olarak, AMM nin değişkenleri ve yapısı değişebilmektedir ve iki farklı çözüm de istenilen ulaşmak için yeterlidir. Çözüm sürecinde birçok varsayım, farklı yaklaşım ve düşünce sergilenebilmektedir.

Tartışma

Bu çalışmada araştırmacılar tarafından tasarlanan bir matematiksel modelleme probleminin modelleme süreci çerçevesinde olası bir çözümü örneklenmeye çalışılmıştır. Kabaca ve Aktümen'in (2010) vurguladığı gibi, GeoGebra'nın benzer yazılımlardan ayrılan en önemli özelliği, geometrik ve cebirsel gösterimler arasındaki ilişkileri karşılaştırma fırsatını bünyesinde barındırmasıdır. Çalışmada da, GeoGebra cebir, grafik ve tablo gibi çoklu gösterimleri sunarak, matematiksel kavramlar arasındaki ilişkiyi kurmada, farklı açılardan bakarak farklı çözüm stratejileri gerçekleştirmede ve değişkenlerin veya YMM lerin aralarındaki ilişkiyi ifade etmede büyük ölçüde yararlı olmuştur. Barbosa (2008) yaptığı çalışmada modelleme etkinlikleriyle uğraşırken üç farklı tartışma alanının (matematiksel, teknolojik ve dönüşümlü) bulunduğunu, Galbraith, Stillman, Brown ve Edwards (2007) da teknoloji ve matematiksel modelleme entegrasyonunda yaklaşımların ve düşüncelerin, teknoloji, matematik ve gerçek yaşam durumu etkileşimi altında şekillendiğini vurgulamaktadırlar. Paralel olarak, bu çalışmada da yaklaşımların matematik, teknoloji ve gerçek yaşam temelli düşüncelerle şekillenmektedir. Teknoloji destekli ortamdaki matematiksel modelleme sürecinde sergilenen yaklaşımlar dikkate alındığında, çözüm sürecinin hemen hemen her basamağında teknolojinin etkili olabileceği, farklı stratejileri, yaklaşımları ve

öğrencilerin sahip olduğu becerileri ortaya çıkararak zengin ve karmaşık bir süreç ortaya çıkarabileceği görülmektedir. Lingefjärd'ın (2000) da ifade ettiği gibi bilgisayar yazılımları hem matematiksel modellerin grafiksel gösterimlerini sunmakla birlikte çözümde ilerleyen zamanlarında modelin doğrulanmasına yönelik yaklaşımlarında da etkili olmuştur. Bunun yanında, kompleks yapıdaki modelleme probleminin verileri gerçek veriler olduğundan üretilen matematiksel modellerin yapısının basit olmadığı görülmektedir. Teknoloji de bu anlamda olası zor işlemlerle çözücünün süreçte kaybolmasını engellemiştir (Lingefjärd, 2000). Bunun yanında, şimdiye kadar yapılan çalışmalara bakıldığında, süreç için oldukça uygun bir matematik yazılımı olmasına rağmen GeoGebra'nın matematiksel modelleme sürecindeki etkisine yönelik herhangi bir araştırmayla karşılaşılmamıştır. GeoGebra yazılımının yapısı matematiksel modelleme sürecinin işleyişine ve çözüm stratejilerine büyük katkı sağlamıştır. Ayrıca, çözüm sürecinde GeoGebra matematiksel modellerin davranışlarını ve eğilimlerini inceleyebileceğimiz zengin bir ortam sağlamıştır (Cheng, 2010). GeoGebra ile zenginleştirilmiş matematiksel modellemede üç temel dünyanın (matematik, gerçek yaşam, teknoloji) etrafında gerçekleşen çözüm sürecinin öğrencilerin modelleme becerilerine ve yeteneklerine olumlu anlamda katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu tür teknoloji destekli ortamlar öğrencilerin iyi birer problem çözücü olarak olaylara farklı açılardan yaklaşımlarını sağlamanın yanında, hızlı gelişen teknoloji dünyasına onların uygun ve verimli bir şekilde adapte olmasına olanak sağlayacaktır.

KAYNAKÇA

- Baki, A. (2002). Öğrenen ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik. BİTAV-Ceren Yayın Dağıtım, İstanbul.
- Barbosa, J. C. (2008). What do students discuss when developing Mathematical Modelling activities?. Electronically published, State University of Feira de Santana. *Can be downloaded from* <<http://site.educ.indiana.edu/Portals/161/Public/Barbosa.pdf>> erişim tarihi 20.03.2012.
- Berry, J. ve Houston K. (1995). *Mathematical Modelling*. Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd.
- Berry, J. (2002). Developing Mathematical Modelling Skills: The Role of CAS. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM*. 34(5), 212-220.
- Blum, W. ve Niss, M. (1989). Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. M. Niss, W. Blum ve I. Huntley (Ed.). *Modelling Applications and Applied Problem Solving*. (s.1-19). England: Halsted Pres.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education- Discussion Document. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 34(5), 229-239.
- Borromeo-Ferri, R. B. (2007). Personal Experiences and Extra-Mathematical Knowledge as an Influence Factor on Modelling Routes of Pupils. *CERME 5 (2007) Working Group 1*. 2080-2089.
- Cheng, A. K. (2010). Teaching and Learning Mathematical Modelling with Technology, Nanyang Technological University. <http://atcm.mathandtech.org/ep2010/invited/3052010_18134.pdf> erişim tarihi 20.03.2012.
- English, L. D. ve Watters, J. J. (2004). *Mathematical Modeling in the Early School Years*. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 59-80.
- Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: ICTMA 12: Education, Engineering an Economics*, 130-140, Woodhead Publishing.
- Greer, B. (1997). Modelling Reality in Mathematics Classroom: The Case of Word Problems. *Learning and Instruction*, 7, 293- 307.
- Hıdıroğlu, Ç. N. (2012). *Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analiz Edilmesi: Yaklaşım ve Düşünme Süreçleri Üzerine Bir Açıklama*. Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Kabaca, T. ve Aktümen, M. (2010) Using GeoGebra as an Expressive Modeling Tool: Discovering the Anatomy of the Cycloid's Parametric Equation. *GeoGebra The New Language For The Third Millennium*. 1(1), 63-82.
- Kabaca, T., Aktümen, M., Aksoy, Y. ve Bulut, M., (2010), GeoGebra ve GeoGebra ile Matematik Öğretimi. Gülseçen, S., Ayvaz Reis, Z. ve Kabaca, T. (Eds), *First Eurasia Meeting Of GeoGebra (EMG): Proceedings*, 79-115. İstanbul Kültür Üniversitesi Yayınları.
- Lingefjärd, T. (2000). *Mathematical Modeling by Prospective Teachers Using Technology*. Electronically published doctoral dissertation, University of Georgia. <<http://ma-serv.did.gu.se/matematik/thomas.htm>> erişim tarihi 28.11.2010.
- Maaß, K. (2006) What are Modelling Competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 38 (2),113-142.
- MEB, (2006). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara: MEB Basımevi.

- Mousoulides, N., Christou, C., ve Sriraman, B., (2006). From Problem Solving to Modelling- a Meta Analysis. <<http://www.umd.edu/math/reports/sriraman/mousoulideschristousriraman.pdf>> erişim tarihi 26.11.2010
- National Council of Teachers of Mathematics (1979). *Applications In School Mathematics: 1979 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM Publications.
- Peter-Koop, A. (2004). Fermi Problems in Primary Mathematics Classrooms: Pupils' Interactive Modelling Processes. In I. Putt, R. Farragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the Third Millenium: Towards 2010* (Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 454-461). Townsville, Queensland: MERGA.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334– 370). Macmillan: New York.
- Skolverket (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik* [Commentary on the Comprehensive School Curriculum and Marking Criteria in Mathematics]. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Sriraman, B. (2005). Conceptualizing the Notion of Model Eliciting. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain.
- Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J. ve Edwards, I.(2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*. 2, 688- 697.
- Swedish Ministry of Education. (1994). *Kursplaner för grundskolan*. [Syllabus for Subjects in the Comprehensive School Curriculum]. Stockholm, Fritzes.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. ve Giordano, F. R. (2010). *Thomas Calculus 1* (2. Baskı, Çeviri: Recep Korkmaz). Beta Basım A.Ş. İstanbul.
- Verschaffel, L., De Corte, E. ve Borghart, I. (1997). Pre-service Teachers' Conceptions and Beliefs about the role of Real-World Knowledge in Mathematical Modeling of School Word Problems. *Learning and Instruction*. 7(4), 339-359.
- Zawojewski, J. S., Lesh, R., ve English, L. D. (2003). A Models and Modelling Perspective on the Role of Small Group Learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, (pp. 337-358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Summary

Mathematical modeling is a process that requires solving problems in a real life context, mathematizing the non-mathematical situations, constructing mathematical model/s related to the real life situations, finding the unknowns, and transferring the mathematical results obtained from the mathematical model to the real life situations (Berry&Houston, 1995; Hıdıroğlu, 2012; Peter-Koop, 2004). Mathematical modeling is dealt with different perspectives such as cognitive modeling, applied modeling, educational modeling. The focal aim of the mathematical modeling under the cognitive perspective is to understand of the cognitive processes taking place during modeling processes (Borromeo-Ferri, 2007). Problem solving activities require students' cognitive and metacognitive skills (Schoenfeld, 1992). The metacognitive skills requiring understanding the problem, interpretation, generation of thoughts oriented to the solution, and controlling and modifying the mental actions in mathematical modeling plays an important role (Maass, 2006). It has been emphasized in NCTM (1998) reports, the importance of technology is required to reveal by considering how the technology supports mathematics learning in the best way as well as how to affect students' mathematical power, thoughts in different way and conceptual skills.

The integration of mathematical modeling with technology and the advantages of technology to modeling process have become more important in today's fast-growing society. The studies about how the technology affects the mathematical modeling process and how to use the technology more effectively are of importance. In recent years, studies on the integration of technology in mathematics education bring with it the emergence of different mathematical software. One of the most noteworthy of this software is GeoGebra. The most important feature of GeoGebra separated from similar other software is that GeoGebra contains both geometric and algebraic representations and the opportunity to compare the relationship between them (Kabaca&Aktümen, 2010). GeoGebra is considered to be an appropriate tool for solving mathematical modeling problems

considering their properties such as the multi-structure (algebra, graphs, and tables), ease of use, being translated into fifty different languages, and to able to reach all.

The purpose of this study is to illustrate how to use GeoGebra in the process of mathematical modeling. In this study, GeoGebra was used in solution process of a problem designed in accordance with mathematical modeling and the intended uses of GeoGebra were described in the modeling process. For this reason one problem named Height-Foot Length Problem was designed by the researchers. The solution of the Height-Foot Length Problem was carried out taking into account the cognitive modeling process. With this study, it was exemplified how the mathematics teachers will be able to use the mathematical modeling and the GeoGebra in their lessons. It is thought that GeoGebra will contribute to the uncovering and the development of modeling skills and will be provided more conceptual and mathematical thinking by preventing losing in procedures. While designing the problem, Berry and Houston's classification towards mathematical modeling (1995) was taken into account and the experimental modeling type was selected. The solution to the problem was discussed by using the mathematical modeling process (Hıdıroğlu, 2012) constructed based on technology usage and cognitive perspective. The reason why the sample solution was constructed within this mathematical modeling process was the detailed structure of this mathematical modeling process shaped with technology and cognitive perspective in the literature. This process contains eight basic steps, seven major components and forty seven sub-steps and reveals the relationships between them. Because GeoGebra offers to present multiple representations of mathematical concepts such as algebra, graphs and tables, in the solution process it provided important contributions to establish the relationship between mathematical concepts, to perform different solution strategies, and to express the relationship between the variables and the mathematical models.

The study provides an example of GeoGebra usage and, how and where to use it. In this

way, it provides information to the teachers how to use different mathematical modeling problems in technology supported learning environment. In this context, it will aid purposeful and more effective integration of technology in mathematics education. These types of technology-supported environments allow students to become good problem solvers and adapt them to world of rapidly developing technology.

