Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 9, Sayı 1, Haziran 2015, sayfa 246-274.

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 9, Issue 1, June 2015, pp. 246-274.

Analysis II Students' Construction of Polar Functions

Tangül KABAEL*

Anadolu University, Eskişehir, TURKEY

Received: 16.01.2013 Accepted: 13.01.2015

Abstract – This study is a follow-up of the research, in which the researcher investigated relationship between students' understanding of functions in Cartesian and Polar Coordinate Systems. Teaching of polar transformation and polar functions was included in the context of transformation concept in the course of Analysis II in a mathematics education program of an education faculty. This teaching process was designed in line of literacy in which the previous study was included. It was showed in the literature that the students who was not given the concept of polar functions could not transfer the function concept to polar coordinates and they use polar coordinates by memorize. It was aimed to examine Analysis II students' constructions of polar functions in this qualitative study. For data collection, open-ended test and clinical interview techniques were used. Data was analyzed by using the content analysis technique (Yıldırım ve Şimşek, 2003). It was concluded that polar function concept was constructed. Moreover, it was seen that students' construction of polar functions and their understanding level of function concept were directly related.

Key words: polar functions, polar coordinates, function concept.
DOI No:

Summary

Introduction

The students encounter polar coordinates at secondary education and undergraduate level. On the other hand, any teaching activities related to the polar functions, which requires carrying the key points of function concept to polar coordinates is not included in some undergraduate level courses including some applications of polar coordinates. It is expected that students carry the concept of function and many cognitive skills related to this concept to polar coordinates by being exposed to the applications in polar coordinates in such courses. Montiel, Vidakovic and Kabael (2008) conducted a study to reveal students difficulties with

*Corresponding Author: Tangül KABAEL, Assoc. Prof. , Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Anadolu University, Eskişehir, TURKEY

E-mail: tuygur@anadolu.edu.tr

polar functions and to examine the relationship between understanding the concept of function in the Cartesian and polar coordinates. Montiel et al. (ibid.) concluded that the students reflected some of misconceptions regarding the concept of function in Cartesian coordinates to polar coordinates, besides; they had some new concept misconceptions related to the concept of polar function. Then, as a pedagogical suggestion, they emphasized the involvement of polar functions while teaching polar coordinates. In this study, teaching of polar transformation and polar functions was included in the context of transformation concept in the course of Analysis II and it was aimed to examine students` construction of polar functions. Teaching process in this study was designed in line of literacy in which the previous study was included. In line of this aim, the following research questions were addressed:

- What is the relationship between the students' understanding level of the concept of function and constructing polar function?
- Do the students grasp "*central line test"*?
- What are the students' misconceptions and difficulties relate to polar coordinates and polar functions?

Methodology

The present study was conducted with 35 students attending to the Analysis II course at Elementary Mathematics Education Program in an education faculty. Teaching experiment, which is a qualitative research method, was used in this study (Cobb & Steffe, 1983; Kelly & Lesh, 2000).

Instructional Treatment

The concept of transformation was introduced at first and then the polar transformation was given after various transformation examples before double integrals. Furthermore, polar axes and the concept of polar functions were focused in this teaching approach. At this point, various tasks that can encourage students to carry function notion to polar coordinates were posed. Moreover, it was emphasized that "vertical line test" was only a test used to investigate function situations in graph representations in Cartesian coordinates, and it cannot be used as definition of function concept.

Data Collection and Analysis

After instructional treatment, an open-ended test with four questions were prepared. After reliability study of the test with the consistency of coding (Miles ve Huberman, 1994), it was applied. According to the results of the test, the students were divided into four groups. For clinical interviews, one student, who represented the group characteristics was selected by using purposive sampling (Yıldırım & Şimşek, 2003). Then, the interviews were conducted with selected four students to determine the understanding level of functions and the relationship between their understanding level of function concept and their construction of polar function. Finding of the interviews was analyzed qualitatively by using content analysis technique and the students' understanding level of the concept of function was determined with APOS (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996).

Results

It was concluded that students' conceptual level of function concept and their construction of polar function concept were directly related. Findings of the study demonstrated that the students whose function conceptual level were at least process were able to construct the concept of polar function. Furthermore, also central line test was used by almost all participants in order to investigate the graphical polar function situations in polar coordinates. Moreover, it was seen that students` misconceptions and difficulties with the functions were also transformed to the polar functions. On the other hand, students did not have new misconception or difficulty with the polar functions.

Discussion and Conclusion

In the study, it was obtained that the students could carry their function notion to polar coordinates. On contrary to findings of Montiel et al., it was observed that the students did not construct new concept misconceptions. Moreover Montiel et al. detected that most of the students tend to examine function situations in polar coordinates by switching to cartesian coordinates. They added also that most students applied vertical line test to polar curves. In this study, there were no students who tried to apply the vertical line test to polar curves. They analyzed polar curves with central line test correctly. Additionally, it was seen that their success was related to their understanding level of functions directly. Moreover, the students acquired notion of polar function, and only some of the misconceptions were revealed in this study. Introducing the polar functions in teaching process of polar coordinates in the context of single variable analysis is asserted not only in study of Montiel et al. but also in this study. On the other hand, it is not possible to introduce the concept of transformation and polar transformations in the context of single variable courses. Since such an introduction is possible in the context of two variable analysis course, teaching activities that can support students` transforming function notion from cartesian to polar coordinates become possible after this introduction. That is, as Montiel et al. claimed, polar functions should be introduced while polar coordinates are teaching, and then in the context of two variable concepts, again polar functions should be given by teaching activities that can support students transforming of function notion to polar coordinates after polar transformation is given in the teaching approach adopted in this study.

Analiz II Öğrencilerinin Kutupsal Fonksiyonları Oluşturmaları

Tangül KABAEL†

Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, TÜRKİYE

Makale Gönderme Tarihi: 16.01.2013 Makale Kabul Tarihi: 13.01.2015

Özet – Bu çalışma araştırmacının, üniversite öğrencilerinin fonksiyon kavramını kartezyen ve kutupsal koordinatlarda anlamaları arasındaki ilişkiyi inceleyen önceki çalışmasının devamı niteliğindedir. Bir eğitim fakültesi matematik öğretmenliği programı Analiz II dersi içeriğinde yer alan dönüşümler konusu bağlamında kutupsal dönüşüm ve kutupsal fonksiyonlar kavramlarının öğretimine yer verilmiştir. Bu öğretim süreci, kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin araştırmacının da katkı sağladığı, alan yazında bulunan birkaç çalışmanın bulguları ışığında tasarlanmıştır. Bu çalışmalar yalnızca ilişkili matematiksel konularda kutupsal koordinatları kullanan ve kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin öğretim yapılmamış olan öğrencilerin fonksiyon kavramını kutupsal koordinatlara taşıyamadıklarını, düşey doğru testi gibi Kartezyen koordinatlarda kullandıkları yöntemleri ezbere kutupsal koordinatlarda kullanmaya çalıştıklarını göstermiştir. Nitel olarak desenlenen bu çalışma ile Analiz II öğrencilerinin kutupsal fonksiyonları oluşturma durumlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın verileri açık uçlu test ve klinik görüşme teknikleri ile elde edilmiş ve veriler içerik analizi tekniği ile analiz edilmiştir. Çalışmada Analiz II öğrencilerinin kutupsal fonksiyon kavramını oluşturdukları sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin kutupsal fonksiyon kavramını oluşturmaları ile fonksiyonları anlama düzeyleri arasında direk bir ilişki olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: kutupsal fonksiyonlar, kutupsal koordinatlar, fonksiyon kavramı.

Giriş

Kutupsal koordinatlar, ülkemizde öğrencilerin ilk olarak orta öğretimde karmaşık sayılar konusunda karşılaştıkları bir kavramdır. Ülkemizde öğrencilerin kutupsal koordinatlar ile tekrar karşılaşması lisans düzeyinde ve bölüme göre değişmek üzere, fen ve matematik alanlarında, genel matematik, analiz gibi tek değişkenli fonksiyonlar ve ilişkili kavramlar

---

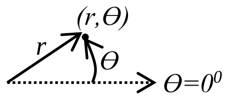
† *İletişim: Doç.Dr. Tangül Kabael, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, Eğitim Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, TÜRKİYE.

E-mail: tuygur@anadolu.edu.tr

üzerine kurulmuş derslerde olur. Bu derslerin içerikleri incelendiğinde ise genel olarak kutupsal koordinatların, cebirsel ifadelerin kutupsal ve kartezyen koordinatlar arasındaki dönüştürmelerinde ve kutupsal koordinatlarda verilen eğrilerin çiziminde kullanıldıkları görülmektedir. Matematik dersi öğretim programlarının bu bağlamdaki incelenmesi uluslararası olarak yapıldığında da ilişkili derslerin içeriklerinde ülkemize benzer durumlarla sıklıkla karşılaşılmaktadır. Ülkemizde var olan bu öğretim sürecindeki uygulamalarda öğrenciler kilit nokta kabul edilebilecek özellikteki bazı eğrilerin kutupsal koordinatlardaki cebirsel ve grafik temsillerini tanırlar. Kutupsal koordinatlar, öğrencilerin daha sonraki matematik öğrenim yaşantılarında da, integral uygulamaları gibi konularda oldukça büyük öneme sahip bir kavram olarak yerini alır. Diğer yandan, bu uygulamalarda öğrenciler kutupsal koordinatlarda ifade edilen fonksiyonları yani kutupsal fonksiyonları kullanıyor olmalarına karşın, fonksiyon kavramına ilişkin anahtar bilgileri kutupsal koordinatlara taşımalarını gerektiren kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin herhangi bir öğretim etkinliği ile karşılaşmazlar. Öğrencilerden kutupsal ve kartezyen koordinatlar arası dönüştürmeler ve kutupsal koordinatlarda grafik çizimi ile fonksiyon kavramını ve bu kavrama ilişkin pek çok bilişsel beceriyi kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara taşımaları beklenilmektedir. Bunun yanı sıra Oh, Kwon, Park ve Lee'nin (2013) de vurguladığı gibi matematik eğitimi alan yazınında pedagojik açıdan kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyonlara yer verilmemiştir.

Fonksiyon kavramı göz önüne alındığında ise matematik eğitimi alan yazını pek çok çalışmaya sahiptir. Bu çalışmalar genel olarak göz önüne alındığında, bir kısmı fonksiyon kavramının öğrenilmesini (örn., Dubinsky & Harel, 1992; Thompson, 1994), bir diğer önemli kısmı ise kavrama ilişkin öğrenci güçlük ve yanılgılarını, fonksiyon kavramının çoklu temsillerini ya da öğretimini (örn., Tall & Vinner, 1981; Janvier, 1987; Vinner ve Dreyfus, 1989; Ferrini-Mundy & Graham, 1990; Bakar & Tall, 1991; Sierpinska, 1992; Yerushalmy, 1997; Breidenbach, Hawks, Nichol, & Dubinsky, 1992) konu almıştır. Yapılan çalışmalar (örn., Vinner ve Dreyfus, 1989) öğrencilerin fonksiyon kavramının formal tanımına ilişkin yanılgılarının, kavramı "*bir eşleme*", "*bir formül*" ya da "*bir denklem*" gibi eksik ya da hatalı bir biçimde tanımlamalarından kaynaklandığını göstermiştir. Çalışmalarda fonksiyon kavramına ilişkin sıklıkla karşılaşılan bir öğrenci yanılgısı, bir bağıntının fonksiyon olma koşulunun, bir fonksiyonun bire-bir olma koşulu ile karıştırılmasıdır. Bunun yanında, verilen temsillerden fonksiyon durumlarının belirlenmesi istenildiğinde öğrencilerin kavramın formal tanımını göz ardı ederek cevap verdikleri görülmüştür (Tall ve Vinner, 1981). Değişken içermediği gerekçesi ile bir sabit fonksiyonun cebirsel ifadesi için fonksiyon olmama ya da “*bilindik olma*” gerekçesi ile matematik derslerinde sürekli karşılaştıkları bir çember ya da *x*-eksenini saran bir parabol grafiği için fonksiyon olma yorumu sık karşılaşılan öğrenci yanılgılarına örnek olarak verilebilir.

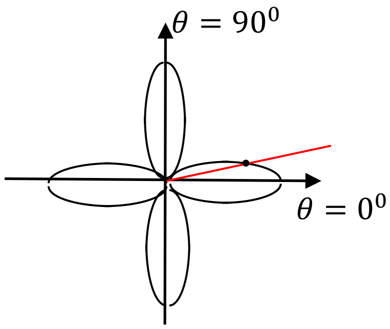
Koordinatları *r* ve θ olan kutupsal düzlemdeki bir nokta (r,θ)ikilisi ile temsil edilir.



Şekil 1 Kutupsal Koordinat Eksenleri ve Kutupsal Düzlemde Bir Nokta

Bir kutupsal fonksiyon ise genel olarak θ bağımsız değişken, *r* ise bağımlı değişken olmak üzere $r=\rho(\theta)$ şeklinde gösterilebilir. İçeriğinde kutupsal koordinatlar ve bu koordinatlar ile uygulamalara yer veren derslerde “$r=$” formunda cebirsel eşitliklerle kullanılan kutupsal fonksiyonların kartezyen koordinatlardaki $f(x)$ gösterimine benzer biçimde $\rho(\theta)$ şeklinde gösterilebileceği ve burada θ nın bağımsız değişken, ρ nin ise θ nın bir fonksiyonu olduğu üzerinde durulması, fonksiyon kavramının bilişsel gelişimi için de oldukça önemlidir (Montiel, Vidakovic ve Kabael, 2008). Dolayısıyla fonksiyon kavramında karşılaşılan öğrenci güçlük ve yanılgıları göz önüne alındığında fonksiyon kavramının kutupsal koordinatlara taşınması ile öğrenci güçlük ve yanılgılarının nasıl bir hal alacağı araştırılması gereken bir noktadır.

Kutupsal düzlemde verilen bir grafiğin bir fonksiyon grafiği olup olmadığının araştırılması da kutupsal koordinatlara paralele olarak kartezyen koordinatlardan farklılaşmaktadır. Kutupsal koordinatlarda fonksiyon araştırmasında, alınan bir θ_0’a karşılık $r_0=\rho(\theta_0)$ olacak biçimde bir tek r_0’ın varlığının araştırılması gerekir. Dolayısıyla kutupsal düzlemde verilen bir eğrinin fonksiyon grafiği olup olmadığı Şekil 2’de görüldüğü biçimde *merkezi doğru testi* ile yapılabilir.



Şekil 2 Merkezi Doğru Testi

Kutupsal koordinatların (r,θ)standart temsilinin, kartezyen koordinatların standart (x,y) temsilindeki bağımlı ve bağımsız değişken sırasını değiştirmesi ve kartezyen koordinat sisteminde fonksiyon durumu araştırmasında geometrik olarak kullanılan "*düşey doğru testi*" nin aynı şekliyle kutupsal koordinatlarda anlam ifade etmemesi fonksiyon kavramının kutupsal koordinatlara taşınmasındaki zorluğu açığa çıkarmaktadır.

Montiel, Vidakovic ve Kabael (2008) Amerika Birleşik Devletlerindeki bir devlet üniversitesinde matematik öğretmenliği, matematik, istatistik, v.b çeşitli bölümlerin öğrencileri tarafından alınan Calculus II dersinde öğrencilerin fonksiyon kavramını kutupsal koordinatlara taşımalarını incelemişlerdir. Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e) kutupsal koordinatlarda bazı özel eğriler ve iki eğri arasındaki alanın integral yardımı ile bulunması uygulamaları dışında Calculus II dersinde kutupsal koordinatlara yer verilmediğini, kutupsal fonksiyonlara formal anlamdan ziyade ancak hikâyeleştirerek yer verebildiklerini belirtmişlerdir. Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e) tarafından yürütülen çalışmada kartezyen koordinatlarda fonksiyon kavramına ilişkin öğrenci yanılgılarının, alan yazına kaydedilmiş fonksiyon kavramına ilişkin öğrenci yanılgıları (Bakar & Tall, 1991; Confrey & Smith, 1991; Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992) ile uyumlu olduğu görülmüştür. Örneğin, *y=3* cebirsel ifadesi için bağımsız değişken içermediği gerekçesi ile fonksiyon olmadığı yanılgısına ulaşılmış ve bu yanılgıya sahip olan öğrencilerin aynı cebirsel ifadenin grafik temsiline ise "*düşey doğru testi*" ni kullanarak fonksiyon olma yorumunu yaptıkları görülmüştür. Fonksiyon kavramına ilişkin elde edilmiş bir diğer öğrenci yanılgısı ise yine alan yazına kaydedilmiş olan, fonksiyon olup olmama durumuna verilen temsilin öğrenci için "*bilindik*" olup olmamasına göre karar verme yanılgısıdır. Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e) öğrencilerin, kartezyen koordinatlarda fonksiyon kavramına ilişkin bazı yanılgılarını kutupsal koordinatlara taşımalarının yanı sıra ayrıca kutupsal koordinatlarda fonksiyon kavramına ilişkin yeni kavram yanılgılarına sahip oldukları sonucuna varmışlardır. Örneğin, sabit fonksiyon temsillerine fonksiyon olmama yorumu yapma yanılgısını çoğu öğrencinin kutupsal koordinatlara taşıdığı, kutupsal koordinatlarda ise bir temsilin fonksiyon olup olmamasına, kutupsal koordinatlarda bazı eğrilerin çiziminde bir araç olarak kullandıkları "*simetri*" ile ya da kartezyen koordinatlarda kullandıkları "*düşey doğru testi*" ile karar verdikleri görülmüştür. Benzer şekilde Oh, Kwon, Park ve Lee (2013) de öğrencilerin kutupsal koordinatlarda "*simetri*" ile karar vermeye eğilimli olduklarını görmüşlerdir.

Montiel, Vidakovic ve Kabael, öğrencilerin çoğunun (%80'inin) kutupsal koordinatlarda grafik çizimi ya da kutupsal ve kartezyen koordinatlar arasında cebirsel dönüştürme yapabildiklerini, sınır eğrileri kutupsal koordinatlarda verilen düzlemsel bölgelerin alanlarını veren integralleri oluşturabildiklerini ancak öğrencilerin bu bilişsel becerilerinin kutupsal koordinatlarda fonksiyon kavramı bilgisine yol açmadığı ve öğrencilerin kartezyen koordinatlarda fonksiyon kavramını anlama seviyeleri ile fonksiyon bilgisini kutupsal koordinatlara taşımaları arasında da direk bir ilişki olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Alan yazındaki kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin boşluğu doldurma konusunda katkı sağlaması bu araştırmanın öncelikli önemini oluşturmaktadır. Ayrıca fonksiyon kavramının bilişsel gelişimindeki yeri alan yazında vurgulanan (Montiel, Vidakovic ve Kabael, 2008; Oh, Kwon, Park ve Lee, 2013) ve katlı integral uygulamaları gibi çeşitli bağlamlarda kutupsal koordinatların anlamlı kullanımını sağlayan kutupsal fonksiyon kavramının kutupsal dönüşüm bağlamında iki değişkenli analiz dersinde yer verilmesiyle oluşan bilişsel gelişim sürecini inceleyen bu araştırmanın kutupsal fonksiyonların pedagojik yeri konusunda önemli yere sahip olacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada, kutupsal koordinatların yanı sıra kutupsal fonksiyonların öğretiminin yapılması durumunda öğrencilerin kutupsal fonksiyonları oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bir eğitim fakültesi, ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan iki değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar üzerine kurulan türev ve integral kavramlarını incelen Analiz II dersi kapsamında yürütülmüş olan bu çalışmada, öğrencilerin kutupsal fonksiyonları oluşturma süreçlerinin incelenmesi genel amacının yanı sıra, kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin öğretim içeren süreçte, alan yazında bu bağlamda karşılaşılan öğrenci güçlük ve yanılgılarının (Montiel, Vidakovic ve Kabael, 2008; Oh, Kwon, Park ve Lee, 2013) nasıl hal aldığının araştırılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmaktadır:

- Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama düzeyleri ile kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturmaları arasındaki ilişki nedir?
- Öğrencilerin *"merkezi doğru testi"* ni kavrama durumları nasıldır?
- Öğrencilerin kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyonlara ilişkin sahip oldukları güçlük ve yanılgılar nelerdir?

Teorik Çerçeve

Bu çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama düzeyleri APOS öğrenme teorisine göre belirlenmiştir. APOS (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996) teorisinde bir kavramın öğrenilme sürecinde bireyin oluşturabileceği zihinsel yapılandırmalar *eylem (action), süreç (process), nesne (obje)* ve *şema (schema)* olarak isimlendirilir. Anlama düzeyi eylem olan bir birey, eylemi yansıttığında ve içsel bir işlem oluşturduğunda, eylemi *içselleştirerek* süreç düzeyine ulaşır. Süreç düzeyinde olan bir birey, eylemi süreç üzerinde uyguladığında süreci matematiksel bir nesne olarak algılamıştır ve bu duruma sürecin matematiksel bir nesne olarak içerilmesi adı verilir. Şema ise bireyin zihninde eylem, süreç, nesne ve diğer şemaların uyumlu bir koleksiyonudur.

Fonksiyon kavramını anlama düzeyleri, APOS öğrenme teorisine göre Ed Dubinsky ve çalışma arkadaşları tarafından (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Dubinsky, 1991) belirlenmiştir. Buna göre, fonksiyon kavramını anlama düzeyi eylem olan bir öğrenci, cebirsel formülü ile verilen bir fonksiyonun girdi ya da çıktı değerlerini hesaplayabilir. Ancak, bir fonksiyon formülü üzerinde hesaplama yapmaksızın bir temsilin fonksiyon olup olmadığı yorumunu yapma bu düzeydeki bir öğrenci için güçlük kaynağıdır. Ayrıca eylem düzeyindeki bir öğrenci, bir fonksiyonun tersi, fonksiyonların bileşkesi ya da türev alma konularında hesaplama yapmanın ötesinde bu hesaplamaların sonuçlarının yine bir fonksiyon olması gibi matematiksel yorumlarda bulunamaz. Dubinsky'e göre (a.g.e) bu düzeydeki bir öğrencinin fonksiyonlar için tipik bir örneği, x^2+3 şeklinde bir cebirsel ifadedir. Yani bu öğrencinin fonksiyon bilgisi "*formül*" ile sınırlıdır. Ayrıca Dubinsky, eylem düzeyindeki bir öğrencinin tanım ve değer kümesi bilgilerine sahip olmadığını ve fonksiyonları grafikleri ile ilişkilendiremediğini ifade eder. Fonksiyonları anlaması süreç düzeyine gelmiş bir öğrenci ise fonksiyonu bağımsız değişken denilen girdi ile bağımlı değişken olan çıktı arasında bir eşleme olarak görebilir ve bir girdiye uygulanan bazı işlemler sonucunda tek bir çıktı elde edildiğini algılayabilmiştir. Dubinsky (a.g.e) fonksiyon kavramını anlama düzeyi süreç olan bir öğrencinin, bir temsil durumunun fonksiyon olup olmadığını algılayabileceğini belirtir. Dubinsky (a.g.e) ayrıca, süreç düzeyindeki bir öğrencinin verilen bir geometrik temsilin fonksiyon olup olmadığının analizini, fonksiyon bilgisi ile grafiğin fiziksel şeklini ilişkilendirerek yapabileceğini, yatay eksen üzerindeki bir x noktasındaki yüksekliğin $f(x)$ değeri olduğu bilgisine sahip olacağını vurgular. Dubinsky ve Harel (1992), fonksiyonları anlamanın süreç düzeyinin oldukça karmaşık olduğu ve aşağıda verilen dört faktörü içerdiği sonucuna ulaşmışlardır:

1. Fonksiyonların ne olduğuna ilişkin öğrencilerin sahip oldukları kısıtlamalar: Gözlenen üç ana kısıtlama vardır:
   (a) *Manipülasyon kısıtlaması (the manipulation restriction)*: Bu kısıtlamaya sahip bir öğrenci belirli bir manipülasyon uygulama (girdi-çıktı hesabı gibi) dışındaki durumlarda fonksiyon algısına sahip olmaz.
   (b) *Nicelik kısıtlaması (the quantity restriction)*: Bu kısıtlamaya göre girdi ve çıktılar sayı olmalıdır.
   (c) *Süreklilik kısıtlaması (the continuity restriction)*:Bu kısıtlamaya sahip bir öğrenci için bir grafik, eğer bir fonksiyonu temsil ediyorsa sürekli olmalıdır.
2. Katılık Kısıtlaması *(severity of the restriction)*: Bazı öğrenciler bir durumu fonksiyon olarak belirleyebilmek için, verilen bir girdiye karşılık gelen çıktıyı bulabilecekleri belirli bir cebirsel ifadeyi bilmek isterler. Diğer öğrenciler için ise nasıl manipülasyon yapılacağı bilgisine sahip olmasalar dahi, bir ifadenin varlığı yeterlidir.
3. Bir fonksiyon süreci oluşturma kısıtlaması: Bir fonksiyon süreci oluşturma becerisi ile de süreç düzeyinde bir öğrenci güçlüğü olarak karşılaşılmaktadır.
4. Sağa teklik koşulu; 1-1 olma ile karıştırma: Dubinsky ve Harel (a.g.e) bu konunun süreç düzeyinde kavrama ile ilişkili olduğunu iddia etmişlerdir. Dubinsky ve Harel'e göre öğrenciler arasında sıklıkla karşılaşılan bu karmaşa ancak fonksiyon kavramının süreç düzeyinde anlaşılması ile çözüme kavuşabilir. Fonksiyon süreci bilgisi, sonlanan noktanın tekliğini gerektirirken fonksiyonun 1-1 (bire-bir) olması başlangıç noktasının tekliği ile ilgilidir.

Fonksiyon kavramının süreç olarak bilincinde olan ve gerektiğinde başka eylem ya da süreçleri fonksiyonlara uygulayarak, fonksiyonları matematiksel nesne olarak görebilen öğrencinin kavramı anlaması ise nesne düzeyine ulaşmıştır. Fonksiyon kavramını anlamadaki bilişsel gelişimi şema düzeyine ulaşmış bir öğrenci ise, bu gelişim sürecini tamamlamıştır ve kavramı gereken başka her duruma aktarabilir.

Yöntem

Öğrencilerin kutupsal fonksiyon bilgisi oluşturma durumlarının araştırılmasının amaçlandığı bu çalışmada bir nitel araştırma yöntemi olan "*öğretim deneyi (teaching experiment)*" kullanılmıştır. Kelly ve Lesh'in (2000) de belirttiği gibi öğretim deneyi yöntemi, matematik ve fen eğitimindeki araştırmalarda karakteristik özellikleri açıkça ortaya koyabilecek en uygun araştırma yöntemi olarak kabul edilir. Piaget'in (1970) klinik yöntemi üzerine geliştirilmiş olan öğretim deneyi yöntemi öğrencilerin matematiksel kavramları oluşturma süreçlerinde zihinlerinde meydana gelen zihinsel eylemleri incelemeyi ve gerektiğinde bu inceleme sonucunda elde edilen veriler ışığında öğretim yaklaşımını yeniden düzenlemeyi içerir. Bu araştırmada da, verileri klinik görüşmeler yolu ile toplanmış olan Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (a.g.e) elde ettiği sonuçlar ışığında düzenlenmiş olan öğretim sürecinde öğrencilerinin zihinsel eylemlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Cobb ve Steffe (1983), öğretim deneyinin bir grup katılımcı ile aynı zamanda öğretici olan araştırmacı arasındaki bir etkileşim olduğunu belirtir. Cobb ve Steffe'nin (a.g.e) de vurguladığı gibi bu araştırmada öğretim deneyinde öğretici aynı zamanda araştırmacı rolünü üstlenmektedir. Nitel araştırmaların doğasına uygun olarak, bu yöntemde öğretim yaklaşımının etkisine değil öğretim sürecinde matematiksel bilginin oluşum biçimine odaklanılmaktadır.

Katılımcılar

Çalışmanın yapıldığı devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında Analiz II dersleri, o dönem derse kayıtlı öğrenci sayısına göre, öğretim elemanları farklı olan iki ya da üç gruba ayrılmaktadır. Nitel araştırmalarda araştırmacı, çalışma alanında zaman harcayan, bu alandaki kişilerle görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan ve alanda kazandıklarını verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2003, s.23). Bu nedenle ders içeriklerinin ve değerlendirmelerin paralel yürütüldüğü üç ders grubundan, araştırmacının öğretim elemanı olduğu grubu oluşturan 35 öğrenci, kolay ulaşılabilir durum örneklemesi yöntemi (Yıldırım ve Şimşek, 2003) kullanılarak araştırmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir.

Öğretim Süreci

Cobb ve Steffe (1983), amacı katılımcıların matematiksel bilgisini ortaya çıkarmak olan araştırmaların öğretim süreci içermesi gerektiğini vurgular. Araştırmanın yürütüldüğü iki değişkenli kavramların analizini içeren Analiz II dersi kapsamında, iki katlı integral kavramı, geometrik yorumu ve tekrarlı integral ile iki katlı integral hesaplaması uygulamalarının ardından koordinat dönüşümleri ve bu dönüşümler yardımı ile iki katlı integral kullanılarak yapılan alan ya da hacim hesaplamaları yer almaktadır. Kutupsal ve silindirik koordinatlarda iki katlı integral uygulamalarına geçmeden önce, "*dönüşüm*" kavramı ve çeşitli basit dönüşüm örnekleri verilmiştir. Ardından

$$T: IR^2 \to IR^2, \quad (x,y) \to (r,\theta), \quad T: \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

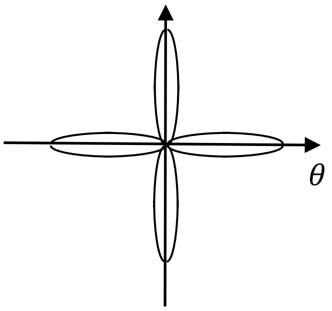
şeklinde verilen kutupsal dönüşümünle ilgili uygulamalara başlanılmıştır. Öğrencilerin daha önce kutupsal koordinatlar olarak tanıdığı ve kartezyen koordinatlar ile arasında çeşitli dönüştürme uygulamalarının yapıldığı kutupsal dönüşümün tanıtılmasından sonra, öğrencilerin bu uygulamalar ile kutupsal dönüşüm arasında ilişki kurabilmelerini sağlamak amacı ile dönüşüm altında görüntü bulma uygulamaları yapılmıştır. Bu uygulamalar sırasında, kartezyen koordinatlarda görüntüsü bulunacak alt kümenin koordinat düzleminde grafiği çizilerek önce bu koordinatlarda fonksiyon belirtip belirtmediği incelenmiş, daha sonra ise kutupsal dönüşüm altında görüntüsü bulunarak, bu görüntünün kutupsal koordinatlarda grafiği çizilmiş ve kutupsal bir fonksiyon belirtip belirtmediği incelenmiştir. Bu yol öğrencilerin kartezyen koordinatlarda grafik temsillerinin fonksiyon olup olmama durumunun araştırılmasında kullanılan "*düşey doğru testi*" nin kutupsal koordinatlarda nasıl "*merkezi doğru testi*" ne dönüştüğünü algılamaları amaçlanmıştır. Bunun yanı sıra öğrencilerin kartezyen koordinatların *(x,y)* şeklindeki temsilindeki bağımlı-bağımsız değişken sıralamasının, kutupsal koordinatların *(r,Θ)* temsilindeki şeklini kavramaları amacı ile kartezyen ve kutupsal koordinatlarda cebirsel temsilleri sırası ile *y=f(x)* ve *r=f(Θ)* şeklinde olan fonksiyon örnekleri ve bunların grafik temsilleri karşılaştırılmıştır. Böylece öğrencilerin, kutupsal fonksiyon araştırması sırasında "*merkezi doğru testi*" ni genel fonksiyon bilgisi ile ilişki kurarak uygulamaları yani bu test ile orijinden geçen bir doğrunun eğriyi kestiği nokta sayısına bakarken, seçilen bir *Θ'* ya kaç tane *r*'nin karşılık geldiği araştırılması yapıldığını algılamaları sağlanmaya çalışılmıştır.

Daha önce öğrencilerin tek değişkenli analiz derslerinde yapmış oldukları kutupsal eğri çizimi uygulamalarından çeşitli örnekler burada tekrar edilmiş ve çizilen bu eğrilerin kutupsal fonksiyon belirtip belirtmediğine ilişkin incelemeler yapılmıştır. Yapılan bu incelemeler ile de kutupsal fonksiyon kavramının kazanımı desteklenmeye çalışılmıştır. Burada öğrencilerin sahip oldukları fonksiyon bilgisini kutupsal koordinatlara taşımalarına yardımcı olacak yönlendirme ve örneklerin seçimine özen gösterilmiştir.

Veri Toplama Araçları ve İşlem

Cobb ve Steffe (1983), öğretim deneyi yönteminde, gerekli görülen bütün nitel veri toplama araçlarının kullanılabileceğini belirtmiştir. Araştırmanın verilerinin toplanmasında açık-uçlu test ve klinik görüşme teknikleri kullanılmıştır. Analiz II dersinde dönüşüm, kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyon kavramlarının kazandırılmasına yönelik, yukarıda bahsedilen yaklaşım ile yapılan öğretimin ardından kutupsal dönüşüm, kutupsal düzlemin koordinat eksenleri, kartezyen ve kutupsal koordinatlar arası dönüştürme işlemleri ve kutupsal fonksiyon kavramları üzerine dört açık uçlu sorudan oluşan aşağıda verilen test araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Hazırlanan bu test öğrencilerin kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyon bilgilerini ölçmeye yönelik hazırlandığından, birinci ile üçüncü araştırma sorularına hizmet etmektedir.

1. Kutupsal dönüşümü yazınız.
2. Kutupsal dönüşümün görüntü kümesi olan kutupsal düzlemin koordinat eksenlerini grafik de çizerek açıklayınız.
3. $x^2+y^2=1$ cebirsel eşitliği Kartezyen koordinatlarda fonksiyon belirtir mi, neden? Bu eşitliği sağlayan noktalar kümesinin kutupsal dönüşüm altındaki görüntüsünü bulunuz. Görüntü kümesi kutupsal düzlemde bir fonksiyon ($r=f(\theta)$) belirtir mi, neden?
4.



Şekilde kutupsal düzlemde verilen grafik bir kutupsal fonksiyon ($r=f(\theta)$) belirtir mi? Neden?

Hazırlanan testin önce kapsam geçerliliğinin sağlanması için bir alan uzmanının görüşleri alınmış ve güvenilirliğini ölçmek için dersin diğer gruplarından bir öğrenci ile pilot uygulaması yapılmıştır. Uygulaması yapılan test içerik analizi (Yıldırım ve Şimşek, 2003) yöntemi ile analiz edilmiştir. Pilot uygulamadan elde edilen veriler, birinin araştırmacı olduğu iki alan uzmanı tarafından bağımsız olarak kodlanmıştır ve daha sonra kodlama güvenirlik çalışması yapılmış (Miles ve Huberman, 1994) ve kodlamaların tutarlı olduğu görülmüştür. Yapılan güvenirlik çalışmasının ardından test uygulanmış ve elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Daha sonra öğrenciler, uygulanan testte kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve özellikle de kutupsal fonksiyonlar konularında göstermiş oldukları performanslara göre dört gruba ayrılmışlardır.

Birinci grup: Birinci grup, kutupsal dönüşümü yalnızca $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ eşitlikleri ile veren, kutupsal eksen bilgisi eksik gözüken, cebirsel ya da grafik temsilinden kutupsal fonksiyon incelemesini ise eksik ya da tamamen yanlış yapan 10 öğrenciden oluşmuştur.

İkinci grup: İkinci grubu oluşturan beş öğrenci ise kutupsal dönüşüm ve kutupsal eksenler konularında birinci gruptaki öğrenciler ile aynı sonuçları vermişler, ancak bu öğrenciler cebirsel temsilde kutupsal fonksiyon incelemesini eksik yapsalar bile grafik temsili üzerinden yaptıkları incelemede, kutupsal fonksiyon bilgisi yansıtmışlardır.

Üçüncü grup: Üçüncü grubu, kutupsal dönüşüm ve kutupsal eksenler bilgileri tam olan ancak, cebirsel ve grafik temsillerinde kutupsal fonksiyon bilgisine sahip olmayan, fonksiyon kavramını anlama açısından sağa teklik koşulunu 1-1 olma ile karıştırma gibi kısıtlamalara sahip olabilen sekiz öğrenci oluşturmuştur.

Dördüncü grup: Sonuncu yani dördüncü grup ise, uygulanan testte kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlarda eksenler ve kutupsal fonksiyon kavramlarına ilişkin bilgi kazanımları en yüksek düzeyde görünen 12 öğrenciden oluşmuştur.

Araştırmada testin sonuçlarına göre yapılan bu gruplamanın ardından, klinik görüşme tekniği ile veri toplanmak üzere her gruptan, testteki performansı grubun özelliklerini açıkça gösteren bir öğrenci, ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak görüşme yapılmak üzere seçilmiştir. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Klinik görüşme, öğrencilerin düşünme yapılarını, bilişsel süreçlerini derinlemesine anlamaya yardımcı olabilen ve dolayısıyla da matematik eğitiminde sıkça kullanılan bir görüşme tekniği (Ginsburg, 1981; Clement, 2000) olduğundan, bu araştırmada da tercih edilen teknik olmuştur. Klinik görüşme soruları hazırlanmış, uzman görüşüne sunulmuş ve pilot çalışması yapılarak aşağıda görüldüğü gibi son hali verilmiştir. Görüşmeler sırasında öğrencinin vermiş olduğu yanıta göre, klinik görüşme tekniği çerçevesinde çeşitli alt sorular yönlendirilmiş olmakla birlikte, burada yalnızca bütün öğrencilere ortak olarak yöneltilen alt sorular verilmektedir. Ayrıca görüşmelerde hazırlanan sorulara yanıt aranırken, öğrencilerden gelen ifadelere göre, yönlendirme yapmaksızın, düşünme biçimlerini derinlemesine ortaya koymalarını sağlayacak biçimde “neden?”, “nasıl düşündün” gibi soru biçimleri seçilmiştir. Klinik görüşmelere başlanmadan önce öğrencilere, görüşmelerin ne amaçla ve nasıl kullanılacağı açıklanmış ve kendilerinden görüşme izni alınmıştır. Görüşmeler sırasında öğrencilere çalışma kâğıdı verilerek, soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri ve aynı zamanda soruların yazılı çözümleri için çalışma kâğıdını kullanmaları istenilmiştir. Veri kaybını önlemek amacı ile çalışma kâğıdına hatalı yazımda bulunduklarında silmemeleri, çalışma kâğıdında bir alt satıra devam etmeleri konusunda istekte bulunulmuştur. Görüşmeler ortalama 30 dakika sürmüş ve ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır.

1. Fonksiyon nedir?

   *Fonksiyon kavramının tanımını yazar mısın?

2. Eşitlik / küme / tablo / grafik Kartezyen koordinatlarda fonksiyon belirtir mi? Neden? (Aşağıdaki her bir şık için soru uygun biçimde tekrarlanmış ve öğrencinin fonksiyon olarak belirttiği şıklarda öğrenciden fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirlemesi istenilmiştir)

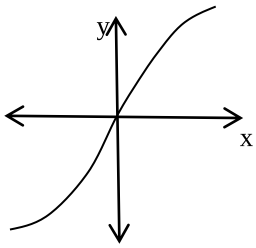
a) $y^2 = 3x^2$

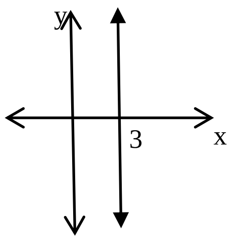
b) $\{(x, 2x^2+1) \mid x \in Z\}$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d)

x	2	3	4	6	7	9
y	5	7	9	13	15	19

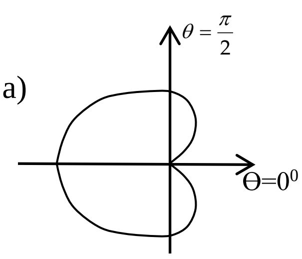
e) 

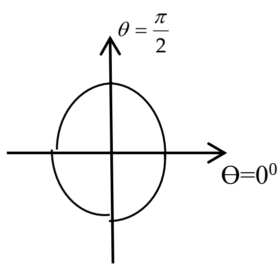
f) 

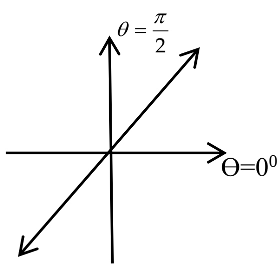
3. Kutupsal dönüşüm nedir?

4. Kutupsal koordinatların eksenlerini açıklar mısın?

5. Grafik kutupsal koordinatlarda fonksiyon (r=f(θ)) belirtir mi, neden? (Aşağıdaki şıklar için soru tekrarlanmıştır)

a) 

b) 

c) 

d) $r = |sin\theta|$

e) $\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\theta=\dfrac{\pi}{4}, r\in R^{+}\right\}$

f) $r=4$

6. Kutupsal dönüşüm altında $A=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,x=y\right\}$ kümesinin görüntüsü nedir, bulunuz. Görüntü kümesinin grafiğini çiziniz.

Klinik görüşmenin amaçlarından biri, öğrencilerin fonksiyonları anlama düzeylerini belirlemek ve anlama düzeyleri ile kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturmaları arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Fonksiyon kavramını anlama düzeyinin başlıca ölçüt davranışları kavramın tanımını yapma ve çeşitli temsillerdeki fonksiyon durumlarını algılama olduğundan, klinik görüşmenin başında fonksiyon kavramının ne olduğu sorulmuş, ardından da kartezyen koordinatlarda verilen cebirsel, ikililer kümesi, tablo ve grafik temsillerinin fonksiyon belirtip belirtmediği nedenleri ile sorulmuştur. Daha sonra öğrencinin kutupsal fonksiyonları kazanma durumunu araştırmak amacı ile benzer biçimde beşinci soruda kutupsal koordinatlarda çeşitli temsiller verilmiş ve bunların fonksiyon olup olmadığı sorulmuştur. Bunun yanı sıra klinik görüşme tekniği ile öğrencilerden sesli düşünmeleri istenilerek, görüşülen öğrencilerin kutupsal düzlemde verilen bir eğrinin kutupsal fonksiyon belirtip belirtmediği konusunda yalnızca sonucu değil araştırma yolunu yani merkezi doğru testini kullanıp kullanmadığı, kullanıyorsa nasıl kullandığının da ortaya çıkarılması amaçlanmış ve böylece ikinci araştırma sorusuna ilişkin veriler de bu yolla sağlamıştır. Üçüncü, dördüncü ve altıncı sorularla ise öğrencilerin kutupsal dönüşüm ve kutupsal koordinatlar bilgilerinin ortaya koyulması amaçlanmıştır. Nitel araştırmada geçerliğin ve güvenirliğin sağlanmasında kullanılan önemli ölçütlerden biri, "veri çeşitlemesi" (triangulation) dir (Yıldırım ve Şimşek, 2003) ve burada da klinik görüşme açık-uçlu testin amaçlarına yönelik de soru maddeleri içerdiğinden veri çeşitlemesi yolu ile çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini de sağlamaktadır.

Klinik görüşmelerden elde edilen veriler içerik analizi (Yıldırım ve Şimşek, 2003) yöntemi ile analiz edilmiştir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama düzeylerini belirlemeye ilişkin geliştirilmiş olan sorulardan elde edilen verilerin analizleri, fonksiyon kavramının Dubinsky ve arkadaşları (Breidenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992; Dubinsky ve Harel, 1992; Dubinsky, 1991) tarafından APOS çerçevesinde anlama seviyelerinin belirlenmesinde kullanılan ölçüt davranışlara göre yapılmıştır. Bu ölçüt davranışlardan bu çalışmada kullanılmış olanları teorik çerçevede verilmiştir. Bunlar fonksiyon kavramının tanımı ve verilen bir temsilin fonksiyon olup olmama durumunun araştırılması ile ilişkilidir.

Bulgular

Çalışmada uygulanan açık uçlu testten elde edilen veriler ölçüt örneklemeye hizmet etmenin yanı sıra, öğrencilerin kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyon bilgilerini ortaya koyduğundan üçüncü araştırma sorusuna ve öğrencilerin kutupsal fonksiyon kavramını oluşturma durumları ile kısmen birinci araştırma sorusuna hizmet etmektedir. Bu nedenle testten elde edilen bulgular bu bağlamda verilecektir.

Testten elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin çoğunun kutupsal fonksiyon bilgisini kazanmış oldukları görülmüştür. Kutupsal fonksiyon algılama konusunda 22 (%63) öğrenci dördüncü soruda $x^2+y^2=1$ eşitliğini sağlayan noktalar kümesinin kutupsal dönüşüm altındaki görüntüsünün $r=f(\Theta)$ şeklinde kutupsal bir fonksiyon belirttiğini algılayabilmişlerdir. Ayrıca bu öğrencilerin dördü, görüntü kümesinin sabit bir kutupsal fonksiyon belirttiğinin farkında olduklarını da açıkça ortaya koymuşlardır. Beşinci soruda ise 19 (%54) öğrenci, merkezi doğru testini kullanarak verilen grafiği analiz etmişler ve kutupsal bir fonksiyon grafiği olduğunu başarı ile algılayabilmişlerdir. Kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal eksenler kavramlarının da çoğu öğrenci tarafından kazanılmış olduğu görülmüştür. Otuz beş öğrenciden 20 si (%57) kutupsal dönüşümün IR^2 den IR^2 ye bir fonksiyon olduğunun bilincinde olduklarını yansıtmışlardır. Üç öğrenci ise $\begin{array}{ll} T: IR^2 \to & IR^2 \\ (x,y) \to & (r,\theta) \end{array}$ gösterimini kullanmasa bile kutupsal dönüşümü T ile isimlendirerek, $T:\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$ şeklinde doğru olarak vermişlerdir. Geriye kalan 12 öğrenci ise kutupsal dönüşüm kavramına tam olarak sahip olamadıklarını göstermişlerdir. Bu 12 öğrenciden beşi kutupsal dönüşümün istenildiği ilk soruya yanıt olarak yalnızca $x=r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$ eşitliklerini vermişlerdir. Geriye kalan yedi öğrenci ise çeşitli hatalı ifadeler vermişlerdir. Örneğin bir öğrenci genel dönüşüm tanımını kutupsal dönüşüm olarak vererek $x=r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$ eşitlikleri ile örneklendirdiğini belirtirken, bir diğeri kutupsal dönüşümü "verilen bir iki değişkenli fonksiyonda x=rcos ϴ , y=rsinϴ yazarak yaptığımız işlem kutupsal dönüşümdür" şeklinde tanımlamıştır. Otuz beş öğrencinin sekizi, kutupsal dönüşüm ile dik koordinat sisteminden yarıçap ve açıdan oluşan eğrisel koordinatlara geçişin farkında olduklarını ve kutupsal koordinat eksenleri bilgisini kazandıklarını göstermişlerdir. Dokuz öğrenci ise dik koordinatları çizerek Θ ile ifade etmiş ve kutupsal koordinat eksenlerini de dik koordinat sisteminde göstermişlerdir. Geriye kalan öğrencilerin kutupsal koordinatlarda eksen bilgisini kazanmamış oldukları görülmüştür. Bu öğrencilerden yedisi kutupsal koordinatları dik koordinatlar olarak algılamaktadırlar.

Birinci araştırma sorusu bağlamında klinik görüşmelerden elde edilen veriler öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama düzeyleri ile kutupsal fonksiyonları oluşturmaları arasında direk ilişki olduğunu göstermiştir. Fonksiyon kavramını anlama düzeyi süreç olan bir öğrencinin, Dubinsky ve Harel (1992) tarafından belirlenen kısıtlamalardan bazılarına sahip olsa bile uygulanan öğretim yaklaşımı ile kutupsal dönüşüm bilgisini kazanması durumunda fonksiyon bilgisini kutupsal koordinatlara taşıyarak kutupsal fonksiyon kavramını kazandığı görülmüştür. Bunun yanı sıra fonksiyon kavramını anlaması eylem düzeyinde olan bir öğrenciye kutupsal dönüşüm kavramı kazandırılmış olsa bile kutupsal fonksiyon kavramının kazandırılamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Görüşülen öğrencilerden birincisi fonksiyonun ne olduğu konusunda fonksiyonu sağa teklik koşulunu sağlayan bir eşleme olarak düşünebildiğini göstermiştir. Fonksiyonları anlama düzeyini belirleme konusunda ölçüt olarak ele alınan davranışların başında çeşitli temsil durumlarında fonksiyonları algılayabilme gelmektedir. Birinci öğrencinin verilen cebirsel, geometrik ya da tablo temsillerinde fonksiyon incelemesi yaparken tanım-değer kümesi ya da girdi-çıktı karmaşasına düşmüş olmasına karşın, geometrik temsil analizinde fonksiyon grafiği ile fonksiyon sürecini ilişkilendirerek, düşey doğru testini anlamlı kullandığından, yaşadığı bu karmaşalardan kurtulduğu ve fonksiyon durumlarını doğru olarak algılayabildiği görülmüştür.

G: Peki şöyle çizersem. Çiziyor…(x=3 doğrusunu çiziyor) Şurası 3 olsun. Bu fonksiyon belirtir mi?

Ö$_1$: Bu fonksiyon belirtmez.

G: Neden?

Ö$_1$: x=3 noktasında paralel çizdiğimiz zaman birçok noktada keser.

G: Hıhı

Ö$_1$: O şekilde fonksiyon belirtmez hep aynı noktaya gittiği için x=3'te bir sürü y noktasına gider. Bu da fonksiyonun kuralına aykırı, fonksiyon belirtmez bu.

İkililerden oluşan küme temsilinde girdi-çıktı karmaşası yaşayan öğrenci, sorgulama ile $y = 2x^2 + 1$ cebirsel temsiline ulaşmış ve bu temsilin kendisi için bilindik olmasından dolayı fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Ardından yine grafik çizerek fonksiyon olup olmadığını geometrik olarak düşey doğru testi ile incelemiş ve bu kez doğru algılama ile sonuca ulaşmıştır.

G: O zaman y neresi?

Ö1: $y = 2x^2 + 1$

G: O zaman fonksiyon belirtir mi?

Ö1: O zaman fonksiyon. Bağıntı da fonksiyon olur mu? Şu kısımda, evet hocam o zaman

G: Nasıl karar verdin?

Ö1: Hocam yine aynı şekilde (x,y) olduğu için. Şu kısma y dersek x, y'ye gider. Kendi başına zaten bir fonksiyon belirtiyor.

G: O kendi başına neden fonksiyon belirtiyor?

Ö1: $y = 2x^2 + 1$ *bildiğimiz fonksiyon. y=f(x)*

G: Nasıl bildiğimiz? Tanıdık mı geliyor ifade sana?

Ö1: Biraz tanıdık (gülüyor). y=f(x) şeklinde de yazabiliyoruz hocam bunu. Grafik çizeyim mi?

G: Sen bilirsin, nasıl yapmak istersen.

Ö1: ...(grafiğini çiziyor)...Tek bir değere gidiyor fonksiyonum bir tek noktada kesiyor çizdiğimiz paraleller.

Öğrenci fonksiyonun ne olduğunu doğru olarak açıklayabildiği ve verilen temsil durumlarındaki fonksiyonları algılayabildiğinden, fonksiyonları anlama düzeyinin süreç olduğu düşünülmüş ancak zaman zaman yaşadığı girdi-çıktı karmaşası ve "*bilindik olma*" yanılgısından dolayı bu düzeyin başında olduğu yorumu yapılmıştır.

Kutupsal dönüşüm, kutupsal düzlem ve eksenler bilgileri eksik olan ve kutupsal fonksiyon incelemesi konusunda da eksik bilgiye sahip olduklarını gösteren 10 öğrencinin oluşturduğu birinci grubun temsilcisi olan bu öğrenci, kutupsal koordinatlar konusunda görüşmede de benzer sonuçları yansıtmıştır. Kutupsal dönüşüm sorulduğunda aklına hacim hesabının geldiğini söylemiş ancak daha sonra kutupsal dönüşümle *xy*- düzleminin $r\theta$-düzlemine dönüştüğünün bilincinde olduğunu göstermiştir. Diğer yandan, öğrenci kutupsal dönüşüm ve kutupsal düzlem konularında eksik bilgiye sahip olmasına karşın, sahip olduğu fonksiyon kavramını kutupsal koordinatlara taşımayı başarmıştır. Kutupsal düzlemde verilen kutupsal eğrinin, çemberin ve orijinden geçen doğrunun kutupsal fonksiyon olup olmadığını "*merkezi doğru testini*" kullanarak doğru algılamanın yanı sıra, kutupsal koordinatlarda verilen cebirsel temsili ve ikili temsilini de doğru olarak analiz edebilmiştir.

Ö1:Hocam yine aynı şeyi yapacağız. r doğrularını çiziceğiz buradan grafiğe. Yine tek bir noktada kesecek. Bir fonksiyon. r=1 çemberi

G: Hıhı

$Ö_1$: Fonksiyon belirtir.

G: Peki aynı çemberi ben sana kartezyen koordinatlarda çizmiş olsam (çiziyor) bu y=f(x) şeklinde kartezyen koordinatlarda bir fonksiyon belirtir mi?

$Ö_1$: Burada belirtmez hocam. Burada y'ye paralel çizdiğimiz için her noktada farklı iki değere gider.

Birinci gruba benzer biçimde, uygulanan testte eksik kutupsal dönüşüm ve kutupsal düzlem bilgisi yansıtan, ancak testteki fonksiyon incelemeleri birinci grubun öğrencilerine göre daha başarılı olan öğrencilerin oluşturduğu ikinci grubun temsilcisi olan öğrencinin ($Ö_2$) görüşmede yansıttığı performans $Ö_1$'in gösterdiği performans ile benzerdir. Bu öğrenci de genellikle fonksiyon sürecine sahip olduğunu yansıtan, ancak zaman zaman girdi-çıktı karmaşası yaşayan bir öğrencidir. Birinci öğrencide olduğu gibi geometrik algılaması daha güçlü olan yani düşey doğru testini anlamlı olarak kullanarak fonksiyon algılaması yapabilen ve dolayısıyla fonksiyonları kavrama düzeyi süreç olarak tahmin edilen bu öğrencinin, kimi zaman yaşadığı girdi-çıktı karmaşasından dolayı birinci öğrenciye benzer olarak süreç düzeyinin başında olduğu düşünülmüştür. Ayrıca bu öğrenci bazen, fonksiyon olmanın sağa teklik koşulu ile bire-bir olmayı karıştırdığından, Dubinsky ve Harel (1992) in süreç düzeyinde "*bire-bir olma ile karıştırma*" olarak isimlendirdiği kısıtlamaya sahip olduğu görülmüştür. Bu öğrencinin sahip olduğu bu kısıtlamayı kutupsal koordinatlara da taşıdığı, buna karşın kutupsal fonksiyon bilgisini da kazandığından, kutupsal koordinatlarda verilen temsillerin fonksiyon olma durumlarını da başarı ile algıladığı görülmüştür.

G:Bak grafiğimiz de böyle olsun. Bu kutupsal düzlemde $r=f(\theta)$ şeklinde bir fonksiyon belirtir mi?

$Ö_2$: Belirtir çünkü az önce de Kartezyen koordinatlarda demiştik, kutupsal koordinatlarda da alacağımız bir θ açısına karşılık yalnız ve yalnız bir r uzunluğu karşılık gelmesi gerekir.

G: Hıhı

$Ö_2$: Burada da aldığımız her θ açımız yalnız bir tane r'ye karşılık geliyor.

G: Evet

$Ö_2$: Bu nedenle fonksiyon belirtir.

G: Tamam mesela kutupsal düzlemde orijin merkezli şu çemberi çizelim. Bu çember kutupsal düzlemde kutupsal bir fonksiyon belirtir mi?

Ö2: Şimdi bu belirtmez. Niye belirtmez az önce dedim aldığımız bir θ açısına karşılık r aynı yani 1 uzunluklu yani r=1 uzunluklu ıı şeylere karşılık gelecektir uzunluğa karşılık gelecektir. (bire-birlik ile karıştırıyor)

G: Hadi test et bakalım, göster.

Ö2: Mesela aldığım bir θ 'ya karşılık bir tane r karşılık geldi.

G: Hangisi nereye gidiyor?

Ö2: Yani ııı

G: Kim başlangıç noktan?

Ö2: r, θ yani …….Baktığımızda mesela $\theta = \frac{\pi}{2}$ için de baktığımızda r=1 olur. Aslında şey bu bir fonksiyon belirtir. Niye belirtir her farklı bir θ için yine r eşittir aynı

G: Hıhı

Ö2: Yani r=1 çıkıyor. Yani aynı θ için aynı şeyler karşılık gelmiyor farklı r'ler karşılık gelmiyor ben r ve θ 'yı karıştırdığım için, … bu da fonksiyon belirtir.

G: Peki bu çemberi ben sana kartezyen koordinatlarda verseydim y=f(x) şeklinde bir fonksiyon belirtir mi?

Ö2: Bu belirtmezdi. x eksenine dik çizdiğimizde iki farklı değer görecektik bir x_0 değerimiz için iki farklı y değeri karşılık gelecekti, buradan da belirtmez.

Uygulanan testin sonuçlarına göre kutupsal dönüşüm ve kutupsal düzlem bilgileri gelişmiş, ancak fonksiyon bilgisi eksik olarak görülen, hemen her uygulamasında bire-birlikle fonksiyon olmanın sağa teklik koşulunu karıştırma kısıtlaması gözlenen ve bu kısıtlaması temsilleri yanlış algılamasına neden olan katılımcıların oluşturduğu üçüncü grubun temsilcisi olan öğrenci ($Ö_3$), kendisi ile yapılan görüşmede de bu bulguları doğrulamıştır. Kutupsal dönüşüm, kutupsal koordinatlar ve kutupsal düzlemin eksenleri bilgilerini kazandığını açıkça gösteren bu öğrenci, fonksiyonları düşük düzeyde kavraması nedeni ile kutupsal fonksiyon bilgisini kazanamadığını göstermiştir. Görüşmenin başında fonksiyon kavramını bir makine olarak tanımlayan bu öğrenci, verilen temsillerde fonksiyon durumlarının araştırmasını yaparken fonksiyon olma ile sağa teklik koşulunu karıştırdığını ifade etmiş ve testin sonuçlarında olduğu gibi bu koşul ile bire-birlik koşulunu karıştırdığını göstermiştir:

Ö3: Mesela küme ile (venn şeması çiziyor)… bir elemanın yalnızca… bir saniye bu kısmı ben karıştırıyorum da birazcık …. Bir elemanın tek bir görüntüsü olacak ancak iki elemanında aynı görüntüsü olabilir bu şekilde

G: hangi kısmı karıştırıyorsun?

Ö3: iki elemana mı gidiyordu yoksa böyle mi gidiyordu başta bocalıyorum

………….

G: anladım, peki ben şimdi sana bazı matematiksel ifadeler vereceğim bunların bir fonksiyon belirtip belirtmediğini araştır mısın? mesela $y^2=3x^2$ ifadesi sence bir fonksiyon belirtir mi?

Ö3: … $3x^2$ karekökünü alırım … mutlak içinde çıkar $\sqrt{3x^2}$ bu da +, - olabileceğinden fonksiyon belirtmez

G: neden

Ö3: çünkü hem – değere gidecek hem + değere gidecek, fonksiyonun yalnız bir görüntüsü olur

G: kim nereye gidiyor?

Ö3: söyle göstereyim (yazıyor) …

G: şimdi sen fonksiyonu nasıl tanımlamıştın?

Ö3: şu şekildeki gibi işte (makine çiziyor)

G: makineye ne giriyor?

Ö3: (girdi ve çıktı yazıyor makine üzerine)

G: Şimdi girdi… (sözünü kesiyor)

Ö3: tanım kümemizde … ana malzememiz bu

G: peki şurada fonksiyon olup olmadığını incelerken nedir girdin?

Ö3: hımm… burada tek bir girdi olmadı hem + hem – oldu (girdi-çıktı karmaşası).

Ö3 verilen tablo ve ikililer kümesi temsillerini de cebirsel temsile dönüştürerek incelemiş ve *y* değişkenini yalnız bırakarak cebirsel olarak fonksiyon olup olmadığı sonucuna doğru olarak ulaşabilse bile cebirsel analizi ezbere yaptığını yansıtmıştır. Geometrik temsillerde ise düşey-doğru testi ile inceleme yaptığını düşünerek ezbere inceleme yapmış ve bire-birlik kısıtlamasına sahip olduğu için, *x*-eksenine paraleller çizerek inceleme yaparak "sağa teklik koşulunu bire-birlik ile karıştırma" kısıtlamasını açıkça yansıtmanın yanında yanlış algılamalara ulaşmıştır.

G:anladım şimdi bir de grafik vereceğim sana …. (grafiği çiziyor) bu grafik fonksiyon belirtir mi?

Ö3: paralel çizerim … dik mi çiziyorduk (sesli düşünüyor) bir saniye …. (düşünüyor) … x e paralel çizerim çünkü farklı x değerlerine karşılık gelen y yi bulmak için

G: nasıl çiz bakalım.

Ö3: …

G: farklı ne dedin, bir daha söyler misin?

Ö3: farklı x değerlerine karşılık gelen y değeri

G: tamam bakalım nasıl inceliyorsun?

Ö3: şöyle x_1, x_2, x_3 grafiği tek bir noktada kesiyor

G: hıı?

Ö3: bu da bana görüntüsünün tek bir tane olduğunu belirtir yani fonksiyondur

Bu öğrenci fonksiyon kavramı konusunda ayrıca "*tanıdık olma*" yanılgısına da sahiptir:

G: peki bu fonksiyon mu?

Ö3: buna göre zaten yatay çizersem mutlaka tek bir noktada keser

G: ama yatay çizerek neyi kontrol ediyorsun?

Ö3: (sözünü keserek) olmaz öyle, şimdi benim fonksiyon tanımıma göre x in sadece tek bir değeri olacaktı … başka değeri olamaz burada x .. y_1 y_2 mesela farklı değerleri var ….

G: oluyor mu?

Ö3: oluuur … yani bunları çiziyorduk biz hep (gülüyor) ezbere bakış açısı oldu ama

G: yani daha önceden tanıdık geliyor fonksiyon olması gerek diye mi düşünüyorsun (gülüyorlar)

Ö3: (sözünü keserek) çiziyoduk biz bunu (gülüyor) yani tek bir x in …. ? görüntüsü var

G: öyle hissettim doğru mu

Ö3: hıhı evet.. şu an işin içinden çıkamadım … bildiğimiz ifadeler ya, fonksiyondur, direk çizmeye girişiyorduk.

Bu öğrencinin fonksiyonları kavrama düzeyi eylem olarak yorumlanmış ve bu düşük kavrama düzeyini kutupsal koordinatlara da taşıdığından, kutupsal dönüşüm ve kutupsal düzlem bilgilerine sahip olmasına karşın, kutupsal fonksiyon bilgisini kazanamamış olduğunu göstermiştir.

Uygulanan testin sonuçlarına göre kutupsal dönüşüm, kutupsal düzlem ve kutupsal fonksiyon kavramlarını tam olarak kazanmış olduğunu gösteren öğrencilerin oluşturduğu grup olan dördüncü grubun temsilci öğrencisi $Ö_4$ kendisi ile yapılan görüşmede de benzer performansı sergilemiştir. Yaptığı fonksiyon tanımı ve fonksiyon durumlarını algılaması ile fonksiyonları kavramasının süreç düzeyini tamamladığını gösteren bu öğrenci, kutupsal dönüşüm ve kutupsal düzlem bilgilerini kazandığını ve sahip olduğu fonksiyon bilgisini kutupsal koordinatlara taşıyarak kutupsal fonksiyon kavramını da oluşturduğunu ortaya koymuştur.

İkinci araştırma sorusu göz önüne alındığında, fonksiyonları anlama düzeyi düşük olmayan ve kutupsal dönüşüm kavramını da kazanarak fonksiyon bilgisini kutupsal koordinatlara taşıyabilen öğrencilerin tamamının grafik temsillerinin kutupsal fonksiyon olup olmama araştırmasında "*merkezi doğru testi*" ni kullandıkları görülmüştür. Ayrıca yukarıda verilen öğrenci ifadelerinden de kolayca anlaşılabileceği gibi bu testi ezbere değil, aksine fonksiyon bilgileri ile ilişkilendirerek kullandıkları görülmüştür.

Öğrencilerin kutupsal koordinatlar ve kutupsal fonksiyonlar konularında sahip oldukları güçlük ve yanılgılar yani üçüncü araştırma sorusu açısından ise öğrenciler genel fonksiyon kavramına ilişkin güçlük ve yanılgılarını kutupsal fonksiyonlara taşıdıklarını, kutupsal fonksiyonlara ilişkin yeni güçlük ya da yanılgılara ise sahip olmadıklarını göstermişlerdir. Kutupsal düzlemde ise en çok kutupsal eksenleri algılamada güçlük yaşamışlar ve kutupsal eksenleri de dik koordinat eksenleri olarak algılama yanılgısına düştüklerini ortaya koymuşlardır. Kutupsal dönüşüm bilgisini kazanamadığını gösteren öğrencilerin ise gerçekte dönüşüm bilgisine sahip olamamalarından dolayı kutupsal koordinatları da daha önce tek değişkenli analiz derslerinde kullandıkları gibi $x=r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$ eşitlikleri ile algıladıkları görülmüştür.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu araştırma dönüşüm konusu bağlamında kutupsal dönüşüm ve kutupsal fonksiyon kavramlarına yer verilen Analiz II dersi bağlamında yürütülmüş ve öğrencilerin kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen araştırma sonuçlar Montiel, Vidakovic ve Kabael 'in (a.g.e) elde etmiş olduğu sonuçlara kıyasla önemli farklılıklar göstermiştir. Çalışmada elde edilen veriler öğrencilerin kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturabildiklerini ve öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama düzeyleri ile kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturmaları arasında doğru orantılı bir ilişkinin olduğunu ortaya koymaktadır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (a.g.e) elde etmiş olduğu sonuçlar ile en önemli farklılığı oluşturmaktadır. Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (a.g.e) çalışmasında kutupsal fonksiyon kavramına yer verilmeyen Calculus dersinin öğrencilerinin fonksiyon kavramını anlama düzeyleri ile kutupsal koordinatları kullanma ve kutupsal fonksiyon oluşturma durumları arasında bir ilişki olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e) bu sonuç doğrultusunda pedagojik öneri olarak, kutupsal koordinatların öğretimi sırasında kutupsal fonksiyonlara yer verilmesinin önemini vurgulamışlardır. Kutupsal fonksiyon kavramına ilişkin öğretim içeren ders bağlamında ise bu çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin anlama düzeylerini kutupsal koordinatlara taşıdıkları ve özellikle fonksiyonları kavraması süreç düzeyine ulaşmış öğrencilerin kutupsal fonksiyon bilgisini oluşturabilmiş oldukları görülmüştür. Ayrıca çalışmada Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (2008) sonuçlarına paralel olarak öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin sahip oldukları yanılgıları da kutupsal fonksiyonlara taşıdıkları görülmüştür. Çalışmaya katılan öğrencilerin fonksiyonlara ilişkin anlamalarının genellikle süreç düzeyinde olduğu, fonksiyonları eylem düzeyinde anlayan öğrencilerin nispeten daha az olduğu görülmüştür. Çalışmada gözlenen öğrenci yanılgıları "*sağa teklik koşulunu bire birlik ile karıştırma kısıtlaması"* ve "*bilindik olma*" yanılgısıdır. Alan yazında fonksiyon kavramına ilişkin çalışmalarda ortak hale gelmiş öğrenci yanılgılarından yalnızca birkaçının bu çalışmada gözlenmesi dikkat çekicidir. Öğrencilerin çoğunun fonksiyon kavramını reel değerli fonksiyonlar ile sınırlandırdıkları ve genel fonksiyon kavramını göz ardı ettikleri göz önünde bulundurulursa, iki değişkenli fonksiyon kavramı ile tanışmalarının ardından başka bir koordinat sisteminde fonksiyonlar ile çalışmalarının ayrıca fonksiyonları anlamalarını da desteklediği düşünülmektedir. Örneğin Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e), kutupsal koordinatlarda verilen temsil durumlarının fonksiyon olup olmadığını inceleme konusunda öğrencilerin çoğunun kartezyen koordinatlara geçiş yaparak inceleme eğiliminde oldukları sonucuna ulaşmışlar, bu çalışmada ise kutupsal koordinatlarda verilen temsil durumlarından herhangi birini kartezyen koordinatlara dönüştürerek fonksiyon incelemesi yapmak isteyen öğrenci olmamıştır. Genel fonksiyon bilgisine sahip öğrenciler bu bilgilerini başarı ile kutupsal koordinatlara taşımayı başarmış ve kutupsal koordinatlarda verilen temsil durumlarındaki fonksiyon incelemelerini de bağımsız değişkenin Θ, bağımlı değişkenin ise r olduğu bilincinde olduklarını açıkça yansıtarak başarı ile yapmışlardır. Bunun yanı sıra Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (a.g.e) çalışmalarında en çok karşılaştıkları bir diğer durum ise, öğrencilerin kutupsal bir eğrinin fonksiyon incelemesini de düşey doğru testi ile yapmalarıdır. Bu çalışmada ise düşey doğru testini kutupsal bir eğriye uygulama girişiminde bulunan öğrenci olmadığı gibi, fonksiyon bilgisine sahip öğrencilerin tamamı kutupsal eğrileri merkezi doğru testine göre analiz etmeyi başarmışlardır. Analizleri sırasındaki algılamalarında göstermiş oldukları başarının ise fonksiyonları anlama düzeyleri ile doğrudan ilişkili olduğu görülmektedir. Ayrıca Montiel, Vidakovic ve Kabael (a.g.e) tarafından yapılmış çalışmanın aksine bu araştırmada öğrenciler kartezyen koordinatlardan taşıdıkları fonksiyon kavramına ilişkin güçlük ve yanılgıların dışında yeni güçlük ve yanılgılara sahip olmamışlardır.

Sonuç olarak Montiel, Vidakovic ve Kabael'in (a.g.e) de vurgulamış olduğu gibi, kutupsal fonksiyon kavramının öğretiminin önemine ve bu öğretimi içeren bir ders sürecinde kutupsal fonksiyon bilgisinin oluştuğu ve kutupsal fonksiyon kavramının öğretimi ile fonksiyon kavramının ve kutupsal koordinatların kullanıldığı matematiksel bilgilerin bilişsel gelişiminin desteklenebileceği savunusuna ulaşılmıştır. Bu çalışmada olduğu gibi dönüşüm kavramını içeren uygun matematik derslerinde kutupsal dönüşümler tanıtılmalı ve fonksiyon kavramının kutupsal dönüşüm ile kutupsal koordinatlara taşınması desteklenerek kutupsal fonksiyon kavramı oluşturulmalıdır. Bunun yanı sıra, tek değişkenli analiz ya da genel matematik dersleri kapsamında kutupsal koordinatların, kutupsal düzlemin ve bu düzlemdeki grafiklerin incelenmesi sırasında kutupsal fonksiyon bilgisine değinilerek bu kavramın zihinsel oluşum süreci başlatılabilir. Bu öğretim sürecinde kutupsal koordinatlarda verilen eğrilerin cebirsel temsillerinin yalnızca *"r= "* formunda değil *"r=f(Θ)"* formunda da verilmesi, kutupsal düzlemde eğri çizimi ve bazı özel kutupsal eğrilerin örneklenmesi gibi uygulamaların yanı sıra bu eğrilerin kutupsal fonksiyon belirtip belirtmediğine ilişkin incelemelerin de yapılması önemlidir. Tek değişkenli kavramları içeren derslerde dönüşüm kavramının ve bu kavramın bir örneği olarak kutupsal dönüşümün verilmesi mümkün olmadığından, öğrencilerin kartezyen ve kutupsal koordinatlar arası ilişkiyi algılamaları ve dolayısıyla fonksiyon bilgilerini kutupsal koordinatlara taşımaları eksik kalmaktadır. Bu çalışma bu eksikliğin iki değişkenli analiz dersinde dönüşüm konusu bağlamında giderilebileceğini ortaya çıkarmıştır.

Kaynakça

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J, Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, 2, 1-32.

Bakar, M., & Tall, D. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. *Proceedings of PME 15*, Assisi, 1,104–111

Breidenbach, D., Hawks, J., Nichols, D., & Dubinsky, E. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education,* 547-589. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P. & Steffe, L.P. (1983) The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education.* 14(2), 83-94.

Confrey, F. ve Smith, E.(1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: 57-63, Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D.Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking***,** (pp.82-94). London: Riedel.

Dubinsky, E.& Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function, In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25*, 85-106. Mathematical association of America, Washington.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1990). Functions and their representations. *Mathematics Teacher*, *83*(3), 209-16.

Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For Th e Learning of Mathematics*, *1*(3), 4-11.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: the notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* 67-72, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E. & Lesh, R. A. (2000) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers: London.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *.An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd ed.). California, CA: Sage Publications.

Montiel,M., Vidakovic,D.ve Kabael,T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems", *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52-70.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151–169

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 229-274.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Ed.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* 25-58. United States: Mathematical Association of America.

Vinner, S.,& Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 356-366.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: reasoning about functions of two-variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 431–466.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (beşinci baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.