Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 2024, sayı 62, ss. 3296- 3313

Araştırma Makalesi

The Journal of Buca Faculty of Education, 2024, issue 62, pp. 3296- 3313

Research Article

Matematik Öğretmeni Adaylarının Önermeleri Olumsuzlama Yeterliklerinin İncelenmesi

Examining the Competencies of Mathematics Teacher Candidates in Determining the Negations of Propositions

Erdem Çekmez[1], Mustafa Güler[2]

[1]*Doç. Dr., Trabzon Üniversitesi, erdemcekmez@trabzon.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0001-8684-2820)*

[2]*Sorumlu Yazar, Doç. Dr., Trabzon Üniversitesi, mustafaguler@trabzon.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0002-4082-7585)*

Geliş Tarihi: *24.06.2024* ***Kabul Tarihi:*** *08.10.2024*

ÖZ

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleme hususundaki yeterlikleri ve bu yeterliğin sınıf seviyesi açısından nasıl değişim gösterdiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak sembolik veya sözel olarak verilmiş matematiksel önermelerin olumsuzunu tanımayı gerektiren ve çoktan seçmeli formatta hazırlanmış toplam 8 sorudan oluşan bir test kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcıların bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programının tüm sınıf seviyelerin öğrenim görmekte olan 194 ilköğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmadan elde edilen bulgular, odaklanılan yeterlik açısından 1. ve 2. sınıf öğrencileri ile 2. ve 3. sınıf öğrencileri arasında anlamlı farkın olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, sözel olarak ifade edilen önermeleri olumsuzlamanın sembolik olarak ifade edilen önermelere kıyasla daha zor olduğu saptanmıştır. Araştırmada elde edilen bir diğer sonuç, önermelerin sözel olarak ifade edilme biçiminin olumsuzlamada etkili olduğudur.

Anahtar Kelimeler: İspat, matematiksel önerme, niceleyiciler, önermeleri olumsuzlama.

ABSTRACT

This study aims to investigate the competencies of mathematics teacher candidates in discerning the negations of mathematical propositions. A test comprising 8 multiple-choice questions, designed to assess the ability to identify the negations of mathematical propositions presented either symbolically or verbally, served as the primary data collection instrument. The research cohort comprised 194 candidates enrolled in the primary mathematics teaching program at a state university across all grade levels. Analysis of the findings revealed a notable disparity in the competency levels between 1st and 2nd grade students, as well as between 2nd and 3rd grade students concerning the targeted competency. Moreover, the study identified that negating verbally expressed propositions posed greater difficulty compared to symbolically expressed propositions. Additionally, the manner in which propositions were articulated verbally was found to influence the ease of negation.

Keywords: Proof, mathematical propositions, quantifiers, negating propositions.

GİRİŞ

Matematiksel bilginin sahip olduğu kesinlik matematiği deneye ve gözleme dayanan diğer disiplinlerden ayıran en önemli özellik olup, ona bu niteliği kazandıran ise ispat olgusudur. Basit olarak ispat bir önermenin niçin doğru ya da yanlış olduğunun açıklamasıdır (Uygur-Kabael, 2020). İspat matematiğin epistemolojisinin ve ontolojisinin merkezi olarak kabul edilmekte olup (Stylianides vd., 2024), bu açıdan Schoenfeld (2009) problem çözmeyi matematiğin kalbi ispatı ise ruhu olarak nitelendirmektedir.

Matematik dünyasında ispatın amacı yalnızca bir matematiksel teoremin otoriteler tarafından kabul görmesini sağlamak değildir. Bundan daha geniş perspektifte Knuth (2002) matematiksel ispatın doğrulama, açıklama, iletişim, bilgi üretme ve sistematikleştirme olmak üzere en az beş önemli görevinin olduğunu belirtmektedir. Öğrencilerde ispatın bu farklı rollerine yönelik bir farkındalığın oluşturulması matematik eğitiminin hedeflerinden biridir (Argün vd., 2020). Bununla birlikte Ball ve Bass (2003), öğrenciler matematiksel ispatları anladıklarında matematiksel ilişkilerin niçin doğru olduğuna yönelik inançlarının dış kaynaklı (Örneğin: öğretmen öyle söylediği için veya kitapta öyle yazdığı için) olmaktan kurtulup içsel hale dönüşeceğini, bu dönüşümün ise epistemolojik açıdan anlamlı öğrenme için bir zemin oluşturacağını vurgulamaktadır. Ayrıca ispat yapmak matematiksel sonuçların niçin doğru olduğunu göstermenin yanı sıra öğrencilere matematiksel iletişimde bulunma ve matematiksel bilgiyi anlamlı biçimde oluşturma fırsatı sunmaktadır (Öztürk & Demirel, 2022).

Literatürde öğrencilerin matematiksel ispat oluşturmada zorluk yaşadığı genel kabul görmüş bir olgudur. Öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerin bir sebebi, ispatın doğruluğuna ilişkin yargıya varmada kararsız kalmalarıdır (Öztürk vd., 2019). Bu sebepten öğrenciler bir ispatın doğruluğuna ilişkin kararlarını, eğer o ispat öğretmenleri tarafından önceden gerçekleştirilmiş veya bir kitapta yer alıyorsa, bu kaynaklara dayandırmaktadırlar (Öztürk vd., 2019). Bir başka araştırmada Moore (1994), öğrencilerin ispat yapmada başarı sergileyememelerinin nedenlerinden bazılarını tanımların kullanılmaması, matematik dilinin ve notasyonların anlaşılmaması, ispat yöntemlerinin uygulanamaması ve bir ispata nasıl başlanılması gerektiğine karar verilememesi olarak belirlemiştir. Öğrencilerin ispat yapmada yaşadıkları zorlukların bir diğer sebebi, ortaöğretim ve üniversite seviyesinde matematik derslerinin işlenişindeki farklılık olduğu belirtilmektedir (Baştürk, 2010). Bununla birlikte, her ne kadar öğrenciler ispat yapmada zorluklar yaşasa da ispatın matematik yapmada üstlendiği merkezi rolü ve ortaya çıkan bilgiye kattığı kesinliği kabul etmekte ve ispata önem atfetmektedirler (Baştürk, 2010; Stylianou vd., 2015). Knuth (2002), öğrencilerin yanı sıra öğretmenlerin matematikte ispatın doğası hakkında sınırlı görüşlere sahip olduğunu ve hangi eylemlerin bir ispat oluşturduğuna dair yetersiz anlayışa sahip olduğunu rapor etmiştir.

Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde ispat kavramına ilişkin çalışmaların hem niceliksel olarak artış eğilimi gösterdiği hem de odaklanılan perspektif açısından zenginleştiği değerlendirilmektedir. Tam anlamıyla kapsayıcı olmamakla birlikte yapılan araştırmalarda teknolojik araçların ispat yapma sürecinde olası katkılarının (Fujita vd., 2018; Hanna & Yan, 2021), ispat çerçevesinde gerçekleşen akıl yürütme sürecinde örneklerin nasıl rol oynadığının ve öğrenciler ya da öğretmenler tarafından nasıl kullanıldığının (Dogan & Williams-Pierce, 2021; Doruk & Kaplan, 2018 Knuth vd., 2019; Lew & Zazkis, 2019), farklı ispat türlerinin inandırıcılık açısından öğrencilerde oluşturduğu algıların incelenmesinin (Antonini, 2019; Brown, 2018), öğrencilerin ispat yazma ve okuma yeterliklerinin belirlenmesinin (Azrou & Kelladi, 2019; Dawkins & Zazkis, 2021), öğretmen ve öğretmen adaylarının ispata yönelik alan ve pedagojik alan bilgilerinin ortaya çıkarılmasının (Güler vd., 2012; Karpuz & Atasoy, 2020; Öztürk vd., 2019; Rogers & Kosko; 2019, Zhuang & Conner; 2022) ele alındığı görülmektedir.

Matematiksel ispat türleri en genel anlamda doğrudan ve dolaylı olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bir sonraki alt başlıkta detaylandırıldığı üzere dolaylı ispat yöntemleri kullanılarak oluşturulacak bir ispatın başarılı bir şekilde gerçekleştirilebilmesi için ilk olarak, teoremi oluşturan hipotezin ve/veya sonucun ifade ettiği önermenin olumsuzunun belirlenmesi gerekmektedir. Araştırmacılar dolaylı ispat türlerini gerçekleştirmenin doğrudan ispat yöntemlerini gerçekleştirmeye nispeten öğrenciler için daha zor olduğunu ifade etmektedirler (Antonini & Mariotti, 2008; Bleiler vd., 2014). Bu durumun ortaya çıkmasına sebep olan etkenlerden biri öğrencilerin önermelerin olumsuzunu oluşturamamaları olabilir. Yurt içi literatür incelendiğinde öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu oluşturma yeterliklerini ve bu hususta deneyimledikleri zorlukları belirlemeyi amaçlayan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada, yurt içi literatürde mevcut olan bu boşluğa katkı sağlamak hedeflenmektedir. Bu hedef doğrultusunda çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleyebilme yeterliklerini, bu yeterliklerin sınıf seviyesine göre değişimini ve bu hususta yaptıkları hataları belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmada cevap aranacak problemler aşağıdaki gibidir.

- Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleyebilme yeterlikleri nasıl bir hiyerarşi ortaya çıkarmaktadır?

- Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleyebilme yeterlikleri sınıf seviyesine göre farklılaşmakta mıdır?

- Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu oluşturmadaki yanılgıları nelerdir?

1.1. Önermelerin Olumsuzunu Oluşturma ve İspat Arasındaki İlişki

Matematiksel anlamda teorem, doğrulukları varsayılan ya da verilen bir takım önermelerin birlikte yeni bir önermenin doğruluğunu gerektirdiğini öne sürmektir (Asar vd., 2022). Teorem içerisinde doğrulukları varsayılan ya da verilen önermelerin birlikte oluşturduğu önermeye teoremin hipotezi (V), öne sürülen önerme ise teoremin sonucu (S) olarak isimlendirilmektedir. Hipotezin sonucu gerektirdiğini göstermek, bir başka ifadeyle "V" doğru iken "V⇒S" önermesinin doğru olduğunu göstermek bir teoremi matematiksel olarak ispatlamaktır.

İki temel dolaylı ispat yönteminden biri olan karşıt pozitif yönteminde V⇒S≡¬S⇒¬V denkliğinden hareketle, V⇒S önermesi yerine ¬S⇒¬V önermesinin tüm geçerli olduğunu göstermek amaçlanmaktadır. Bu yönteme, "$n \in \mathbb{Z}^{+}. 4^{n}-1$ $asaldır$ $\Rightarrow n$ $tektir$." teoreminin doğruluğunun, "$n \in \mathbb{Z}^{+}. n$ $çifttir$ $\Rightarrow 4^{n}-1$ $asal$ $değildir$." teoremi ispatlanarak gösterilmesi bir örnektir. Çelişki yöntemi ya da olmayan ergi yöntemi olarak isimlendirilen diğer yöntem de ise V⇒S≡(V∧ ¬S)⇒(çelişki) denkliğinden hareketle, V önermesi doğru ve S önermesi yanlış kabul edilerek bir çelişki elde edilirse V⇒S önermesinin tüm geçerli olduğu gösterilmiş olur. Bu yöntem kullanılarak ispatı gerçekleştirilen en bilindik ispatlardan biri √2 sayısının irrasyonel olduğunun, bir diğeri ise asal sayılar kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunun gösterilmesidir.

Yukarıda verilen tariflerden anlaşılacağı üzere, dolaylı ispat yöntemlerinin gerçekleştirilebilmesi için, hangi ispat türünün kullanılacağına karar verilmesini takiben atılması gereken ilk adım hipotez ve/veya sonuç kısmını oluşturan önermenin olumsuzunu oluşturmaktır. Bu adımın gerçekleştirilememesi ya da hatalı biçimde oluşturulması durumunda ispatın gerçekleşmesi mümkün değildir. Matematiksel ispatın teoremlerin doğruluğunu göstermenin yanı sıra sınıf içerisinde matematik öğrenmede önemli olan mantıksal akıl yürütme gibi çeşitli becerileri geliştirme rolü bulunmaktadır (Tall, 2014). Öğretim programının temel hedeflerinden birinin öğrencilerde bu becerileri geliştirmek olduğu düşünüldüğünde, geleceğin öğretmenlerinin matematiksel ispat yapabilme yeterliliğine sahip olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla, öğretmen adaylarının dolaylı ispat türlerinden pedagojik açıdan faydalanabilmesi için bu ispat türlerinin gerçekleştirilmesinde gerekli olan önermelerin olumsuzunu oluşturabilmeleri gerekmektedir.

LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde, literatürde öğrencilerin önermelerin olumsuzunu oluşturma ve yorumlama yeterliklerine odaklanmış araştırmalar özetlenmiştir.

Barnard (1995) bir önermenin olumsuzunu oluşturabilmenin üniversite düzeyinde gerçekleşen matematiksel iletişimi anlamlı kılan en temel yeterlik olduğu iddiasında bulunarak, bazı önerme biçimlerinin olumsuzunu oluşturmada birinci, ikinci ve üçüncü sınıflarda öğrenim görmekte olan öğrencilerin yeterliklerini incelemiştir. Araştırmada kullanılan veri toplama aracında önermeler hem günlük hayat hem de matematik bağlamlarında sunulmuştur. Öğrencilerde en yaygın görülen hata önermenin yalnızca bir bölümünün olumsuzlanması olarak ortaya çıkmıştır. Bu hatayı sergileyen öğrencilerin büyük bölümü önermenin yalnızca koşulunu olumsuzlamış, niceleyici kısmını değiştirmemiştir. Örneğin, testte yer alan önermelerden biri “Bazı öğrenciler öğle yemeği zamanında uyanıktır” olup, öğrenciler yalnızca “uyanıktır” fiilini “uyuyor” şeklinde değiştirmiş lakin “Bazı” niceleyicisini değiştirmemiştir. Aynı yapıda olan fakat matematiksel bağlamda verilen önermede ise yalnızca niceleyici ya da yalnızca matematiksel ilişkiyi olumsuzlayan öğrencilerin sayıları yakın çıkmıştır. İki niceleyici içeren önermeleri olumsuzlamada ise öğrenciler tek niceleyici içeren önermelere nazaran çok daha düşük bir performans sergilemişlerdir. Bununla birlikte, olumsuzu oluşturulacak önermenin doğru olup olmamasının da öğrencilerin performanslarını etkilediği belirlenmiştir. Buradan hareketle bu çalışmada farklı doğruluk değerine sahip olması olası önermelere yer verilmiştir.

Bir diğer araştırmada Lin ve diğerleri (2003) yaşları 17 ile 20 arasında değişen ve üniversite ya da ortaöğretim seviyesinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin çelişki ile ispat yöntemine ilişkin anlamalarını incelemeyi amaçlamışlardır. Bu ana amaç içerisinde öğrencilerin önermeleri olumsuzlama yeterliklerine de odaklanmışlardır. Barnard’ın (1995) çalışmasına benzer şekilde öğrencilerden hem günlük hayat hem de matematik bağlamında sunulan önermeleri olumsuzlamaları istenmiştir. Niceleyiciler açısından önermeler niceleyici içermeyen, bazı niceleyicisini içeren, her niceleyicisini içeren ve yalnız bir niceleyicisini içeren şekilde sınıflanmış ve öğrencilerin başarıları da bu yazılış sırasında giderek düşmüştür. Bu yeterlik açısından en çok yapılan hatalardan biri öğrencilerin “her” niceleyicisini “hiç” olarak olumsuzlamaları olarak belirlenmiştir. Örneğin, öğrencilerin yarıya yakını günlük hayat bağlamında sunulan “her insan benim arkadaşımdır” önermesinin olumsuzunu “kimse benim arkadaşım değil” olarak, matematik bağlamında verilen “ABC üçgeninin her açısı dar açıdır” önermesinin olumsuzunu ise “ABC üçgeninin hiçbir açısı dar değildir” olarak ifade etmişlerdir. En çok zorlanılan önerme tipi olan “yalnız bir” niceleyicisini barındıranlarda ise öğrencilerin yarıdan fazlası önermenin olumsuzunu oluştururken sadece “birden fazla” niceleyicisini kullanmışlardır. Örneğin, bu zorluğu yaşayan öğrenciler “Engle’ın yalnızca bir kardeşi vardır” önermesinin olumsuzunu “Engle’ın birden fazla kardeşi vardır” şeklinde olumsuzlamış ve kardeşi olmaması durumunu dâhil etmemişlerdir.

Dubisnky ve Yiparaki (2000) çalışmalarında öğrencilerin iki niceleyici içeren önermelere ilişkin sahip oldukları anlamaları incelemişlerdir. Öğrencilere 9’u günlük hayat bağlamından toplam 11 önerme sunulmuştur. Araştırmacılar öğrencilerin günlük hayattaki önermelere ilişkin anlayışlarını tespit edip, bu anlayışlardan hareketle matematik bağlamında önermelerin öğretimine ilişkin yansımalar elde etmeyi hedeflemişlerdir. Elde edilen bulgular öğrencilerin günlük hayat bağlamında sunulan önermelere ilişkin iyi bir anlamaya sahip olmadıklarını ortaya koymuştur. Bilhassa, “Vardır en az bir … her …” ($\exists\forall$) sıralamasına sahip önermelerde öğrenciler oldukça kötü performans göstermiştir. Araştırmacılar, matematik bağlamında niceleyicilerin kullanımına ilişkin teamüllerin günlük konuşma dilinde benimsenmediğini, bu sebepten günlük konuşma diline ait önermelerin, niceleyici içeren matematiksel önermelerin öğretiminde iyi bir kaynak olmadığını vurgulamışlardır.

Piatek-Jimenez (2020), üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin niceleyiciler içeren önermeleri yorumlama yeterliklerini incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda altı öğrenci ile beş matematiksel önerme üzerinde mülakatlar gerçekleştirmiştir. Bu mülakatlarda öğrencilere “$\exists\forall$” yapısında iki, “$\forall\exists$” yapısında iki ve “$\forall\exists\forall$” yapısında bir önerme sunulmuştur. Elde edilen bulgular, öğrenciler için "∃∀" yapısındaki önermeyi yorumlamanın "∀∃" yapısındaki önermeyi yorumlamaya kıyasla çok daha zor olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca yalnızca bir öğrenci "∃∀" yapısındaki önermenin olumsuzunu oluşturmada başarı sergilemiştir. Bu sonuçların paralelinde, Anapa-Saban ve diğerleri (2014) öğrencilerin birden fazla niceleyici içeren önermeleri yorumlarken niceleyicilerin sıralamasını göz ardı ettiklerini rapor etmişlerdir. Niceleyicilerde yaşanılan güçlüklerin yanı sıra, Baker ve Campbell (2004) üniversite öğrencilerinin ispat yapmada yaşadıkları zorlukları inceledikleri araştırmalarında, öğrencilerin sözle olarak ifade ettikleri akıl yürütmeleri ile yazılı ifadeleri arasında kopukluk olduğunu belirtmişlerdir. Bunun sonucunda öğrencilerin önermelerin kendisinden ziyade tersini ispatlama eğiliminde oldukları ortaya çıkmıştır. Ayrıca ispatlama sürecinde öğrencilerin mantık kurallarını uygulayamadıkları da belirtilmektedir.

YÖNTEM

Mevcut çalışma, öğretmen adaylarının önermeleri olumsuzlama yeterliklerini ve bu yeterliklerinin sınıf seviyesi açısından değişimini incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmada gelişimci araştırma yaklaşımı (Çepni, 2007) benimsenmiştir. Gelişimci araştırmalar incelenen bireylerin her aşamada aynı olup olmamasına göre iki türe ayrılmaktadır. Eğer her aşamada örneklemi oluşturan bireyler aynıysa, bu tür araştırmalara boylamsal (longitudinal), farklı aşamalar için seçilen örneklemler birbirinden farklı bireylerden oluşuyorsa enlemsel (cross-sectional) olarak adlandırılır (Cohen, Manion, & Morrison, 2000). Bu çalışma farklı sınıf seviyelerinde bulunan katılımcılardan oluştuğundan ve ölçme eş zamanlı yapıldığından araştırma enlemsel bir desene sahiptir.

3.1. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programına kayıtlı 31 birinci sınıf, 58 ikinci sınıf, 46 üçüncü sınıf ve 59 dördüncü sınıf olmak üzere toplam 194 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın gerçekleştirildiği programda öğrencilere önermelerin olumsuzunu oluşturma başlığının da yer aldığı içerik kapsamlı ve detaylı olarak ikinci yarıyılda yer alan Soyut Matematik dersinde sunulmaktadır. Bu sebepten ötürü veri toplama aracı öğrencilere ilgili içeriğin bitiminden 2 hafta sonra uygulanmıştır. Sonuç olarak katılımcıların tamamı ölçülmek istenen yeterliliği üniversite düzeyinde işlemişlerdir. Bununla birlikte katılımcılar testin uygulanmasından önce testin amacı, herhangi bir ders notuna etkisinin olmadığı ve katılımın tamamen gönüllük esasına bağlı olduğu yönünde bilgilendirilmiştir. Testten maksimum puan alan birinci sınıftan 2, ikinci sınıftan 1, üçüncü sınıftan 3 ve dördüncü sınıftan 1 öğrenci analizden çıkartılmıştır.

3.2. Veri Toplama Aracı

Araştırmada veriler yazarlar tarafından geliştirilmiş ve 2 kısımdan oluşan bir testten elde edilmiştir (bkz. Ek 1). Test maddelerinin yazımını takiben maddeler 7 alan uzmanı ile paylaşılmış ve alan uzmanlarından testin kapsam geçerliliği, test maddeleri ve çeldiriciler hakkında değerlendirme yapmaları istenmiştir. Gelen öneriler doğrultusunda test üzerinde iyileştirmeler gerçekleştirilmiştir. Sürecin devamında test araştırmanın katılımcıları arasında yer almayan farklı bir öğrenci grubu üzerinde uygulanarak testin cevaplanma süresine karar verilmiş ve soruların öğrenciler tarafından anlaşılırlığı test edilmiştir.

Testin her bir bölümünde "∀∀", "∀∃", "∃∀" ve "∃∃" niceleyici yapısında birer matematiksel önerme bulunmaktadır. Önermelerin içerdiği matematiksel bilginin öğretmen adaylarının tümünün aşina olduğu türden olmasına dikkat edilmiştir. Testin birinci bölümünü oluşturan ve çoktan seçmeli türde olan ilk dört madde, sözel olarak verilmiş bir önermenin olumsuzunun sözel biçimini tanıyabilmeyi ölçmeye yöneliktir. Bu bölümdeki sorular SÖT ön eki ve peşine, H ile V harfleri sırasıyla ∀ ile ∃ niceleyicilerini temsil etmek üzere iki harf getirilerek kodlanmıştır. Örneğin, SÖTHH ifadesi bünyesinde ∀∀ niceleyici yapısını barındıran maddeyi temsil etmektedir. Testin ikinci bölümün oluşturan 5-8 numaralı maddeler de çoktan seçmeli türden olup, sembolik biçimde ifade edilmiş bir önermenin olumsuzunun sembolik biçimini tanımaya ilişkindir. Bu bölümdeki sorular SET ön eki ve peşine daha önce açıklandığı üzere iki harf getirilerek kodlanmıştır. Örneğin, SETVV ifadesi bünyesinde ∃∃ niceleyici yapısını barındıran soruyu temsil etmektedir.

3.3. Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleme yeterliklerinin ölçülmesi Rasch Ölçme Teorisi (RÖT) bünyesinde yer alan İkili Model ile Winsteps (Sürüm: 3.91) yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının sorulara verdiği yanıtlar doğru, yanlış veya boş olarak sınıflandırılmış ve doğru cevaplara 1 puan verilmiş boş ya da yanlış cevaplara ise puan verilmemiştir. Puanlama hatasının oluşmaması için test maddelerine verilen yanıtların puanlanması her iki yazar tarafından ayrı olarak gerçekleştirilmiştir. Testten elde edilen ham puanlar ilk olarak İkili model kullanılarak eşit aralıklı ölçülere (logit) dönüştürülmüş, devamında bu ölçüler farklı sınıf seviyesinde yer alan öğrencilerin performansları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için gerçekleştirilen tek yönlü varyans analizinde (ANOVA) kullanılmıştır. Antalyalı (2010), tek yönlü varyans analizinde gruplar arası varyansın homojen olması gerektiğini, eğer bu durum mevcutsa analizin varsayımlarının karşılandığını belirtmektedir. Buradan hareketle, varyans analizi öncesinde gruplar arası varyansın homojen olup olmadığı sınanmıştır. Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu oluşturmada sahip oldukları yanılgıları ortaya çıkarmak için öğrencilerin çoktan seçmeli sorulara verdikleri yanıtların çeldiricilere göre dağılımı belirlenmiştir.

3.4. Geçerlik ve Güvenirlik

Araştırmada kullanılan testin görünüş geçerliliğini arttırmak için maddeler, testin amacı hakkında bilgilendirilen 7 alan uzmanının değerlendirmesine sunulmuş ve gelen dönütler temelinde maddeler ve çeldiriciler üzerinde iyileştirmeler gerçekleştirilmiştir.

RÖT bağlamında bir testin yapı geçerliliği ile doğrudan ilişkili olan gösterge madde uyum istatistikleridir (Linacre, 2022). Gerçekleştirilen ölçüm sonucunda elde edilen ölçülerin eşit aralıklı olması verilerin modele kabul edilebilir seviyede uyum sağlaması ile mümkündür (Bond vd., 2021). Wright ve Linacre (1994) katılımcılar için çok önemli sonuçları olmayan testler için makul aralığı 0.7-1.3 olarak belirtmektedir. Testin yapı geçerliliğine ilişkili olan bir diğer gösterge maddelerin nokta-ölçü korelasyonlarıdır. Bu katsayılar, testte yer alan maddelerin ölçülmesi hedeflenen nitelik ile uyumlu olup olmadığına işaret etmektedir (Boone & Staver, 2020). Nokta-ölçü korelasyon katsayısı için önerilen alt eşik 0.3’tür (Boone, 2020). Bu araştırmada maddelerin iç uyum indeksleri 0.74-1.28 aralığında, dış uyum indeksleri 0.77- 1.24 ve nokta-ölçü korelasyon değerleri ise 0.33-0.66 aralığında belirlenmiştir.

Yürütülen bir Rasch analizi sonucunda hem kişilere hem de test maddelerine ilişkin güvenirlik katsayıları elde edilmektedir. Elde edilen katsayılar 1’e ne kadar yakınsa ölçümün o denli yüksek iç tutarlılığa sahip olduğu anlaşılmaktadır. Testten elde edilen ham puanların güvenirlik (KR-20) katsayısı .50, Rasch ölçüleri temelinde kişi güvenirlik katsayısı .45, maddelere ilişkin güvenirlik katsayısı ise .98 olarak hesaplanmıştır. Ham puanlardan elde edilen güvenirlik katsayısı ve Rasch ölçüleri temelinde hesaplanan kişi güvenirlik katsayısı düşük elde edilmiştir. 10’dan daha az sayıda maddeye sahip testlerde güvenirlik katsayısının düşük elde edilmesi yaygın bir durumdur (Pallant, 2020). 50 veya üzeri madde sayısına sahip testlerin .8 ve üzeri bir güvenirlik katsayısı (KR-20) üretmesi beklenirken, 10 ile 15 maddeden oluşan kısa testlerde katsayının .5 civarında olması tatmin edicidir (Kehoe, 1994).

3.5. Etik İzin

Araştırma için Trabzon Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu’ndan 01.04.2024 tarih ve 2024-3/3.6 sayılı karar ile etik kurul izni alınmıştır.

BULGULAR VE YORUM

4.1. Madde Hiyerarşisine İlişkin Bulgular

Öğrencilerin test maddelerine verdikleri yanıtlar üzerinde gerçekleştirilen Rasch analizi sonucunda maddelerin ölçülerine, standart hatalarına, uyum indekslerine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

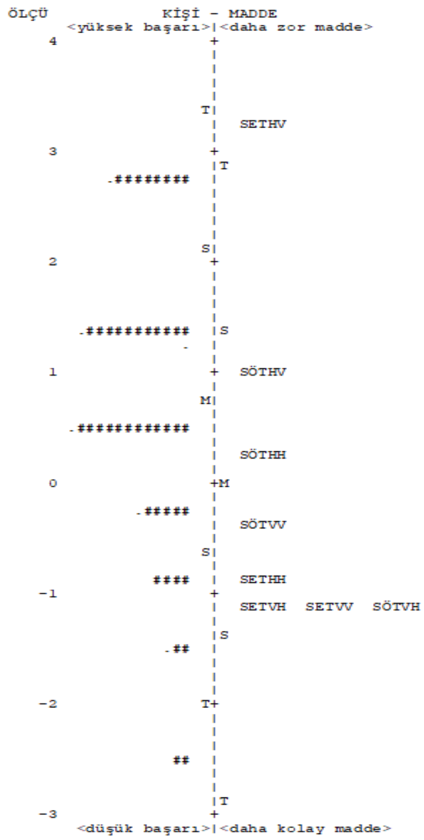
Madde Ölçüleri Ve Uyum İstatistiklerine İlişkin Elde Edilen Değerler

Madde	Ölçü (SH)	İç uyum (MnSq)	Dış uyum (MnSq)	Madde	Ölçü (SH)	İç uyum (MnSq)	Dış uyum (MnSq)
SETHV	3.30 (0.24)	1.10	1.20	SETHH	-0.81 (0.20)	0.73	0.59
SÖTHV	0.97 (0.17)	1.09	1.24	SETVV	-1.10 (0.21)	0.72	0.56
SÖTHH	0.29 (0.17)	1.13	1.12	SETVH	-1.10 (0.21)	0.66	0.52
SÖTVV	-0.40 (0.19)	1.22	1.31	SÖTVH	-1.15 (0.21)	1.23	1.24

Tablo 1'den görüldüğü üzere testin en zor maddesi SETHV, en kolay maddesi ise SÖTVH kodlu maddedir. Bununla birlikte SÖT kodlu maddeler, biri hariç diğerlerine nazaran yanıtlanması daha zor maddeler olarak konumlanmıştır. Barındırdığı niceleyiciler açısından ele alındığında ise "HV" yapısını barındıran maddeler en zor, "VH" yapısını barındıranlar ise en kolay madde grubunu oluşturduğu görülmektedir.

Şekil 1

Kişi-madde haritası



Gerçekleştirilen analiz sonucunda kişilerin ve maddelerin birbirine göre dağılımını gösteren kişi-madde haritası –Wright haritası olarak da isimlendirilir– Şekil 1'de sunulmuştur. Rasch analizi sonucunda kişi ve madde ölçüleri aynı birim cinsinden (logit) raporlandığından kişiler ve maddeler doğrudan karşılaştırılabilmektedir. Şekil 1'in ortasında yer alan kesikli doğru parçası araştırma konusu olan niteliği ölçen bir cetvel olarak düşünülebilir. Cetvelin sağ tarafında maddeler, sol tarafında ise kişilerin dağılımı yer almaktadır. Sol tarafta aşağıdan yukarı gidildikçe kişilerin yeterlikleri, sağ tarafta ise maddelerin zorluğu artmaktadır. Sol ve sağ tarafta yer alan M, S ve T harfleri sırasıyla ortalama, bir standart sapma ve 2 standart sapma değerlerini göstermektedir. Şekilden anlaşılacağı üzere kişilerin ortalaması maddelerin ortalamasından büyüktür. Ayrıca, ölçüsü örneklem ortalamasının üzerinde olan 2 madde bulunmaktadır. Dolayısıyla örneklem bir bütün olarak düşünüldüğünde, SÖTHV ile SETHV kodlu maddeler örneklem için yanıtlanması zor maddelerdir. Şeklin solunda yer alan # simgesi 4 kişiyi, · simgesi ise 1 ile 3 arasında bir tam sayı kadar kişiyi temsil etmektedir. Kişi ve madde konumları dikkate alındığında, örneklem içerisinde ölçüsü testin SETHV kodlu maddesinin ölçüsü üzerinde yer alan kişi bulunmamaktadır. Bununla birlikte örneklemin büyük bir bölümü için SETHH, SETVH, SETVV ve SÖTVH kodlu maddeler yanıtlanması kolay maddelerdir.

4.2. Sınıf Seviyesinin Etkisine İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu belirleyebilme yeterliklerinin sınıf seviyesi açısından farklılaşıp farklılaşmadığını belirlemek için Rasch analizi sonucunda belirlenen kişi ölçüleri üzerinde tek yönlü varyans analizi gerçekleştirilmiştir. Sınıf seviyelerine ilişkin elde edilen betimsel istatistikler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2

Sınıf Seviyesine Göre Kişi Ölçülerinin Betimsel İstatistikleri

Sınıf	*n*	$\bar{X}$	SS	SH	GA (%95)
1. sınıf	29	1.120	1.245	0.23	(0.65, 1.60)
2. sınıf	57	0.258	1.275	0.17	(-0.08, 0.59)
3. sınıf	42	0.976	1.110	0.17	(0.63, 1.32)
4. sınıf	58	0.728	1.568	0.20	(0.31, 1.14)

Tablo 2'den görüldüğü üzere, 1. sınıf öğrencilerinin ölçülerinin ortalaması en büyük iken 2. sınıf öğrencilerinin ölçülerinin ortalaması en küçüktür. Farklı sınıf seviyelerinde öğrenim görmekte olan öğrencilerinin ölçülerinin ortalamaları arasındaki farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için gerçekleştirilen varyans analizinden elde edilen istatistikler Tablo 3'de sunulmuştur.

Tablo 3

Farklı Grupların Ortalamalarını Kıyaslamak İçin Gerçekleştirilen ANOVA Sonuçları

Varyans Kaynağı	Kareler Toplamı	SS	Kareler ortalaması	*F*	*p*	η^2
Gruplar arası	19.48	3	6.49	3.63	.014	0.06
Gruplar içi	325.13	182	1.78			
Toplam	344.61	185				

Tablo 3'te görüldüğü üzere farklı sınıf seviyelerinde bulunan öğrencilerin ölçülerinin ortalamaları arasında anlamlı farklılık bulunmaktadır: $F(3, 185) = 3.63, p = .014 < .05$. Hesaplanan etki büyüklüğü (η^2=0.06) sınıf değişkeninin ölçülen yeterlik üzerinde orta düzeyde etkisinin olduğuna işaret etmektedir (Cohen, 1988; akt. Pallant, 2020). Hangi gruplar arasındaki farkın anlamlı olduğunu belirlemek için yapılan Tukey testi sonucunda 1. sınıf öğrencilerinin ortalaması ($\bar{X}$ = 1.120, SS=1.245) ile 2. sınıf öğrencilerinin ortalaması ($\bar{X}$ = 0.258, SS=1.275) arasındaki farkın ve 2. sınıf öğrencilerinin ortalaması ($\bar{X}$ = 0.258, SS=1.275) ile 3. sınıf öğrencilerinin ortalaması ($\bar{X}$ = 0.976, SS=1.110) arasındaki farkın anlamlı olduğu ortaya çıkmıştır.

4.3. Öğretmen Adaylarının Sahip Oldukları Yanılgılara İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu oluşturmada sahip oldukları yanılgıları belirlemek için testte yer alan sorulara verilen yanıtların çeldiricilere dağılımı ortaya çıkarılmıştır. Yanıtların çeldiricilere dağılımı Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4

Öğrencilerin Yanıtlarının Çeldiricilere Dağılımı

Madde	A	B	C	D	E	Madde	A	B	C	D	E
SÖTHH	44 (%23)	28 (%14)	4 (%2)	2 (%1)	116 (%60)	SETHH	1 (<%1)	4 (%2)	2 (%1)	148 (%79)	33 (%18)
SÖTVV	41 (%20)	5 (%3)	136 (%70)	5 (%3)	7 (%4)	SETVV	155 (%80)	1 (<1%)	2 (%1)	1 (<%1)	35 (%18)
SÖTHV	10 (%5)	70 (%36)	2 (%1)	92 (%47)	20 (%10)	SETVH	6 (%3)	155 (%80)	28 (%14)	1 (<%1)	4 (%2)
SÖTVH	15 (%8)	156 (%80)	12 (%6)	8 (%4)	3 (%2)	SETHV	1 (<1%)	9 (%5)	28 (%14)	127 (%65)	29 (%15)

Tablo 4'ten görüldüğü üzere SÖTHH kodlu maddede başarı gösteremeyen öğrencilerin yanıtlarının A ve B çeldiricilerinde yoğunlaştığı görülmektedir. Bu çeldiricilerin ortak özelliği, her ikisinde de soruda yer verilen önerme içerisindeki iki niceleyiciden yalnız bir tanesinin değiştirilmiş olmasıdır. B çeldiricisinde, soruda yer alan önerme içerisindeki "her alt kümesinin" ifadesi aynen bırakılıp "her elemanı" ifadesi "en az bir elemanı" olarak değiştirilmiştir. A çeldiricisinde ise "her alt kümesinin" ifadesi "en az bir alt kümesinin" olarak değiştirilmiş fakat "her elemanı" ifadesi aynen bırakılmıştır.

SÖTVV kodlu maddeye yanlış cevap veren adayların tercihleri A şıkkında yoğunlaşmıştır. Bu çeldiricide yer alan önerme, soruda yer verilen önermenin yalnızca koşul kısmının olumsuzlanması, niceleyiciler kısmının ise olduğu gibi bırakılmasıyla oluşturulmuştur.

SÖTHV kodlu maddede yanlış yanıt veren adaylar genellikle B veya E seçeneklerini tercih etmişlerdir. Bu maddede olumsuzunun oluşturulması istenen önermede, önermenin anlamını bozmayacak şekilde "en az bir" ifadesi yerine "bir" ifadesi kullanılmıştır. B ve E çeldiricilerinde yer alan önermelerin ortak özelliği birer niceleyici içermesidir.

SETHH ve SETVV kodlu maddelere verilen yanlış yanıtların her iki maddede E çeldiricisinde, SETVH kodlu madde de ise C çeldiricisinde yoğunlaştığı görülmektedir. Bu üç madde de olumsuzlanması istenen önermeler "$\in$" sembolünü içermektedir. Bununla birlikte, E çeldiricilerinde ve C çeldiricisinde yer alan önermeler "$\notin$" sembolü kullanılarak oluşturulmuştur.

Son olarak SETHV kodlu maddede yanlış yanıt veren adayların büyük bölümü D çeldiricisini, bir kısmı ise C çeldiricisini, görece daha az kısmı ise B çeldiricisini işaretlemişlerdir. B çeldiricisinde yer alan önerme, olumsuzlanması istenen önermenin sadece koşul kısmının olumsuzlanması fakat niceleyiciler kısmının olduğu gibi bırakılmasıyla oluşturulmuştur. C çeldiricisindeki önermenin doğru yanıttan tek farkı, olumsuzlanması istenen önermedeki "$\wedge$" bağlacının değiştirilmeden bırakılmasıdır. D çeldiricisinin doğru yanıttan tek farkı ise, olumsuzlanması istenen önermede yer alan kümelerde bileşke işlemini ifade eden sembolün kesişim olarak değiştirilmiş olmasıdır.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Araştırmada cevap aranan sorulardan biri, testte yer alan maddelerin nasıl bir hiyerarşi oluşturduğu idi. Bu amaçla elde edilen bulgular, genel olarak öğretmen adayları için sözel olarak verilmiş önermelerin olumsuzunu belirlemenin sembolik olanlara kıyasla daha zor olduğu sonucunu ortaya koymuştur. Ortaya çıkan bu durumun, sembolik olarak ifade edilmiş önermeleri olumsuzlamanın diğerine nazaran daha analitik bir yöntemle gerçekleştirilebilmesinden ileri geldiği düşünülmektedir. Bir başka ifadeyle, sembolik olarak ifade edilmiş önermeleri ifade ettiği anlamı dikkate almadan kural temelli biçimde olumsuzlamak mümkündür. Önermenin olumsuzunun nasıl oluşturacağına ilişkin kuralları bilen bir kişi, ne söylediği hakkında hiçbir fikri olmadığı sembolik biçimde verilmiş bir önermeyi doğru biçimde olumsuzlayabilir. Sözel olarak ifade edilmiş önermelerde ise önermenin anlamı önermenin okunması esnasında dolaysız biçimde açığa çıkmaktadır. Sonuç olarak, anlamın olumsuzlama sürecine doğrudan dâhil olmasının, öğrencilerin sözel biçimde verilmiş önermeleri olumsuzlamada diğerine nazaran daha düşük performans sergilemesinde bir faktör olduğu değerlendirilmektedir. Bernard (1995) çalışmasında, olumsuzu oluşturulacak önermenin doğru olup olmamasının öğrencilerin önermeleri olumsuzlama başarılarını etkilediği sonucuna ulaşmıştır. Bernard'ın (1995) elde ettiği bu sonuç, iki farklı önerme tipi arasındaki başarı farkının ortaya çıkmasında anlam faktörünün rol oynadığına ilişkin değerlendirmeyi destekler niteliktedir. Buradan hareketle, bu konuya ilişkin gerçekleştirilecek öğretim süreci içerisinde sözel olarak verilmiş önermeleri olumsuzlamaya ilişkin etkinliklere daha fazla yer verilmesi önerilmektedir.

Belirlenen madde hiyerarşisi, hem sözel hem de sembolik bağlamda $\forall\exists$ niceleyici sıralamasına sahip önermeleri olumsuzlamanın $\exists\forall$ sıralamasına sahip önermelere kıyasla daha zor olduğunu ortaya koymuştur. Ortaya çıkan bu durum Piatek-Jimenez (2020) ile Dubinsky ve Yiparaki'nin (2000) çalışmalarında elde ettiği sonuçlar ile çelişmektedir. Bu çelişkinin öğrencilerin önermeleri anlamasında yalnızca niceleyici sıralamasının değil aynı zamanda önermenin barındırdığı matematiksel ilişkilerin ve nesnelerin de etkili olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu çalışmada sözel bağlamda $\forall\exists$ yapısına sahip önermede "en az bir" ifadesi anlamı bozmayacak şekilde "bir" olarak kısaltılmıştır. Sembolik bağlamdaki önerme ise hem mantıksal bağlaç hem de kümelerde birleşim işlemi içermektedir. Bu faktörlerin $\forall\exists$ sıralamasına sahip önermeleri olumsuzlamayı diğerine nazaran daha zor hale getirdiği, dolayısıyla literatürdeki diğer araştırmalar ile farklı sonuç ortaya çıkmasına sebep olduğu değerlendirilmektedir.

Araştırmada cevap aranan sorulardan bir diğeri, öğretmen adaylarının önermelerin olumsuzunu oluşturma yeterliklerinin sınıf değişkeni açısından değişim gösterip göstermediğini belirlemekti. Gerçekleştirilen tek yönlü varyans analizi sonucunda en iyi performansın birinci sınıf öğrencilerinin, en kötü performansın ise 2. sınıf öğrencileri tarafından sergilendiği ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte 1. sınıf ve 3. sınıf öğrencilerinin ortalamalarının 2. sınıf öğrencilerinin ortalaması ile farkının anlamlı olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının öğrenim gördüğü programda genel anlamda matematiksel önermelere ilişkin en yoğun içerik ikinci yarıyılda verilen Soyut Matematik dersi içerisinde işlenmektedir. Bununla birlikte sırasıyla beşinci ve altıncı yarıyılda sunulan cebir ve cebir öğretimi derslerinde de önermeler sıklıkla yer almaktadır. Ortaya çıkan bu farkın, ilgili dersler ve bu derslerin üzerinden geçen zamandan kaynakladığı değerlendirilmektedir. Bu sebepten diğer alan derslerinde gerçekleştirilen ispatlama etkinliklerinde önermeleri olumsuzlamaya ilişkin tartışmaların gerçekleştirilmesinin öğrencilerin bu husustaki yeterliklerinin kalıcı olmasına katkı sunabileceği değerlendirilmektedir.

Araştırmada cevap aranan sorulardan bir diğeri, öğretmen adaylarının önermeleri olumsuzlamada deneyimledikleri zorlukları belirlemekti. Yapılan inceleme neticesinde ortaya çıkan durumlardan biri, adayların önermeleri olumsuzlarken önerme içerisinde yer alan niceleyicilerden yalnızca bir tanesini değiştirmesidir. Bununla birlikte öğrencilerin bir kısmının önermenin yalnızca koşulunu olumsuzladığı, niceleyici kısmını olduğu gibi bıraktığı görülmüştür. Bu davranışlar Barnard'ın (1995) çalışmasında da ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin yanıt desenlerinde gözlemlenen bir diğer durum ise önermeleri ifade ediş biçiminin öğrencilerin önermenin yapısına ilişkin anlayışlarında etkili olduğudur. Bunun sonucunda öğrenciler SÖTHV kodlu maddede yer alan "B kümesinin her elemanı bir tamsayının kareköküne eşittir" önermesini tek niceleyici içerir şekilde yorumlamışlardır. Bu önermede "∃" niceleyicisini karşılamak için "en az bir" ifadesi yerine "bir" ifadesi yer almaktadır. Çekmez (2020) de araştırmasında niceleyicileri ifade etmek için kullanılan farklı sıfatların, öğrencilerin önermelerin kastettiği manayı yorumlamada etkili olduğunu belirlemiştir. Bunlardan hareketle, konuya ilişkin gerçekleştirilecek öğretim sürecinde farklı üslup benimsenerek ifade edilmiş önermelere yer verilmesinin ve önermeleri olumsuzlamada niceleyicilerden yalnızca birinin değiştirilmesi durumunun niçin geçerli olmadığının tartışılmasının faydalı olacağı değerlendirilmektedir.

Araştırmada ortaya çıkan yanılgılardan bir diğeri, bazı adayların önermelerin olumsuzunu belirlemede mantıksal bağlaçlarda gerekli dönüşümü yapamamalarıdır. Elde edilen bu sonuç Baker ve Campbell'in (2004) araştırmasında elde ettiği sonuç ile paralellik göstermektedir. Bununla birlikte, önermelerin olumsuzunu oluştururken niceleyiciler bölümünde yer alan "elemanıdır" sembolünün "elemanı değildir" sembolüne dönüşmesi gerektiğini düşünmektedir. Ayrıca, bazı adaylar koşul kısmında yer alan kümelerde birleşim işleminin önermenin olumsuzunda kesişim işlemine dönüşmesi gerektiğini düşünmüşlerdir. Dolayısıyla, önermelerin olumsuzunu belirlemeye ilişkin tasarlanacak öğretim sürecinde bu türden örneklere yer verilmesinin faydalı olacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmada önermeleri olumsuzlama yeterliği çoktan seçmeli sorular ile ölçülmeye çalışılmıştır. İleriki araştırmalarda bu yeterliğin incelenmesi, verilen bir önermenin olumsuzunu oluşturmayı isteyen açık uçlu sorular da kullanılarak daha geniş bir perspektiften incelenebilir. Bunun yanı sıra, önermelerin ifadesinde benimsenen farklı üslupların önermeyi olumsuzlama yeterliklerine nasıl etki ettiğini incelemeyi amaçlayan çalışmalar gerçekleştirilebilir. Son olarak araştırma sonuçları yorumlanırken şu sınırlamalar göz önünde bulundurulmalıdır. Öğrencilerin testte yer alan maddelerde gösterdikleri performanslar hiç kuşkusuz tabi oldukları derslerde yer verilen matematiksel içerikten (örnekler, açıklamalar, kullanılan ispat yöntemleri vb.) bağımsız düşünülemez. Ayrıca alan bilgisi derslerinin yürütücülerinin sahip oldukları pedagojik alan bilgisi de öğrencilerin performanslarını etkileyen diğer bir unsur olduğu değerlendirilmektedir.

KAYNAKÇA

Anapa Saban, P., Yenilmez, K., & Çimen, E. E. (2014). Niceleyici içeren matematiksel ifadelere dair öğrenci algılarının karakterizasyonu. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(1), 115-137.

Antalyalı, L. Ö. (2010). Varyans analizi (Anova-Manova). Ş. Kalaycı (Ed.), *SPSS uygulamalı çok değişkenli istatistik teknikleri* (ss.130-182) içinde. Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti.

Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM—Mathematics Education, 51*(5), 793–806. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01066-4

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: What is specific to this way of proving? ZDM Mathematics Education, 40(3), 401–412. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0091-2.

Asar, O. A., Arıkan A., & Arıkan, A. (2022). *Cebir*. Palme Yay.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2020). *Temel matematik kavramlarının künyesi* (2. baskı). Palme.

Azrou, N., & Khelladi, A. (2019). Why do students write poor proof texts? A case study on undergraduates' proof writing. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 257–274. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09911-9

Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14*(4), 345-353. https://doi.org/10.1080/10511970408984098

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. J. Kilpatrick, W. G. Martin ve D. Schifter (Ed), *A Research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27–44) içinde. National Council of Teachers of Mathematics.

Barnard, A. D. (1995). The impact of meaning on students' ability to negate statements. L. Meira,& D. Carraher (Eds.) *Proceedings of the nineteenth international conference for the psychology of mathematics education,* (Vol. 2 pp. 3–10) içinde. Recife, Brazil.

Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies, 36*(3), 283-298. https://doi.org/10.1080/03055690903424964

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajcevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(2), 105–127. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9248-1.

Bond, T. G., Yan, Z., & Heene, M. (2021). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (4th ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429030499

Boone, W. J. (2020). Rasch basics for the novice. M. S. Khine (Ed.). *Rasch measurement: Applications in quantitative educational research* (pp. 9-30) içinde. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-15-1800-3

Boone, W. J., & Staver, J. R. (2020). *Advances in Rasch analysis in the human sciences*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43420-5

Brown, S. A. (2018). Are indirect proofs less convincing? A study of students' comparative assessments. *Journal of Mathematical Behavior,* 49, 1–23. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.12.010

Çekmez, E. (2020). Öğretmen adaylarının önermelerinin sembolik ve sözel formları arasında tercüme yapabilme becerilerinin incelenmesi. *Trakya Eğitim Dergisi, 10*(2), 551-565. https://doi.org/10.24315/tred.642192.

Çepni, S. (2007). Araştırma ve proje çalışmalarına giriş. Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). Research methods in education. London: Routledge Falmer.

Dawkins, P. C., & Zazkis, D. (2021). Using moment-by-moment reading protocols to understand students' processes of reading mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(5), 510–538. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0151

Dogan, M. F., & Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers’ proving activities. *Educational Studies in Mathematics, 106*(1), 133–150. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10002-3

Doruk, M., & Kaplan, A. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında ters örnek üretme becerileri. *Ondokuz Mayis University Journal of Education Faculty, 37*(1), 97-115. https://doi.org/10.7822/omuefd.310076

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *CMBS issues in mathematics education* (pp. 239-289) içinde. American Mathematical Society.

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2018). Learners’ use of domain-specific computer-based feedback to overcome logical circularity in deductive proving in geometry. *ZDM—Mathematics Education, 50*(4), 699–713. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0950-4

Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(1), 219-236.

Hanna, G., & Yan, X. (2021). Opening a discussion on teaching proof with automated theorem provers. *For the Learning of Mathematics, 41*(3), 42–46. https://www.jstor.org/stable/27091220

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2020). High school mathematics teachers’ content knowledge of the logical structure of proof deriving from figural-concept interaction in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 585–603. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1736347

Kehoe, J. (1994). Basic item analysis for multiple-choice tests. *Practical Assessment, Research, and Evaluation 4*(1), 10. https://doi.org/10.7275/07zg-h235

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379. https://doi.org/10.2307/4149959

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 256–262. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002

Lew, K., & Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students’ at-home exploration of a prove-or-disprove task. *Journal of Mathematical Behavior, 54,* 100674. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003

Lin, F. L., Lee, Y. S., & Wu Yu, J. Y. (2003). Students’ understanding of proof by contradiction. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, (Vol. 4 pp. 443-449). Honolulu.

Linacre, J. M. (2022, 08 20). *A user quide to Winsteps Ministep Rasch model computer programs*. Winteps: https://www.winsteps.com/a/Winsteps-Manual.pdf adresinden alındı

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 249-266. https://doi.org/10.1007/bf01273731

Öztürk, T., & Demirel, D. (2022). Türkiye’de ispat üzerine yapılan çalışmaların analizi: Bir sistematik derleme. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 54,* 32-68. https://doi.org/10.9779/pauefd.782832.

Öztürk, M., Akkan, Y. & Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet International Journal of Education, 8*(2), 429-452. http://dx.doi.org/10.30703/cije.490887

Pallant, J. (2020). *SPSS survival manual* (6th ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003117407

Piatek-Jimenez, K. (2010). students' interpretations of mathematical statements involving quantification. *Mathematics Education Research Journal, 22*(3), 41-56. https://doi.org/10.1007/bf03219777

Rogers, K. C., & Kosko, K. W. (2019). How elementary and collegiate instructors envision tasks as supportive of mathematical argumentation: A comparison of instructors' task constructions. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 228–241. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.08.004

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (s. xii–xvi) içinde. Routledge.

Stylianou, D., Blanton, M., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91-134. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM–Mathematics Education, 56,* 47-59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. In M. N. Fried, & T. Dreyfus (Eds.). Mathematics and mathematics education: Searching for common ground (pp. 223–235). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_13

Uygur-Kabael, T. (2020). İspat ve ispatlamada bazı temel kavramlar. I. Uğurel (Ed.), *Matematiksel ispat ve öğretimi* (ss. 41-68) içinde. Anı Yayıncılık.

Wright, B. D., & Linacre, J. M. (1994). *Reasonable mean-square fit values*. Rasch Measurement Transactions, 8(3), 370.

Zhuang, Y., & Conner, A. (2022). Secondary mathematics teachers' use of students' incorrect answers in supporting collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 26*(2), 208-231. https://doi. org/10.1080/10986065.2022.2067932

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In the academic literature, it is widely acknowledged that students encounter difficulties in constructing mathematical proofs. One reason for the challenges students face is their indecisiveness in reaching judgments about the correctness of a proof (Öztürk et al., 2019). Consequently, students tend to base their decisions on the validity of a proof on whether it has been previously demonstrated by their teachers or is found in a textbook (Öztürk et al., 2019). Moore (1994) identified reasons why students struggle to engage in proof construction, including failure to use definitions, lack of understanding of mathematical language and notation, inability to apply proof methods, and uncertainty about how to initiate a proof. It is noted that a further cause of the difficulties students encounter in proof construction is the difference in the way mathematical concepts are taught at the secondary and tertiary levels (Baştürk, 2010).

Despite the challenges students face in constructing proofs, they acknowledge the central role that proofs play in mathematics and the certainty they contribute to knowledge, thus attributing importance to proofs (Baştürk, 2010; Stylianou et al., 2015). In addition to students, Knuth (2002) reported that teachers have limited perspectives on the nature of proof in mathematics and insufficient understanding of what actions constitute a proof.

Mathematical proof types are generally divided into two categories: direct and indirect proofs. To successfully carry out a proof constructed using indirect proof methods, it is first necessary to determine the negation of the hypothesis constituting the theorem and/or the proposition expressed by the conclusion. Researchers indicate that performing proofs using indirect proof types is relatively more challenging for students compared to direct proof methods (Antonini & Mariotti, 2008; Bleiler et al., 2014). One of the factors that may lead to this situation is students' inability to form the negation of propositions. Upon reviewing domestic literature, no study aiming to determine pre-service teachers' competence in forming the negation of propositions and the difficulties they experience in this regard has been encountered. This study aims to contribute to this existing gap in domestic literature. Accordingly, the objective of the study is to determine the competence of primary school mathematics pre-service teachers in forming the negation of propositions, to identify the variation of this competence according to grade level, and to pinpoint the errors they make in this regard. The research questions to be addressed in the study in line with this objective are as follows.

1. How does the competency of teacher candidates in identifying the negation of propositions reveal a hierarchy?

2. Do the competencies of teacher candidates in identifying the negation of propositions vary according to the grade level?

3. What are the difficulties that teacher candidates experience in forming the negation of propositions?

Method

Participants in the study consisted of a total of 194 prospective teachers enrolled in a state university's elementary mathematics education program, comprising 31 first-year, 58 second-year, 46 third-year, and 59 fourth-year students. The program where the research was conducted included a comprehensive and detailed content on forming the negation of propositions, which was presented in the second semester abstract mathematics course. Consequently, the data collection instrument was administered to the students two weeks after the completion of the relevant content.

In the study, data were obtained from a test consisting of two parts developed by the authors. Each section of the test contains a mathematical proposition in the form of "$\forall\forall$", "$\forall\exists$", "$\exists\forall$", and "$\exists\exists$" quantifiers. The first four items forming the first part of the test, which are in multiple-choice format, aim to measure the ability to recognize the negation of a verbally given proposition. Items 5-8, which constitute the second part of the test and are also in multiple-choice format, are designed to assess the ability to recognize the symbolic form of the negation of a proposition expressed symbolically.

The measurement of pre-service teachers' competence in identifying the negations of propositions was conducted within the framework of Rasch Measurement Theory (RMT) using the Dichotomous Model and Winsteps software (Version: 3.91). To ascertain whether there exists a difference in the performances of students at different grade levels, one-way analysis of variance (ANOVA) was employed. In order to elucidate the difficulties that prospective teachers face in forming negation of propositions, the distribution of students' responses to multiple-choice questions has been determined relative to distractors.

Results and Discussion

The analysis of variance (ANOVA) conducted revealed a significant difference in the means of measures among students at different class levels. The Tukey test was employed to determine which specific class differences were significant. The results indicated that there was a significant difference between the mean measures of first-year students and second-year students, as well as between the mean measures of second-year students and third-year students.

Students make errors in forming the negation of propositions by negating only one of the two quantifiers within the proposition. Another mistake is negating only the conclusion part of the proposition. Additionally, it has been determined that the different expression forms adopted while expressing propositions have an impact on students' performance. Furthermore, it has been observed that students change notations such as the set operations or elements in sets that should not be altered when forming the negation of the proposition in the conclusion part of the proposition. Based on the findings obtained, recommendations have been put forth for the teaching of the subject matter and for future research endeavors.

EK 1. Test

SÖTHH. ***p***: *T* kümesinin boş kümeden farklı her alt kümesinin her elemanı 3’ten büyüktür.

p önermesinin olumsuzunun (değilinin) sözel biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) *T* kümesinin boş kümeden farklı en az bir alt kümesinin her elemanı 3’ten küçük veya 3’e eşittir.

B) *T* kümesinin boş kümeden farklı her alt kümesinin en az bir elemanı 3’ten küçük veya 3’e eşittir.

C) *T* kümesinin boş kümeden farklı en az bir alt kümesinin en az bir elemanı 3’ten büyüktür.

D) *T* kümesinin boş kümeden farklı en az bir alt kümesinin elemanlarının hepsi 3’ten büyüktür.

E) *T* kümesinin boştan farklı en az bir alt kümesinin en az bir elemanı 3’e eşit veya 3’ten küçüktür.

SÖTVV. ***q*:** Çarpımları −1’den büyük veya eşit olacak şekilde en az bir tamsayı ve en az bir rasyonel sayı vardır.

q önermesinin olumsuzunun (değilinin) sözel biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) Çarpımları −1’den küçük olacak şekilde en az bir tamsayı ve en az bir rasyonel sayı vardır.

B) En az bir tamsayı vardır öyle ki her rasyonel sayı ile çarpımı -1'den küçüktür.

C) Her tamsayı ile her rasyonel sayının çarpımı -1'den küçüktür.

D) Rasyonel sayılardan en az birinin her tamsayı ile çarpımı -1'den küçüktür.

E) Her tamsayı için bir rasyonel sayı bulunabilir öyle ki çarpımlarının sonucu -1'den küçüktür.

SÖTHV. ***r***: *B* kümesinin her elemanı bir tamsayının kareköküne eşittir.

r önermesinin olumsuzunun (değilinin) sözel biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) *B* kümesinin en az bir elemanı bir tam sayının kareköküne eşittir.

B) En az bir tamsayının karekökü *B* kümesinin elemanı değildir.

C) Tam sayılar kümesinin elemanlarından en az birinin karekökü B kümesinin elemanıdır.

D) B kümesinde bir tamsayının karekökünden farklı olan en az bir eleman vardır.

E) Her tamsayının karekökü *B* kümesinin elemanı değildir.

SÖTVH. ***s***: *K* kümesinin en az bir elemanı *M* kümesinin her elemanının yarısının 3 fazlasından büyüktür.

s önermesinin olumsuzunun (değilinin) sözel biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) *M* kümesinin en az bir elemanının yarısının 3 fazlası *K* kümesinin her elemanından küçük veya eşittir.

B) *K* kümesinin her elemanı *M* kümesinin en az bir elemanının yarısının 3 fazlasından küçük veya eşittir.

C) *K* kümesinin her elemanı *M* kümesinin her elemanının yarısının 3 fazlasından küçük veya eşittir.

D) *M* kümesinin en az bir elemanının yarısının 3 fazlası, *K* kümesinin en az bir elemanından küçük veya eşittir.

E) K kümesinin her elemanı M kümesinin en az bir elemanının yarısının 3 fazlasından büyüktür.

SETHH. $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \in K\ \forall y \in M :\ (x+y)^2 \neq 9}$

p önermesinin olumsuzunun (değilinin) sembolik biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \in K\ \exists y \in M :\ (x+y)^2 = 9$

B) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \exists x \in K\ \exists y \in M :\ (x+y)^2 \neq 9$

C) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \in K\ \forall y \in M :\ (x+y)^2 = 9$

D) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \exists x \in K\ \exists y \in M :\ (x+y)^2 = 9$

E) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \exists x \notin K\ \exists y \notin M :\ (x+y)^2 = 9$

SETVV. $\boldsymbol{q} : \exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\ \exists \boldsymbol{p} \in \mathbb{Q} : \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n} \leq \mathbf{5}$

q önermesinin olumsuzunun (değilinin) sembolik biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall p \in \mathbb{Q} : p \cdot n > 5$

B) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall p \in \mathbb{Q} : p \cdot n \leq 5$

C) $\exists n \in \mathbb{Z}\ \forall p \in \mathbb{Q} : p \cdot n > 5$

D) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists p \in \mathbb{Q} : p \cdot n > 5$

E) $\forall n \notin \mathbb{Z}\ \forall p \notin \mathbb{Q} : p \cdot n > 5$

SETVH. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{M} \subset \mathbb{R}.\ \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}\ \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{M} : \boldsymbol{x} > \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{y})$

r önermesinin olumsuzunun (değilinin) sembolik biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \exists x \in K\ \forall y \in M : x \leq sin(y)$

B) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \in K\ \exists y \in M : x \leq sin(y)$

C) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \notin K\ \exists y \notin M : x \leq sin(y)$

D) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \exists x \in K\ \exists y \in M : x > sin(y)$

E) $K, M \subset \mathbb{R}.\ \forall x \notin K\ \forall y \notin M : x \leq sin(y)$

SETHV. ***s***: $A, B \subset \mathbb{R}.\ \forall S \subset A\ \exists T \subset B : S \neq T \wedge S \cup T = [2, 5]$

s önermesinin olumsuzunun (değilinin) sembolik biçimi aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) $A, B \subset \mathbb{R}.\ \forall S \subset A\ \forall T \subset B : S = T \wedge S \cup T \neq [2, 5]$

B) $A, B \subset \mathbb{R}.\ \forall S \subset A\ \exists T \subset B : S = T \vee S \cup T \neq [2, 5]$

C) $A, B \subset \mathbb{R}.\ \exists S \subset A\ \forall T \subset B : S = T \wedge S \cup T \neq [2, 5]$

D) $A, B \subset \mathbb{R}.\ \exists S \subset A\ \forall T \subset B : S = T \vee S \cap T \neq [2, 5]$

E) $A, B \subset \mathbb{R}.\ \exists S \subset A\ \forall T \subset B : S = T \vee S \cup T \neq [2, 5]$