

ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ “SÖZSÜZ İSPATLAR” İLE YAŞADIKLARI ZORLUKLAR HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ

Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU

Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü,

Arş.Gör. Kübra POLAT

Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü,

kubrapolaat@hotmail.com.tr

ÖZ

Matematik eğitiminde birçok araştırmacı görselleştirmenin ve ispatın önemini vurgulamaktadır ve de bu konu ile ilgili çalışmalar halen devam etmektedir. Görsel veya sözsüz ispatlar, tümevarımsal adımların, şekiller, diyagramlar veya grafiklere dayalı olduğu ispatlardır. Bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorluklar ile ilgili görüşlerini belirlemek amacı ile yapılmıştır. Çalışma, nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılarak yürütülmüştür. Çalışmanın katılımcılarını İç Anadolu’da bulunan bir devlet Üniversitesi’nde 2013-2014 eğitim öğretim yılında açılmış olan “Alan Eğitiminde Araştırma Projesi” dersini alan 5. Sınıfta öğrenimlerine devam eden 1. öğretime kayıtlı 26 ve 2. öğretime kayıtlı 31 olmak üzere toplam 57 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veriler dönem sonunda öğretmen adaylarına yöneltilmiş olan açık uçlu soru ile toplanmıştır. Bu açık uçlu soru ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının bu süreçte yaşadıkları zorluklar ile ilgili görüşlerini ortaya çıkarmak için kullanılmıştır. Veriler yazılı olarak toplanmıştır. Verilerin analizinde, öğretmen adaylarının cevapları benzerlik ve farklılıklarına göre tematik olarak sınıflandırılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçları, öğretmen adaylarının sözsüz ispatlarla en fazla zorlandıkları yerlerin verilen şekilleri anlayamama, açıklama olmaması, sözsüz ispat ile cebirsel ispat arasında ilişki kuramama, alan bilgisi eksikliği, kaynak sıkıntısı olduğunu göstermiştir. Bu nedenle sözsüz ispatların, zorlayıcı fakat öğrencilerin uzamsal görselleştirme ve uzamsal muhakeme becerini geliştirilebildiği söylenebilir. Çalışma sonucunda elde edilen sonuçlara dayalı olarak bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar kelimeler: İspat, sözsüz ispat, görselleştirme, matematik eğitimi, matematik öğretmeni adayları

SECONDARY MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS’ OPINIONS ABOUT THE DIFFICULTIES WITH “PROOF WITHOUT WORDS”

ABSTRACT

Many researchers have stressed the importance of visualization and proof in the learning of mathematics and have remarked that research in mathematics education has still a lot to develop about this topic. Visual proofs or proof without words are proofs where the deductive steps are based on figures diagrams or graphs. This study was conducted to determine secondary mathematics preservice teachers’ opinions about the difficulties with “proof without words”. Case study method was used in this study. Participants of the study consist of 57 secondary mathematics pre-service teachers who were fifth-year students in a state university located in the Central Anatolia. The study was conducted in 2013-2014 education and teaching year in the lesson that “Investigation Projects in Field Education”. Research data was obtained through the open-ended question that directed to pre-service teachers at the end of the period. The open-ended question is exerted to expose the secondary mathematics pre-service teachers’ opinions about the difficulties that they experience in this process. Data were collected in writing. In the analysis of the data, the answers of pre-service teachers were thematically classified in regard to the similarities and differences among their responses. The results of the study indicated that pre-service teachers they had problems in ability to understand the given shapes, lack of explanation, failure to develop relationships between proof without words and algebraic proof, lack of knowledge of the field, lack of resources. Therefore, it is said to be proof without words can be challenging and can develop student’s inductive reasoning, spatial reasoning, mental rotation and spatial visualization abilities. Some suggestions were based on the results obtained in this study.

Keywords: Proof, proof without words, visualization, visual proof, mathematic education, pre-service teachers

1.GİRİŞ

Matematiği öğrenmede ve öğretmede ispatın, görselleştirmenin ve görsel ispatların önemi çok sıkça vurgulanmaktadır. Gerçekten ispat, hem matematiğin hem de matematik eğitiminin merkezindedir (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Knuth, 2002). Bunun yansıması olarak da matematiğin kalbi ve matematiksel anlamayı desteklemek için önemli bir araç olarak ifade edilmektedir. Bu bakış matematik pratiklerini, matematik eğitimi teorilerini ve matematik müfredatını etkilemektedir (Knuth, 2002).

Öğrencilerin “Neden bunu ispatlamak zorundayız?” sorusu ile yüz yüze geldiğinde düş kırıklığı yaşamayan kimse yoktur (De Villiers, 1990). Matematiksel bir ispat (i) bir sonucu doğrulamak, (ii) başkalarını ikna etmek ve iletişim kurmak, (iii) bir sonucu keşfetmek ve (iv) bir tündengelim sistemde sonuçları sistemleştirmek için kullanılmasına rağmen (Almeida, 2001) Ball-Hoyles vd. (2002) ifade ettiği gibi birçok öğrenci için anlamı olmayan bir ritüeldir ve bu görüşü de belli örüntüler veya yalnızca sembollerle yapılan ispatlar desteklemektedir. Bu anlamda yapılan çalışmalar görselleştirmenin dolayısıyla da görsel ispatların bu önyargıyı kırmanın bir yolu olarak ifade etmektedir. Elbette öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için fırsatlar sunmak ve ispat sürecini anlamalarına yardımcı olmak önemlidir. Genellikle öğrenciler bir ispata nasıl başlayacağını bilemediklerinden dolayı onlara ispatların nasıl yapıldığını öğretmek de zordur. Sözsüz ispatları kullanmak öğrencilerin ispat sürecini anlamada etkilidir ve yeni bir araç değildir (Bell, 2011). Sözsüz ispatlar görselleştirme ile birlikte adı geçen yaklaşımlardan birisidir.

“Bir resim bin kelimedenden daha değerlidir” sözü birçok kültürde söylenmektedir (Casselman, 2000).Casselman (2000) görselleştirmenin matematikte önemli bir rol oynadığını vurgulamıştır. Günümüzde görsel argümanlar; belki kolaylıkla yanlış yorumlanabildiği ve bu yüzden de yanlış sonuç çıkarılmasına imkân vermesinden dolayı kesin ispatlar için mantıklı argümanlar olarak düşünülmeğe uzaktır. Her şeye rağmen yeni sonuçların keşfi ve daha fazla formal ispatın üretimi için bir yardımcı olduğu geniş ölçüde anlaşılmıştır. Son yıllarda görsel ispatlara ilgi yeni matematik araştırmalarında ve matematik eğitimi uygulamalarında hızla artmaktadır (Bardelle, 2009). Sözsüz ispat; formal bir argümanı kelimelerle ispatlamaksızın matematiksel bir ifadenin ispatını örneklerle açıklayan matematiksel bir çizimdir (Bell, 2011). Bardelle (2009) görsel ispatları (visualproofs), tündengelimsel adımları şekillere, diyagramlara ve grafiklere dayalı ispatlar olarak tanımlamıştır. Alsina ve Nelsen’a (2010) göre belli bir matematiksel ifadenin *niçin* doğru olabildiğini görmesine ve ayrıca o ifadenin ispatlamaya *nasıl* başlayabileceğini görmeye yardım eden resimler veya diyagramlardır. Bunun yanı sıra Alsina ve Nelsen (2009; s.xiii) sözsüz ispatları “görsel argüman” (visualargument) olarak da nitelendirmiştir. Bardelle’ye (2009) göre görsel ispatlar sözlü dilde hiçbir yorum ile sunulmayan (yani sözsüz), yalnızca diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan, ispatın yapılandırılması okuyucuya bırakılmış ispatlardır.

Sözsüz ispatlar matematiksel ispatı anlamada öğrencilere yardımcı olabilmektedir. Ayrıca matematiksel kavramları öğretirken sözsüz ispatları kullanmak, bir örnekle açıklamaları istendiğinde öğrencilerin muhakeme etme (akıl yürütme) yeteneklerini geliştirmede yardım edebilmektedir. Bu geliştirilmiş muhakeme formal bir ispata nasıl başlanacağını anlamada kılavuzluk edebilir. Formal ispatları anlama, sadece öğrencilerin matematiksel kavramları anlamasına değil aynı zamanda ileri seviye matematik için de öğrencileri hazırlamaya bağlıdır (Bell, 2011). Aynı zamanda matematiğin doğası, doğrunun doğası, dünyanın doğası ve anlamamızın doğası gibi derin ve ilginç sorulara kılavuzluk edebilir (Britz, Mammoliti ve Sørensen, 2014). Sözsüz ispatların bir ispat olup olmadığı sorularından öteye Miller (2012)

sözsüz ispatların matematikte özellikle matematiğin öğretiminde kıymetli bir araç olduğunu ifade etmektedir. Bu iddiasını desteklemek için ilk n tamsayının toplamı formülünü tümevarım yöntemi ile doğruluğunu gösterebilen bir öğrencinin bunun için doğru olduğuna ikna olamayacağını ifade etmektedir. Burada sözsüz ispatların etkili olabileceğini açıklamaktadır.

Hemen hemen her konu ile sözsüz ispat örnekleri vardır ve bu örnekler çeşitli internet sitelerinde, Nelsen (1993; 2000) tarafından yazılmış olan iki kitapta, makalelerde (Bell, 2011; Gierdien, 2007) bulunabilmektedir. Belirli konularda sözsüz ispatlar kullanılabilir görüşünün aksine Bell'in (2011) ifade ettiği gibi cebir, trigonometri, geometri ve analiz da yer alan matematiksel kavramların geniş bir yelpazesini kapsamakta üstelik matematik tarihi derslerinde de kullanılabilir.

Literatürde çok fazla sözsüz ispat örneği olmasına rağmen, sözsüz ispatların öğretimi, ispatlama becerisine yönelik etkileri, sözsüz ispata ilişkin görüşler ile ilgili pek fazla çalışma olmadığı gözlenmektedir. Özellikle yurt içinde yapılan çok az çalışma vardır. Bu çalışmalar da ortaöğretim öğrencileri (Uğurel, Moralı ve Karahan, 2011; Tekin 2010; Tekin-Konyalıoğlu, 2010), ortaöğretim matematik öğretmen adayları (Demircioğlu ve Polat, 2015), sınıf öğretmeni adayları (Doruk, Kıymaz ve Horzum, 2012) ile yapılmıştır. Demircioğlu ve Polat (2015) öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada öğretmen adayları sözsüz ispatların ispat, problem çözme, anlama, zihinsel, akıl yürütme, genelleme, işlem, analiz ve sentez yapabilme, görme ve düşünme becerilerini kazanmada etkili olduklarını ifade etmişlerdir. Ayrıca öğretmen adayları sözsüz ispatlarla başka ispat yöntemleri olduğunu da gördüklerini ifade etmişlerdir. Doruk-Kıymaz vd (2012) tarafından yapılan çalışmada $(a+b)^3$ özdeşliğinin geometrik ispatı için somut model geliştirme ve bu modeli kullanma etkinliği düzenlenmiştir. Uğurel-Moralı vd. (2011) tarafından yapılan çalışma da ise matematikte yetenekli olan ortaöğretim öğrencilerinin sözsüz ispatlarla bir deneyim yaşamalarının sağlanması ve sonrasında ürettikleri sözsüz ispat örneklerinin tartışılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda özel bir fen lisesinin 9. sınıfında öğrenim gören üç erkek öğrenci seçilmiştir. Seçilen üç öğrenciye sözsüz ispatlar hakkında yaklaşık üç saat bilgi verilmiştir sonra öğrencilerle birlikte sözsüz ispatların yapısı ve örnekleri tartışılmıştır. Sonrasında öğrencilerin okul dışı zamanlarda bireysel inceleme yapmaları için literatürden seçilen 10 adet sözsüz ispat örneği basılı olarak verilmiş ve üzerlerinde çalışmalarını istenmiştir. Öğrencilerin yazılı görüşlerine bakıldığında üçünün de sözsüz ispatların farklı bakış açıları geliştirmede, matematiksel kavramları anlamada ve görselleştirmede etkili olduğu noktasında hemfikir olduğu görülmüştür. Tekin ve Konyalıoğlu (2010) tarafından yapılan çalışmada ortaöğretim düzeyinde trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin görselleştirmelerine yer verilmiştir. Tekin (2010) tarafından yapılan çalışmada ise, görselleştirme yaklaşımına dayalı çalışma yapraklarının öğrencilerin trigonometri başarılarına, anlamalarına ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi araştırılmıştır. Deneysel desende yapılan bu çalışmada iki grubun trigonometri başarıları ve matematiğe yönelik tutumları arasında anlamlı fark olduğu bulunmuştur. Kalıcılık ölçümünde ise deney grubu lehine anlamlı fark çıkmıştır. Bu anlamda bu çalışmada hem ortaöğretim matematik öğretmen adaylarını sözsüz ispatlarla tanıştırmak hem de daha fazla sözsüz ispatın yer verildiği bir öğrenme ortamı sağlamak amaçlanmıştır. Bu nedenle bu çalışmanın amacı öğretmen adaylarının sözsüz ispatlar ile ilgili bir yaşantı yaşamaları ve bu yaşantının bir sonucu olarak süreç boyunca yaşadıkları zorlukları açığa çıkarmak, görüşlerini almaktır. Elde edilen bulgular doğrultusunda da öneriler sunmaktır.

2.YÖNTEM

Araştırma Modeli

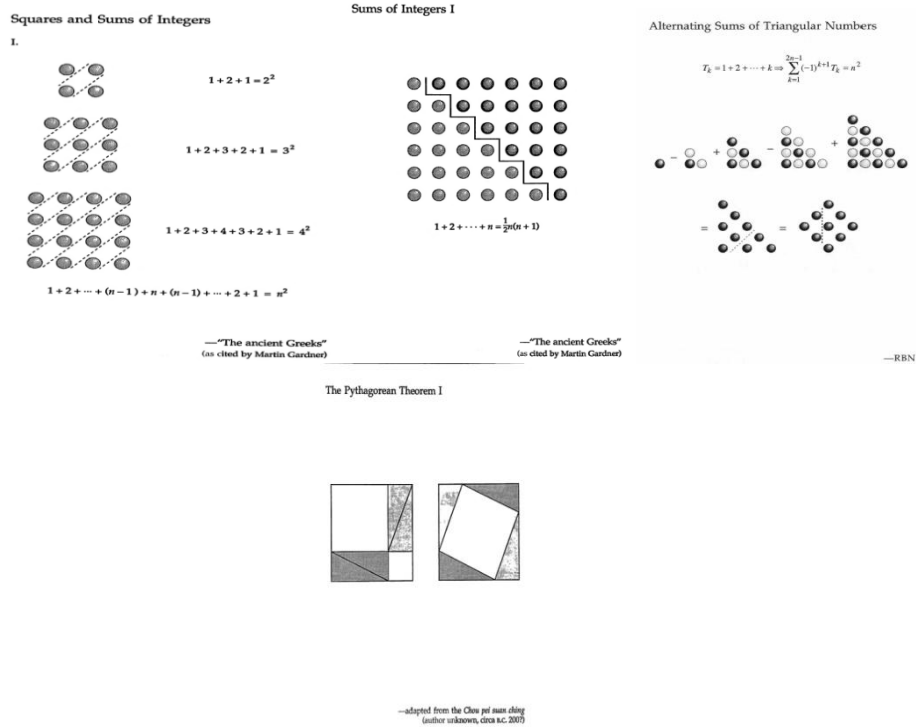
Bu çalışmada ortaöğretim matematik öğretmenleri adaylarının sözsüz ispat ile ilgili zorlandıkları yerlere ilişkin görüşlerini ortaya çıkarmak için nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması, güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan görgül bir araştırma yöntemidir (Yıldırım- Şimşek, 2005).

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını İç Anadolu bölgesinde bulunan bir devlet Üniversitesi'nde 2013-2014 eğitim öğretim yılı bahar döneminde 5. Sınıfta haftada 4 saat olarak açılmış olan "Alan Eğitiminde Araştırma Projesi" dersini alan 1. öğretime kayıtlı 26 ve 2. öğretime kayıtlı 31 olmak üzere toplam 57 öğretmen adayı oluşturmaktadır.

Uygulama süreci

İç Anadolu bölgesinde bulunan bir devlet Üniversitesi'nde 2013-2014 eğitim öğretim yılı bahar döneminde 5. Sınıfta haftada 4 saat olarak açılmış olan "Alan Eğitiminde Araştırma Projesi" dersi kapsamında ilk üç hafta araştırmacılar tarafından sözsüz ispatlar ile ilgili kuramsal bilgiler verilmiş ve farklı örnekler işlenmiştir. Bu sözsüz ispatlar Nelsen'dan (1993; 2000) seçilmiştir. Bu örneklerden birkaçı Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1 Sözsüz İspat Örnekleri

Örnekler seçilirken her birinin farklı olmasına dikkat edilmiştir. Aynı zamanda ilk hafta her bir öğretmen adayına farklı konulara yönelik 5 tane sözsüz ispat ödevi rastgele verilmiştir. Bu ödevlerin verilmesindeki amaç öğretmen adaylarının kendilerinin ispatı anlamaları ve arkadaşlarına öğretmeleridir. 4. haftadan itibaren öğretmen adayları ödevlerini sınıfta arkadaşları ile paylaşmışlardır. Bütün öğretmen adayları ilk sözsüz ispatını bitirince 2. sözsüz ispata geçmişlerdir. Bu şekilde 5 sözsüz ispatı sıra ile paylaşmışlardır. 1. öğretim ve 2.

öğretimdeki her bir öğretmen adayına farklı sözsüz ispat verilmiştir. Dolayısıyla her bir öğretmen adayı diğerlerinden farklı sözsüz ispatları anlamaya ve arkadaşlarıyla paylaşmaya çalışmışlardır. Süreç boyunca araştırmacılar ödevlerini hazırlama sürecinde yardımcı olmuşlardır. 13. hafta sonunda tüm sözsüz ispatlar bitmiştir. Bu aşamadan sonra öğretmen adaylarının süreç boyunca zorlandıkları yerler ile ilgili görüşleri alınmıştır.

Veri toplama aracı ve verilerin analizi

Veriler dönem sonunda “Sözsüz ispatları anlamaya çalışırken zorlandınız mı? Zorlandıysanız hangi noktalarda zorlandığınızı yazınız” sorusu ile toplanmıştır. Veriler yazılı olarak toplanmış ve her katılımcıya bir numara verilmiştir. Daha sonra veriler bilgisayar ortamına aktarılmış, görüşler benzerliklerine göre gruplandırılarak içerik analizi yapılmıştır. İçerik analizi toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmadır. İçerik analizinde temelde yapılan işlem birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği şekilde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım-Şimşek, 2005). Bu sayede sözsüz ispatlar ile ilgili zorlandıkları yerlere ilişkin olarak öğretmen adaylarının görüşlerinden kategori ve alt kategoriler elde edilmiştir. Elde edilen bu kategori ve alt kategoriler alanında uzman iki farklı araştırmacı tarafından incelenmiştir. Son olarak alınan dönütlerle birlikte kategorilere son hali verilmiştir. Katılımcıların yazılı ifadelerinden direkt alıntılar yapılarak, verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir.

3.BULGULAR VE YORUM

Görselleştirmenin, görsel ispatların veya sözsüz ispatların artan önemine dayanılarak birçok çalışmada önerilmesinin yanı sıra süreç içerisinde kullanırken hangi noktalarda zorlukların yaşanacağını belirlemek daha da önemli olmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada bir dönem boyunca sözsüz ispatlar ile yaşantı geçirmiş öğretmen adaylarının gözünden yaşadıklarının bir yansıması olarak zorlandıkları yerlerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Buna yönelik toplanan verilerden elde edilen bulgular Tablo 1’de özetlenmiştir.

Tablo 1 “Sözsüz İspatları Anlamaya Çalışırken Zorlandınız Mı? Zorlandıysanız Hangi Konuda Yazınız “ Sorusuna Verdikleri Cevaplar

Kategori		f		
Evet	Şekiller ile ilgili zorlanma	Şekillerin açık olmaması	2	
		Şekiller arasında mantık kuramama	1	
		Bazı şekillerin karmaşık olması	2	
		Şekli algılayabilme	1	
		Şekli değişik formlara çevirme	1	
		Şekillerden ispat yapmak	3	
		Şekli anlayamama	Şeklin ne istediğini anlayamama	1
			Şeklin ne anlatmaya çalıştığını- ne demek istediğini anlayamama	5
			Anlamakta zorlanma	4
			Nereden geldiklerini anlayamama	1
		Şekilleri anlayamama	1	
		Ne yapacağını anlayamama	1	
		Açıklayıcı değil-açıklama yok	2	
		Sözsüz ile sözlü(cebirsal) arasında ilişki kuramama	6	
		Yeni bir deneyim –başlangıçta zorlanma	15	
		Kendi ile ilgili zorluk	6	
		Kaynak sıkıntısı	8	
		Çok zaman alma-yazıya dökme	6	
		Az zorlanma- 2 ispatta zorlanma	2	
	Alan bilgisi	15		
Hayır	Sadece izlediğim gördüğüm şeyi kağıda aktardım	1		
	Kolay anlaşılır sade	1		
	Keyif alma	1		

*: Bazı öğretmen adaylarının görüşleri birden fazla kategoride yer aldığından dolayı toplam frekans katılımcı sayısında fazla olabilir.

Tablo 1 den görüldüğü gibi yalnızca 3 öğretmen adayı zorlanmadığını ifade etmiştir. Bu öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde bir öğretmen adayı izlediği, gördüğü şeyleri

kâğıda aktardığını ifade etmiştir. Diğer öğretmen adayı ise ödevlerinin kolay, anlaşılır ve sade olduğunu ifade etmiştir.

2) Yok zorlanmadım. Sadece izlediğim öğrendiğim
birişi kâğıda aktardım.
2- Hayır hiç zorlanmadım. Verilen ödevler
çok kolay, anlaşılır ve sade idi.

2) Sözsüz ispatlar normalde aldığım alan dersi ispatlarından daha
kolay ve zevkli geliyor bana. Matematikte işlemsel anlamda formülleri
yorumlamayı seviyorum ve mantığın nereden geldiğini merak ediyorum.
Sözsüz ispatları yaparak kalıp halde bildiğim formüllerin nasıl elde
edildiğini bulmak fazlasıyla eğlenceli geliyor bana.

Şekil 2 Zorlanmadığını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Cevapları

Zorlanmadığını ifade eden bir öğretmen adayı ise, alan dersi ispatlarından daha kolay, zevkli geldiğini üstelik sözsüz ispat ödevleri sayesinde formüllerin nasıl elde edildiğini bulmayı eğlenceli olarak ifade etmiştir. Şekiller ile ilgili zorlandığını ifade eden öğretmen adaylarının görüşleri ve örnek cevaplar Tablo 2 de verilmiştir. Şekli anlayama kategorisi de alt kategorilere ayrılmıştır. Tablo 3 de “şekli anlayamama” ile ilgili görüşler ve örnek cevaplar verilmiştir.

Tablo 2 Şekiller İle İlgili Zorlandığını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
Şekillerin açık olmaması	1) Evet çok zorlandım. Çünkü verilen ispat ile verilen çok açık değildi. Ne yapacağımı pek anlamadım. 2) Evet çok zorlandım. Çünkü verilen ispat ile verilen çok açık değildi. Ne yapacağımı pek anlamadım.	2
Şekiller arasında mantık kuramama	1) Evet zorlandım. Çünkü genelde sözel ispata dayalı bir eğitim aldığım için. Şekilleri ve bu şekiller arasında daki mantık kurmak çok zor. 2) Evet zorlandım. Çünkü genelde sözel ispata dayalı bir eğitim aldığım için. Şekilleri ve bu şekiller arasında daki mantık kurmak çok zor.	1
Bazı şekillerin karmaşık olması	1) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim. 2) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim.	2
Şekli algılayabilme	1) Evet zorlandım. Daha çok şekli algılayabilme / orodeti bağlantıları görmede zorlandım. Bazı isim geçişleri ve şekiller karmaşık olduğun için yolu bulmek zor oldu. 2) Evet zorlandım. Daha çok şekli algılayabilme / orodeti bağlantıları görmede zorlandım. Bazı isim geçişleri ve şekiller karmaşık olduğun için yolu bulmek zor oldu.	1
Şekli değişik formlara çevirme	1) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim. 2) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim.	1
Şekillerden ispat yapmak	1) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim. 2) Evet zorlandım. Bazı şekiller çok karmaşık olduğu için anlamadım. Üzerine çizdiğim yerler oldu. Ama ispatı yapınca da yeterli olduğunu görebildim.	3

Tablo 2 den görüldüğü gibi 2 öğretmen adayı şekillerin açık olmadığını ifade etmiştir. 1 öğretmen adayı şekiller arasında mantık kuramadığını bunun nedenini de genelde sözel ispata dayalı eğitim almak olarak göstermiştir. 2 öğretmen adayı bazı şekiller çok karmaşık olduğu için çok fazla düşündüğünü ifade etmiştir. Gerçekten süreç içinde genellikle ya 3 boyutlu resimlerin verildiği sözsüz ispatlarda ya da tümevarım prensibinin olduğu ispatlarda zorlandığını gözlenmiştir. Fakat bu cevabı veren bir öğretmen adayı ispatı yapınca öz yeterliliğinin de arttığını da ilave etmiştir. Bu önemli bir katkıdır.

Bu bulguya benzer olarak 1 öğretmen adayı da şekli algılama da, aradaki bağlantıları görmede zorlanma olarak ifade etmiştir. 1 öğretmen adayı şekli değişik formlara çevirme diye ifade ederken 3 öğretmen adayı ise şekillerle ispat yapmanın zorlandığını ifade etmiştir. 12 öğretmen adayı şekli anlayamadığını ifade etmiştir.

Tablo 3 Şekli Anlamada Zorlandığını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek Cevap	f
Şeklin ne istediğini anlayamama	② Zorlandık. Elfinizde sadece şekil vardı ne istediğini anlamadım.	1
Şeklin anlatmaya çalıştığını- demek istediğini anlayamama	1) İlk başta ispat yaparken zorlandım bir türlü hangi ifade ettiklerini anlayamıyordum. Çünkü olursa oradaki matematiksel açıklığı gösterebiliyordum, daha sonra şekillere sadece bir açıdan farklı açılardan da bakarak gerekliliğini anladım. Ayrıca diğer matematik ve geometri bilgileri kullanarak ispatların ne demek istediğini anladım ve daha kısa zaman da ispat yapmayı öğrendim. 3) Problemleri çözüme geçirebilirdim.	5
Anlamakta zorlanma	2) Evet zorlandım. Zorlandığım kısım çok az ifade ve şekil üzerinde ispatını hiç bilmediğim şeyleri anlamam.	4
Nereden geldiklerini anlayamama	② Evet zorlandım şekil sorularında çok zorlanmadım. Nereden geldiklerini anlamadım. Ama uzun uğraş gerektiren ispatları anlamadım.	1
Şekilleri anlayamama	2 - Tabloda zorlandık. Bazı şekilleri anlaması çok zordu çok acık değildi.	1
Ne yapacağını anlayamama	2) Evet çok zorlandım. Çünkü verilen ispat ile verilen şekil çok açık değildi. Ne yapacağımı pek anlamadım.	1

Tablo 3 incelendiğinde öğretmen adaylarının şeklin ne istediğini, ne anlatmaya çalıştığını, ne demek istediğini, nereden geldiklerini anlamakta zorlandıklarını ifade ettikleri görülmektedir. Şeklin ne istediğini anlayamama şeklinde ifade eden öğretmen adayı bunun nedenini elinde sadece şekil olması olarak belirtmiştir. Bu ise geleneksel ispat yöntemlerine alışkın oldukları için sadece şeklin verilmiş olmasını zorluk olarak nitelendikleri şeklinde yorumlanmıştır. Benzer olarak 5 öğretmen adayı da şeklin ne anlatmaya çalıştığını, ne demek istediğini anlamakta zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu şekilde cevap veren bir öğretmen adayının ilk başta şekillerin verilen matematiksel eşitliğini nasıl gösterebileceğini anlayamadığını fakat şekillere sadece tek bir açıdan değil de farklı açılardan bakarak ne demek istediğini anladığını ifade ettiği Tablo 3 de görülmektedir. 4 öğretmen adayı anlamakta zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları anlamama sebepleri olarak da hiçbir açıklama olmamasını veya çok az ifade olmasını ve internette ispatlarını bulamamalarını göstermişlerdir. Bir öğretmen adayı da sadece bazı şekillerin anlaşılması zordu şeklinde ifade etmiştir.

2 öğretmen adayı zorlandıkları açıklama/ön bilgi olmamasından dolayı zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının cevapları Şekil 3 de verilmiştir.

2) Zorlandım. Genelde zorlandığım sorularda çok fazla ön bilgi verilmemişti ve açıklama değildi. Araştırma yaparak yapabileceğim ispatlar değildi.

2) Zorlandım. Hiç bir açıklama yok. Arkadaşlarımda yazı yazıyor. İnternete o yazıyı gördüğümde hiç bir şey anlamıyorum. Ve bana sorularını aldı. Öncüncesindeyim. Hiç cevap almamış. Ve bana bir cevabını vermemiş. Arıyordum.

Şekil 3 Açıklama/Ön Bilgi Olmamasından Dolayı Zorlandıklarını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Cevapları

Şekil 3' den görüldüğü gibi her iki öğretmen adayı da verilen ispatları anlayıp yorumlamak yerine araştırma yaparak ispatı bulmaya çalışmışlardır. Bu nedenle açıklama yok derken kaynaklarda bu ispatların açıklaması yok şeklinde ifade ettikleri söylenebilir. 6 öğretmen adayı sözlü veya cebirsel ile sözsüz ispat arasındaki ilişkiyi kurmakta ya da verilen şekillerle konuyu (verilen formülü) ilişkilendirmekte zorlandığını ifade etmiştir. Bu öğretmenlerden ikisinin cevabı Şekil 4 de verilmiştir.

2) Sözlü teoremler, sözsüz ispat arıyordum. Bıktım.

2) Sözsüz ispatı yaparken çok zorlandım. Daha önce karşılaşmadığım ispatlardı. Şekillerden bir formül elde etme de zorlandım.

Şekil 4 Sözsüz İle Sözlü(Cebirsel) Arasında İlişki Kurmada Zorlandığını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Cevapları

15 öğretmen adayı sözsüz ispatların ilk defa karşılaştıkları bir yöntem olduğu için zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar ve örnek cevaplar Tablo 4 de gösterilmiştir.

Tablo 4 Yeni Bir Deneyim-Başlangıçta Zorlandığını İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
Önceden karşılaşmama	2) Sözsüz ispatı yaparken çok zorlandım. Daha önce karşılaşmadığım ispatlardı. Şekillerden bir formül elde etme de zorlandım.	2
Sözel ispata dayalı eğitim alma	2) İspat zorlandım. Çünkü genelde bir eğitim aldığım için. Şekilleri ve bazı mantık kurmak çok :	1

	İlk başta zor gelme	2) Evet ispatlar başta çok zor geldi. Ama Uzun	2
Başlangıçta zor gelme	Başlangıçta konunun ne olduğuna ve nasıl yol izlemek gerektiğine dair fikri olmama	2) Bazı geometrik şekillerin ispatında başlangıçta konunun yol izlenmesi gerektiğine dair bir fikrim olmadığını düşünüyordum. Bu çekemedim.	2
	Bazı geometrik şekilleri yorumlamada sıkıntı yaşadım ama kalmadı	2) Bazı geometrik şekilleri yorumlama noktasında bu zorluklar kalmadı.	1
	Önceden hiç sözsüz ispat yapmadım süreç içinde anladım	2) Evet zorlandım. Çünkü daha önce hiç sözsüz süreç içerisinde ifadeleri anladım ve süreçte zorlandığım konular genelde üç boyutlu geometri	2
Başlangıçta zor gelme sonra gelme	İlk başta ispatı nasıl yapacağımı bilemedim daha sonra kolay geldi	2) Çok zorlandım. İspatı nasıl yapacağımı. Daha sonra biraz daha kolay gelmeye ispatlar daha olmuştur. Şekillerin nereden	1
	Başlangıçta anlamama - zor gelme Arkadaşları ile konuşunca anlama	2) Zorlandım. Zorlanma ne olduğunu kısa sürede anladım. Fikir tartışmaları bulduktan sonra ispatları anlamaya başladım.	2
	İlk baktığımda zorlandım araştırdıkça anladım	2) İlk baktığımda zaman zorlandım. Ama konu başladıkça araştırma yaparken genelde yabancı anlamak beni zorladı.	1
	İlk başta zorlandım önyargı oldu ama zaman ayırınca anladım kaynak taramama gerek kalmadı	2) Önyargı ispatları öğrenip çalışırken ilk başta çok bir şey yok oluşturmaya sebep oldu. Fakat çok büyük anladım ve böylece ispatları öğrenmeye başladım.	1

Tablo 4 incelendiğinde 15 öğretmen adayı başlangıçta zor geldiğini ifade ettikleri görülmektedir. Bu öğretmen adaylarından 8 tanesi başlangıçta zor olmasına rağmen sonradan kolay geldiğini ifade etmişlerdir. Başlangıçta zor geldiğini ifade eden öğretmen adayları ise bunun nedenini daha önce karşılaşmadıklarını, hiç sözsüz ispat hiç yapmadıklarını, sözel ispata dayalı bir eğitim aldıklarını ve başlangıçta bir fikir sahibi olmamayı gerekçe göstermişlerdir. Başlangıçta zor ama sonra kolay geldiğini ifade eden öğretmen adayları ise, süreç içinde anladıklarını, arkadaşları ile konuşunca anladıklarını, araştırdıkça anladıklarını, ön yargısından dolayı ama zaman ayırınca bunun kalmadığını ifade ettikleri görülmektedir. 6

öğretmen adayı kendi ile ilgili zorluklardan bahsetmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının cevapları Tablo 5 de verilmiştir.

Tablo 5 Kendi İle İlgili Zorluk İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
Farklı düşünmede	2). Zorlandım, Sorular; konuyla ilişkilendirme dır. Olandan farklı düşünme konusunda zor	1
İfadeleri elde etme – işlem basamakların çıkarımlara ulaşmada	2. Zorlandığım ispatlar vardı. Bazı ifadeleri elde etme çıkarımlara ulaşmada hatalar yaptığım oldu.	1
Araştırma yaparak yapabileceğim ispatlar değildi	2) Bazılarında zorlandım. Genelde zorlandığım sorularda verilmemişti ve açıklayıcı değildi. Araştırma yaparak ya değildi.	1
Stres yaşama	Çok zorlandım, Hatta çok stres yaşadım.	1
Kendi ile ilgili zorluk	Örüntüyü hemen fark edememe	1
Uzun uğraş gerektiren ispatları anlayamama	2) Evet zorlandım şerh sorularında çok zorlan geldiklerini anladım. Ama uzun uğraş gerektiren anlardım.	1

Tablo 5 incelendiğinde öğretmen adaylarının kendi ile ilgili zorluklarda farklı düşünmede zorlandıkları, ifadeleri elde etmede hataları olduğunu, ön bilgi verilmediğinden yapabileceği ispat olmaması, stres yaşaması, örüntüyü fark edememesi, uzun ispatları anlayamaması gibi ifadeler kullandıkları görülmektedir.

Tablo 6 Kaynak Sıkıntısı İle İlgili Zorluk İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
Türkçe kaynak olmaması- Kaynakların İngilizce olması	2) Sözsüz ispatları anlatırken bazı zorlandım. Şekillerle formüller avlamakta ilgisiz karmakta zorlandım. Araştırma yaparken türkçe hiçbir kaynağı bulamadım. Döner kaynaklardan çeviri yaparak anlayış sağladım. İngilizce, portekizce, japonca kaynaklardan çeviriler yaparak bazı kaygıları yordum.	5
İspatların internette olmaması	2.) Çok zorlandım. Sözsüz ispatların çeviri ve grafikte olduğunu gördüm. İngilizce olması ve bazı ispatların internette olmaması çok zordur.	2
Kaynak sıkıntısı	İnternette araştırdım yinede zorlandım	1

6 öğretmen adayı Türkçe kaynak olmaması ya da kaynakların İngilizce olmasında zorluk yaşadıklarını ifade etmiştir. Bu öğretmen adayların cevapları incelendiğinde, İngilizce olduğu için çevirmede zorlandıklarını, çevirdikten sonra ne anlatmak istediğini anlamaya çalıştıklarını, çeviri programlarında farklı cümleler karşlarına geldiğini hatta bir öğretmen adayı İngilizcenin yanı sıra Portekizce, Japonca bile kaynak incelediğini ifade ettikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra 2 öğretmen adayı ispatların internette olmamasını, 1 öğretmen adayı ise internette araştırmasına rağmen zorlandığını ifade ettiği görülmektedir.

Tablo 7 Çok Zaman Alma-Yazıya Dökme İle İlgili Zorluk İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
Çok zaman alma-yazıya dökme	Çok Zamanımı aldı	3
Yazıya dökme	2.) Fotoğrafın yazıya dökülmesi. İspatları yazıya dökme zorlandı.	3

Tablo 7 den görüldüğü gibi 3 öğretmen adayı sözsüz ispatların zamanını çok aldığını ve 3 öğretmen adayı da sözsüz ispatları yazıya dökmede zorlandığını ifade etmiştir. 1 öğretmen adayı az zorlandığını ve 1 öğretmen adayı da yalnızca 2 ispatta zorlandığını ifade etmiştir. Bu öğretmen adaylarının cevapları Şekil 5 de verilmiştir.

gelişimi düşünüyorum...

2) Aslında çok zorlanmadım. Ya da bana belli konuları geldiği için böyle düşünüyorum olabilir. Çünkü diğer ortadoksların yaptığı ispatları anlamakta bazen zorlandım. Çünkü burada kendi ispatlarında bazı şekilleri anlamada o da olsa zorlandığım söyleyebilirim.

2) Hepsinde zorlanmadım. İki ödevimi yaparken zorlandım.

Şekil 5 Az Zorlandığımı ve 2 İspatta Zorlandığımı İfade Eden Öğretmen Adaylarının Cevapları

15 öğretmen adayı kendi ödevinde yer alan unuttuğu, hatırlayamadığı, ilişki kuramadığı, bilmediği matematik kavramları ile yaşadığı zorlukları ifade etmiştir. Bu ifadeler alan bilgisi altında toplanmıştır.

Tablo 8 Alan Bilgisi İle İlgili Zorluk İfade Eden Öğretmen Adaylarının Görüşleri Ve Örnek Cevaplar

	Örnek cevap	f
İntegral ile doğrunun altındaki alan ve üstündeki alanı hesaplamada	2) Aşağıdaki çok zorlandı. Google translate ile çevirdim. Çözümün çok değişik cümleler geldi. Bana integral ile doğrunun altındaki alan ve üstündeki alanı hesaplaması konusunda zorlandım. Aşağıdaki...	1
Graph teorisi	2) Bazılarında zorlandım. Genelde zorlandığım sorularda çok fazla ön bilgi verilmemişti ve açıklayıcı değildi. Araştırma yaparak yapabileceğim ispatlar değildi. Özellikle graph teorisi ile ilgili hiçbir ön bilgim olmadığı için çalışmada bunu ispata dönerek matematiksel bir dile ifade edemedim.	1
Üçgensel sayılar ve eşitsizlik	2) Sözcük ispat konusunun üçgensel sayılar ve eşitsizlik konusunda çok zorlandım. Üçgensel sayılarla ilgili soruların sonuna ispat da konmuştu. Fakat bu eşitsizlik ispatlarında zorlanıyorum.	1
Alan bilgisi Üçgensel sayının ispatını indise çevirirken	2. Birinde zorlandım. O da T_{n-1} şeklinde üçgensel sayının indise çevirirken problem yaşadım.	1
Eşitsizlik	1) 5 ödevde 1 tanesinde zorlandım. $e^{\pi} > \pi^e$ eşitsizliğini ispatı var mı? Analizimi böylece yapmış buldum. Bu yüzden...	1
1 tanesinde konu eksikliğinden zorlandım	2) Zorlanmadım ama son 1 tanesinde zorlandım. Biri araba konusuydu. O konunun eksikliğim olduğunu düşünüyordum.	1

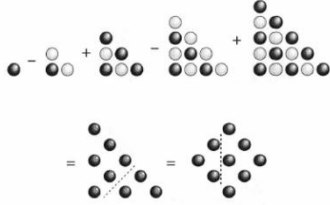
Hiperbol şeklinin nasıl oluştuğunu anlayamamıştım	2) Çok zorlandığım da oldu kolay pekiile de oldu. Bunun hiperbol şeklinin nasıl oluştuğunu anlayamamıştım	1
Eşitlikleri görmem zor oldu	2) Şekli olan ispatlarda eşitlikleri görmem zor oldu. Onlar üzerinde uğraşmam	1
Taralı alanların arasında nasıl bağlantı kurulacağını anlamakta	2) Zorlandığım konular oldu. Genelde den kullandığım ispatları ispatla zorlandım. Tıralı alanların arasında nasıl bağlantı kurulacağını anlamakta biraz güçlük yaşadım	1
Üç boyutlu geometrik ifadeler	2) Evet, zorlandım. Çünkü daha önce hiç sözsüz ispat yapmadım. Süreç içerisinde ifadeleri anladım ve sözsüz ispat yapmanın mantığı zorlandığım konular genelde üç boyutlu geometrik ifadeler oldu	1
Geometrik şekilleri yorumlamada	2) Bazı geometrik şekiller yorumlama noktasında silikenti aklı bu zorlukta kalmadı.	1
Bazı geometrik şekillerin ispatında	2) Bazı geometrik şekillerin ispatında bazı konuların ne olduğunu ve gel izlemen gerektiğini dair bir fikrim değildi. Bu konuda zorlandım.	1
Geometrik ifade ve şekillerin bazılarında	2) Bazı ispatlarda bazı yerlerde zorlandım. Geometrik ifade ve şekillerin bazılarında zorlandığım yerler oldu. Fakat o zaman ispatların etkisi olacaktır düşünüyorum	1
Tümevarım ile eşitliklerin bulunmasında	2) Zorlandım. Tümevarım sorularında, ve klerin bulunmasında zorlandım	1
Trigonometrik ifadeler	2) Trigonometrik ifadelerin sözsüz ispatlarını yaparken zorlandım. Zorlanmam sadece zamanımı aldı. Başarılı bir şekilde ispatı tamamladım.	1

Tablo 8 incelendiğinde integral ile doğrunun altındaki alan ve üstündeki alanı hesaplamada, üçgensel sayılar, eşitsizlikler, hiperbol şeklinin nasıl oluştuğu, eşitlikleri görme, taralı alanların arasında nasıl bağlantı kurulacağı, üç boyutlu geometrik ifadeler, geometrik şekilleri yorumlamada/ispatında, tümevarım ile eşitliklerin bulunmasında, trigonometrik ifadelerde zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu zorluklar genellikle o konu ile ilgili olan bilgi eksikliğinden kaynaklandığı ifade edilebilir.

herhangi bir adımdaki örnekten yola çıkarak, genel bir kural bulması gerektiği ispatlarda öğrenciler sadece verilen şekil ile sınırlı kalmışlardır.

Alternating Sums of Triangular Numbers

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} T_k = n^2$$



Şekil 7 Üçgensel Sayıların Alterne Toplamının Sözsüz İspatı (Nelsen,2000, s98).

Burada öğretmen adaylarının tümevarımsal düşünmede sıkıntı yaşadıkları söylenebilir. Tüm bunlardan kaynaklı olarak şekilleri anlayamadıkları, yorum yapamadıkları, şekiller arasında bağlantı kuramadıkları söylenebilir. Bu bulgu Bardelle'nin (2009) bulgularını desteklemektedir. Bardelle'ye göre sözsüz ispatlarda ana zorluğun nedeni, ispatın anlamlı adımların sıralı bir dizisi iken, çizimin statik bir obje olması gerçeğidir. Bir çizim bütün yazılı verileri bir bütün halinde sunar ve okuyucu inşanın sırasını ve hangi bilgileri seçerek alacağını seçmek zorundadır.

2 öğretmen ise zorluk olarak açıklama verilmemesini ifade etmiştir. Aslında Nelsen'in ifade ettiği gibi bu ispatların sözsüz ispat olması bu bağlamda da açıklamaya yer verilmemesini gerektirmektedir. 6 öğretmen adayı verilen sözsüz ispat ile sözlü (cebirsal) ispatlar arasında ilişki kuramadıklarını ifade etmiştir. 15 öğretmen adayı ise yeni bir deneyim olmasının bir zorluk olduğunu, başta zorlandıklarını fakat sonra kolay geldiğini ifade etmişlerdir. Bu bulgu gerek alan gerekse alan eğitimi derslerinde sözsüz ispatlara yer verilmesi, öğretmen adaylarının diğer ispat yöntemleri gibi bu yöntem ile de karşılaşmaları gerekliliğini dile getirmektedir. Bu sayede hem alternatif bir ispat yöntemini öğrenmiş hem de nereden geldiğini ifade etmekte zorlandıkları ifadeleri açıklamada beceri kazanmış olacaklardır. 8 öğretmen adayı kaynak ile ilgili sıkıntı yaşadıklarını ifade etmiştir. Bu zorluğun ispatlar verilirken alternatif olarak da sözsüz ispatlarına da yer verildiği kaynakların olması ile aşılabileceği görüşündeyiz. Şekil 6 da verilen 1'den n'ye kadar olan sayıların kareleri toplamının ispatının tümevarım ile verildiği kaynaklarda sözsüz ispatına da yer verilmesi bu zorluğu ortadan kaldıracaktır. 6 öğretmen adayı sözsüz ispatın çok zamanını aldığını ve bunları yazıya dökerken de sıkıntı yaşadıklarını ifade etmişlerdir. 15 öğretmen adayı kendi ödevinde yer alan bazı kavramlarla ilgili yaşadığı zorluğu ifade etmiştir. Görüldüğü gibi bu ifadeler alan bilgisi ile ilgilidir. Bilinmeyen veya unutulmuş bazı kurallar, ifadeler, özellikler konular ispat yapabilme becerisini de etkilemektedir. Bu bulgu Bardelle (2009) bulgusunu desteklemektedir. Gerçekten Bardelle (2009) Pisagor teoremi ile seriler gibi iki farklı ilgili sözsüz ispat kullanmıştır. Bunun nedenini Pisagor teoreminin ispatında genellikle görsel gösterimler kullanılırken diğerinin genellikle cebirsel ve analitik argümanlarla ispatlanması olarak ifade etmiştir. Pisagor teoreminde şekillerin yeniden düzenlenmesi varken seri ile ilgili olan ispat pek çok adımı için de barındırmakta, kavramsallaştırmayı gerektirmektedir. Yani bu ispat için reel sayıların ve reel sayıların sayı doğrusu üzerinde gösterilişinin kavramsallaştırılması gerektirmektedir. Bu nedenle de seri ile ilgili olan ispatı kimse anlamamış, öğrencilere anlaşılması için üçgenlerin benzerliği ve üçgenlerin eş kenarları

arasındaki orandan bahsedilmiş ve gerekli hatırlamalar yapılmış fakat öğrenciler yine de zorlanmışlardır.

Bu çalışmanın bulguları doğrultusunda, gerek alan eğitimi gerekse alan derslerinde sözsüz ispatlara yer verilmesini, hem öğrencilerin hem de öğretmen adaylarının diğer ispatları destekleyici olarak sözsüz ispatlarla tanıştırılmasını, bu doğrultuda da gerek öğretim programlarında gerekse kitaplarda sözsüz ispatlara yer verilmesi önerilmektedir. Ayrıca yapılacak çalışmalarda her kademedeki öğrenciler ile sözsüz ispat uygulamaları ile ilgili çalışmalar yapılabilir.

5.KAYNAKÇA

ALMEIDA, D. (2001). "Pupils' proof potential", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 53-60.

ALSINA,C. ve Nelsen, R.B. (2009). When Less is More Visualizing Basic Inequalities.

Mathematical Association of America.

ALSINA,C. ve Nelsen, R.B. (2010). "An Invitation to Proofs Without Words", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3 (1), 118-127.

BALL, D. L.,HOYLES, C., JAHNKE, H. N., ve MOVSHOVITZ-HADAR, N. (2002). "The teaching of proof". In L. I. Tatsien (Ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 3, 907–920. Beijing: Higher Education.

BARDELLE, C. (2009). "Visual proofs: an experiment", Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education, Lyon: France.

BELL, C. (2011). "Proofs without words: A visual application of reasoning and proof", Mathematics Teacher, 104, 690-695.

BRÍTZ, T.,MAMMOLITI, A. ve SØRENSEN, H. K. (2014). "Proof by picture: A selection of nice picture proofs", Parabola 50(3).

CASSELMAN, B. (2000). "Pictures and proofs",Notices of the American Mathematical Monthly, 47(10), 1257-1266.

DE VILLIERS, M. (1990). "The role and function of proof in mathematics", Pythagoras, South Africa, 23, 17-24.

DEMİRCİOĞLU, H.,POLAT, K. (2015). "Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının "Sözsüz İspat" Yöntemine Yönelik Görüşleri",The Journal of Academic Social Science Studies, 31 (2), 233-254.

DORUK, B.K.,KIYMAZ,Y., HORZUM,T. (2012).“İspat yapma ve ispatta somut modelden yararlanma üzerine sınıf öğretmeni adaylarının görüşleri”, X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. Niğde Üniversitesi, Niğde.

GIERDIEN, F. (2007). "From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in Secondary mathematics", Pythagoras, 65, 53 – 62.

- KAYHAN, E. (2005). Investigation of High School Students' Spatial Ability. Unpublished masters' thesis. The Department of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Ankara.
- KNUTH, E. J. (2002). "Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics", Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 1, 61-88.
- MILLER R. L. (2012). "On Proofs Without Words", Eriřim tarihi: 10 Kasım 2015, <http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf>
- NELSEN. R. (1993). Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. Washington: Mathematical Association of America.
- NELSEN. R (2000). Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking. Washington: Mathematical Association of America.
- TEKİN, B. (2010). Ortaöğretim Düzeyinde Trigonometri Kavramlarının Öğrenilmesinde Görselleştirme Yaklaşımının Etkililiğinin Araştırılması. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- TEKİN , B.,KONYALIOĞLU, A. C. (2010). "Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve Fark Formüllerinin Ortaöğretim Düzeyinde Görselleřtirilmesi", Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 5,1-2, 24-37.
- UĞUREL, I.,MORALI, H. S. ve KARAHAN, Ö. (2011). "Matematikte Yetenekli Olan Ortaöğretim Öğrencilerin Sözsüz İspat Oluřturma Yaklaşımları", I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretimi Kongresi, Anadolu Üniversitesi, (5-8 Ekim) Eskiřehir.
- YILDIRIM, A. ve şİMŞEK, H. (2005). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (5. bs.). Ankara: Seçkin Yayıncılık.