

## Matematik Tarihinin Matematik Öğretimine Entegrasyonu: Hârezmi'nin Tam Kareye Tamamlama Yöntemi

### Integrating History of Mathematics into Mathematics Teaching: Al-Khwarizmi's Completing The Square Method

Murat GENÇ<sup>a</sup>, İlhan KARATAŞ<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Bülent Ecevit Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, Zonguldak, Türkiye.

#### Özet

Bu çalışmanın amacı ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmi'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılmasına ilişkin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin belirlenmesidir. Yapılan çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden olan durum çalışması kullanılmıştır. Araştırmanın verileri ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 10 öğretmen adayıyla yapılan yarı-yapılandırılmış görüşme tekniğiyle toplanmıştır. Araştırma kapsamında elde edilen bulgular; ikinci dereceden denklemlerin öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmi'nin tam kareye tamamlama metodunun öğretmen adaylarının bu konudaki mevcut matematik bilgilerine etkisi hakkındaki görüşleriyle gelecekte yapacakları öğretmenlik mesleğinde bu metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılmasına ilişkin görüşlerini ortaya koymuştur. Hârezmi yöntemi gibi matematik tarihindeki çalışmaları matematik öğretiminde kullanmak öğretmen adaylarının ikinci dereceden denklemlerin içeriğini daha iyi anlamalarını sağlamış ve onlara, matematik tarihindeki materyalleri ikinci dereceden denklemlerin öğretimine dâhil etmek için farklı yöntemler ve teknikler sunmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Matematik tarihi, ikinci dereceden denklemler, Hârezmi'nin tam kareye tamamlama yöntemi, ilköğretim matematik öğretmen adayları

#### Abstract

The purpose of this study is to explore preservice elementary mathematics teachers' conceptions regarding the use of history of mathematics as a teaching tool, especially Al-Khwarizmi's method of completing the square in the learning and teaching of quadratic equations. The case study of qualitative research methods was used. The data were collected through semi-structured interviews with 10 teacher candidates. The results of the study revealed the conceptions of the influences of the use of history of mathematics, specifically Al-Khwarizmi's method of completing the square, in the teaching of quadratic equations on preservice elementary mathematics teachers' current mathematical knowledge, as well as the conceptions of the influences of the use of this method as a teaching instrument on their future teaching professions. It has been seen that using Al-Khwarizmi's method in mathematics teaching has provided prospective teachers with better understanding of the second-order equations by presenting different techniques to integrate them into teaching quadratic equations.

**Keywords:** History of mathematics, second-degree equations, Al-Khwarizmi's method of completing the square, preservice elementary mathematics teachers

## 1. Giriş

Matematik tarihinin matematik sınıflarında kullanılması yeni bir tartışma konusu olmasa da son yıllarda matematik öğrenme ve öğretimde matematik tarihinin kullanılması düşüncesine bilimsel ilgi hızla artmaktadır (Baki & Bütüner, 2013). Bu durum, matematik tarihinin öğretilmesine önem veren öğretmen yetiştiren programların etkinliğini araştıran çalışmaların çoğunda kendini göstermektedir (Charalambous, Panaoura, & Philippou, 2009; Clark, 2011; Furinghetti, 2007). Ayrıca, matematik tarihini matematik öğretim programına dâhil etme çalışmaları çeşitli dernek ve kuruluşlar tarafından teşvik edilmekte ve konferans ve bildirilerin konusu da yapılmaktadır (Jankvist, 2009). Örneğin, Matematik Eğitim Araştırmaları (Educational Studies in Mathematics) dergisinin özel sayısı (Sayı 66) matematik tarihine ayrılmıştır. Eğitimcilerin matematik tarihi ile ilgilenmesinin pek çok nedeni vardır. Fauvel (1991), matematik tarihini, matematik öğretim programına entegre etmenin bilişsel, duyuşsal ve sosyokültürel yönlerini ele alan on beş nedeni içeren bir liste sunmaktadır. Fried (2001) bu nedenlerin üç ana temaya bölünebileceğini söyler. İlk olarak, matematik tarihi, matematiği insani yapar. Diğer bir deyişle, matematik tarihi çok kültürlü yaklaşımları teşvik etmek, öğrencilere tarihsel rol modelleri vermek, matematik çalışmalarını insani duygular ve motivasyonlarla birleştirmek olarak görülür (Avital, 1995; Brown, 1993; Swetz, 1995). İkincisi, matematiğin daha ilgi çekici, anlaşılır ve ulaşılabilir olmasını sağlar. Diğer bir deyişle, matematik tarihi, öğretime çeşitlilik katar, öğrencilerin matematik korkularını azaltır, matematiğin toplum içindeki yerinin anlaşılmasını sağlar (Ness, 1993; Rickey, 1996). Üçüncüsü ise, matematik tarihi, kavramlar, problemler ve problem çözme konularında farklı bir bakış açısı kazandırır (Garner, 1996; Sfard, 1995; Thomaidis, 1993). İlgili çalışmalarda, matematik öğrenme ve öğretimde matematik tarihinin kullanılmasının hem öğretmenler hem de öğrenciler için birçok yararı olduğundan bahsedilmektedir (Arcavi & Isoda, 2007; Charalambous ve diğ., 2009; Fried, 2001; Jankvist, 2009; Vinogradova, 2007). Örneğin, öğretmenler söz konusu olduğunda, matematikteki herhangi bir konunun öğretilmesi için o konunun tarihteki gelişimine benzer bir yol izlenmesi gerektiği iddia edilmektedir (Fauvel, 1991; Garner, 1996; Sfard, 1995; Thomaidis, 1993). Öğrenciler söz konusu olduğunda ise, matematik tarihi onlara matematiksel problemler ve düşünceler için ayrı bir bağlam sunar ki böylelikle problem çözmeye alternatif yaklaşımlar önerilirken, düşünceler, tanımlar ve uygulamalar arasındaki ilişkilerde kolaylıkla gösterilmiş olunur (Avital, 1995; Katz, 1993; Kleiner, 1993). Diğer taraftan, bir grup araştırmacı, matematik tarihinin hem ortaöğretimde hem de ortaöğretim sonrası düzeylerde (örn. hizmet öncesi öğretmen eğitimi programları) matematiğin öğretilmesine hangi yollarla dâhil edilebileceğini belirlemiş ve bu konu üzerine tavsiyelerde bulunmuşlardır (Fauvel & van Maanen, 2000; Furinghetti, 1997, 2007; Katz, 1997; Liu, 2003; Siu, 2000). Swetz

(1995), matematik tarihinin, matematiği insanlarla ve ihtiyaçlarıyla ilişkilendirip konuyu insancıllaştırdığını ve bunu yaparken gizeminin bir kısmını kaldırdığını vurgulamıştır. Glaisher (1848-1928)'in ifade ettiği gibi, tarihten koparılmaya çalışılmakla hiçbir konu matematikten daha fazlasını kaybetmez. Arcavi ve Isoda (2007), öğretmenlerin matematik tarihiyle ilgili metinleri yorumlama becerileriyle öğrencilerin matematiksel düşünceleri arasındaki ilişkileri inceleyerek matematik tarihinin matematik öğretimi ve öğrenimi içerisinde farklı kullanıma şekillerini içerecek biçimde mevcut matematiksel kavramları genişleterek öğretmenler tarafından nasıl kullanıldığını araştırmıştır. Charalambous, Panaoura ve Phillippou (2009) nicel olarak öğretmen adaylarının tutum ve inançlarının, matematik tarihi üzerine kurulu bir eğitim programına katılmanın bir sonucu olarak nasıl etkilendiğini göstermiştir. Bu araştırma sonucunda, öğretmen eğitimi programlarında matematik tarihinin, matematik öğretiminde kullanışlı bilgi gelişimine katkıda bulunma potansiyelinin olduğu araştırmacılar tarafından vurgulanmıştır. Dahası, öğretmen adaylarının, kendi beceri ve yeteneklerini artırarak öğrencilerine matematiğin mantığını anlamaya götüreceği bir yol olarak matematik tarihi hakkında bilgi edinmelerinin önemi vurgulanmıştır (Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS], 2001). Ayrıca, çeşitli kültürlerin katkılarını içeren ve medeniyetimizin gelişmesinde önemli bir rol alan matematiğin tarihsel gelişimi hakkında bilgi sahibi olmanın gerekliliğinden de bahsedilmektedir (Baki, 2008; Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS], 2001; National Council for the Accreditation of Teacher Education [NCATE], 2003).

Baki ve Bütüner (2010) matematik tarihinin amaç ve araç olarak kullanılabilirliğini araştırmak amacıyla 8.sınıf matematik dersleri için bir takım matematik tarihi etkinlikleri hazırlamış ve uygulamışlardır. Uygulama öncesinde öğrencilerin matematiği kural ve formüllerden ibaret, sabit ve değişmez yapıya sahip olan mükemmel bilgi topluluğu olarak gördükleri; uygulama sonrasında ise öğrenciler matematiğin de bir geçmişinin olduğunu, değişip gelişen bir bilim olduğunu ve sadece formüllerden ibaret olmadığını ve matematikte sonuca erişmek için farklı yolların kullanılabileceğini ifade etmişlerdir. Yazarlar bu bulgular çerçevesinde, matematik tarihinin hem araç hem de amaç olarak kullanılabilirliğini vurgulamıştır. Benzer şekilde, Jankvist (2009), matematik tarihinin matematik eğitiminde kullanılmasının iki önemli hususun altını çizdiğini iddia etmektedir. İlki, matematik tarihinin matematiğin etkili bir şekilde öğrenilmesine ve öğretilmesine yardımcı olmak için bir araç olarak kullanılması olurken ikincisi ise matematik tarihinin kendi başına bir amaç olarak kullanılmasıdır. Bu şekilde, öğrencilere matematiğin tarih boyunca birçok farklı kültürde zaman ve mekân içerisinde var olduğunu ve geliştiğini ve bu kültürlerin matematiğin şekillendirilmesinde ya da matematiğin bu kültürlerin şekillenmesinde önemli etkisi olduğunu göstermek amaçlanmaktadır. Buna göre, matematik tarihi bir amaç olarak öğrencilere, matematiği tartışılmaz ve değişmez gerçeklerden oluşan iyi tanımlanmış bir bilgi olmaktan ziyade, onu, gelişen ve değişebilen bir bilgi olarak düşünmeye zorlar (Barbin & Menghini, 2000). Öte yandan, bir araç olarak matematik tarihi, öğrencilerin matematiği öğrenmesi ve çalışmasında motive edici bir faktör olarak görülmektedir (Furinghetti, 2000). Jankvist (2009), bu motivasyonel ve duygusal etkilere sahip olmanın yanı sıra matematik tarihinin, matematiğin etkili öğrenimini desteklemede bilişsel bir rol oynayabileceğini de eklemektedir. Bachelard (1938) tarafından vurgulandığı gibi, bilişsel bir araç olarak matematik tarihinin öğretilmesi, bazı epistemolojik engellerin belirlenmesinde ve bu engellerin ortadan kaldırılmasında kullanılmaktadır. Brousseau (1997)'ya göre, gerçekten epistemolojik kökenin getirdiği engeller, aranan bilginin biçimlendirici rolü nedeniyle kimsenin kaçamayacağı ya da kaçmaması gereken engellerdir. Epistemolojik engeller, kavramlar tarihinde kendini bulabilir. Öğrencilerin yaşadığı zorluklardan bazıları, matematik tarihinde de görülen ve bilinen zorluklar olduğundan (Brousseau, 1997), matematik tarihi, sadece bu engelleri tanımlamada yardımcı olmaz, aynı zamanda bunları bir şekilde aşmak için de yardımcı olabilir. Böylece, öğrencilerin matematiksel düşünce gelişimine ilişkin epistemolojik bir yansıma olarak, matematik tarihi, öğretilecek bilginin doğasını belirleyebilecek gerekli ipuçlarını sağlayarak matematik eğitiminin geliştirilmesi ve bilgiye erişimin farklı yollarının incelenmesi olanağını sağlayabilir (Katz & Barton, 2007).

Bu bağlamda, matematik tarihinde öne çıkan problemlerin, öğrencilere bazı konuları daha rahat anlatmak, onların motivasyonunu arttırmak ve matematiğe karşı pozitif bir tutum geliştirmelerine yardımcı olmak için kullanılabilirliği söylenmiştir (Avital, 1995; Brown, 1993; Swetz, 1995). Örneğin, Fried (2001), tam kareye tamamlama metodunu kullanarak ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmayı gösterirken eski matematikçilerin ikinci dereceden denklemleri çözmeye ilgili yöntemlerini ve düşüncülerini sunmanın sınıftaki tartışmayı daha da geliştirebileceğini vurgulamıştır. Benzer şekilde, iki farklı makalede araştırmacılar, matematik öğretmenlerine eski çağ matematikçisi Hâzemi'nin fikirlerini ve geometrik cebirle ikinci dereceden denklemlerin çözümü için tam kareye tamamlama yöntemini basitleştirerek kullanmalarını önermektedir (Allaire & Bradley, 2001; Vinogradova, 2007). Bunu yaparak, öğretmenler matematiksel nicelikleri fiziksel nesnelere görsel bir şekilde ilişkilendirebilirler. Didaktik olarak, öğretmenler öğrencilerin içeriği görsel olarak anlayabileceği somut bir örnekle başlayabilir, daha sonra, somut örnekten, öğrencileri cebirsel sembollerle ifade edilen bir başka örneğe yönlendirebilirler. Temel olarak, bugün ortaöğretimde öğrencilerin kavramakta zorluk çektiği birçok matematiksel konu veya kavram bu zorlukları yansıtan tarihi bir gelişime sahiptir (Radford, 2000). Birçok öğretmen bu kavramsal zorluklarla ilgili kendi deneyimlerini hatırlamayaabilir. Bu nedenle, matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesinde tarihsel içeriğin eklenmesine ilişkin öneriler öğretmen adayları için özellikle yeni ufuklar açacak olan matematiksel düşüncelerinin gelişmesine imkân sağlayabileceği üzerine yoğunlaşmıştır (Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS], 2001). Sfard (1995), herhangi bir matematik kavramını analiz etmek için onun tarihsel gelişimini incelemekten daha iyi bir yol olmadığını söylemiştir. Dolayısıyla, matematik tarihi anlaşılması güç matematiksel olguları ya da kavramları keşfetmek için iyi bir araç olmakla birlikte aynı zamanda matematik öğretmenlerinin matematiksel ve pedagojik anlamda hazırlıklarına da önemli bir katkı sağlar (Fauvel, 1991; Liu, 2003).

## Araştırmanın Amacı ve Önemi

İlgili alan yazına bakıldığında, matematik eğitiminde matematik tarihinin önemi vurgulanmış olmasına rağmen, bunun matematik öğretmenlerinin veya öğretmen adaylarının görüşleri üzerine olan etkilerine odaklanan örnekler bulmak oldukça zordur. Öğretmenlerin matematik tarihini matematik derslerinde nasıl kullanacakları ve ne gibi bir deneyime ihtiyaç duyabilecekleri konusunda pek fazla çalışma yapılmamıştır. Baki ve Yıldız (2010), öğretmenlerin matematik tarihini derslerinde nasıl kullanabilecekleri hakkında net bir fikir sahibi olmadıklarını belirtmektedir. Bununla birlikte geleceğin öğretmenleri olacak olan öğretmen adaylarının matematik tarihi ile ilgili düşünceleri de göz ardı edilemez. Özellikle, ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesi ve öğrenilmesi için yapılan araştırmalar genellikle; ikinci dereceden denklemlerin çözümü için geometrik yaklaşımlar (Allaire & Bradley, 2001), tam kareye tamamlama (Vinogradova, 2007), ikinci dereceden denklemleri çarpanlara ayırma (Cheung, 1980; Hoffman, 1976) ve grafik yöntemi (Macdonald, 1986) gibi metodları kullanmayı içerir. Genel olarak, çalışmaların birçoğunda, araştırmacıların ulaştığı en tatmin edici sonuç, pek çok öğrencinin, ikinci dereceden denklemlerin çözülmesi konusunda genellikle zorluk çekmesidir (Bosse & Nandakumar, 2005; Didiş, Baş, & Erbaş, 2011; Gray & Thomas, 2001; Kostopoulos, 2007; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Bu durum matematik eğitimi araştırmacılarını ikinci dereceden denklemleri öğretirken farklı bakış açılarını araştırmaya iten en önemli nedenlerden birisi olmuştur. Dolayısıyla, bu çalışma, matematik tarihinde Hârezmi'nin tam kareye tamamlama yöntemi kullanılarak ikinci dereceden denklemlerin çözülmesi konusunda öğretmen adaylarının anlayışlarının nasıl etkilendiği üzerine odaklanmaktadır. Bu çerçevede, bu çalışmanın amacı, ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmi'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılmasına ilişkin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının görüşlerinin belirlenmesidir.

## 2. Yöntem

### Araştırma Deseni

Yapılan bu çalışmada nitel bir araştırma metodolojisi kullanılmıştır (Creswell, 2009). Durum incelemesi, yukarıda verilen araştırma amacını en iyi şekilde karşılayabileceği düşünüldüğünden dolayı bu çalışma için uygun görülmüştür. Durum çalışması gücünü çeşitli delillerin, belgelerin, eserlerin, görüşmelerin ve gözlemlerin detaylı bir şekilde incelenmesi gerekliliğinden almaktadır (Yin, 2009). Yani, durum çalışması araştırması, sınırlı sayıda etkinliğin veya koşulların ve ilişkilerin detaylı bağlamsal analizine izin vererek karmaşık bir konunun veya olayın anlaşılmasını sağlamada üstünlük sağlamaktadır. Bu sayede deneyimlerimizi genişletebilir veya daha önceki araştırmalarla zaten bilinenleri daha da güçlendirebiliriz. Benzer şekilde, Merriam (1998), durum incelemesini tek bir olgunun yoğun bir şekilde araştırılmasıyla, olgu hakkındaki bilgileri doğru bir şekilde elde etmeye olanak sağlayan bir çalışma yöntemi olarak görmektedir. Bu nedenle, durum çalışması, incelenen olayın kapsamlı bir şekilde anlaşılmasını sağlamaya çalışırken, aynı zamanda gözlemlenen fenomenle ilgili daha genel teorik ifadeler geliştirmeye de çalışmaktadır (Fidel, 1984). Buna göre, ikinci dereceden denklemleri çözüme matematik tarihinde konu edilen Hârezmi'nin tam kareye tamamlama metodunun kullanılmasının öğretmen görüşleri üzerine etkisini derinlemesine incelemeye yönelik en uygun araştırma deseni olarak durum çalışması belirlenmiştir.

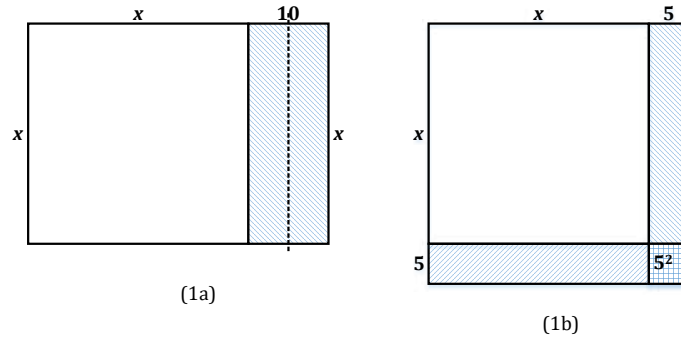
### Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları, bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan toplam 10 öğretmen adayı ile gönüllülük esasına göre oluşturulmuştur. Bu öğretmen adayları lisans eğitim programının bir parçası olarak iki saatlik matematik tarihi dersini almaktadır. Bu derste, aritmetik, cebir, geometri, trigonometri, olasılık, istatistik ve ileri matematik gibi matematik tarihindeki başlıca konuları matematiğin tarihsel gelişimi çerçevesinde matematik eğitimi pedagojisi, matematiksel kavramlar, eleştirel düşünme ve problem çözme yönüyle Babil ve Mısır'dan Yunanistan, Uzak ve Orta Doğu ve modern Avrupa'ya kadar birçok uygarlık bağlamında incelenmektedir. Öğrenciler bu derste, matematiğin temel konularıyla ilgili çeşitli görüşleri tartışır; bireylerin veya kültür gruplarının matematiğin gelişimine katkısı hakkında araştırma yapar ve tarihsel ilgi alanına giren çeşitli matematiksel problemleri çözerler. Bu yolla, öğrenciler zaman içinde gelişen matematiksel düşünceyle şimdiki problemler arasındaki ilişkiyi ele alıp, tarihin geniş çerçevesinde çağdaş dünyayı anlamaya yönelik kapasitelerini geliştirir ve eleştirel düşünebilme becerisi kazanırlar. Bununla birlikte, matematik öğretimine tarihi bir perspektifi entegre etmek için gerekli olan pedagojik bilginin geliştirilmesi amacıyla uygun kaynakları belirleme ve oluşturma yeteneği kazanma fırsatlarını matematik öğretmen adaylarına sunması bu dersin öne çıkan bir diğer yönünü oluşturmaktadır.

### Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

#### Hârezmi'nin tam kareye tamamlama metodu aktivitesi

İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının matematik tarihi dersinde tam kareye tamamlayarak ikinci dereceden denklemleri çözüme anlayışı üzerindeki etkisini araştırmak için kullanılan veriler, Hârezmi yöntemini kullanarak ikinci dereceden denklemlerin çözümüne odaklanan aktivite üzerinden toplanmıştır. Tartışılan problem şu şekildedir: Kendisinin karesi ile 10 katının toplamı 39'a eşit olan bilinmeyen nedir? Şekil 1a ve Şekil 1b, Hârezmi'nin geometrik gerekçelendirmesini göstermektedir.



**Şekil 1. Gölge alanı her biri  $5x$  alana sahip iki eşit dikdörtgene bölme (1a); Parçaların yeniden düzenlenmesi ve tam kareye tamamlama (1b) (Clark, 2011)**

Araştırmanın başında katılımcılara, Hârezmî'nin ikinci dereceden denklemleri geometrik olarak nasıl çözdüğünün açıklaması verilmemiştir (Fauvel & Grey, 1987). Bunun yerine, kendilerinin geometrik argümanı geliştirerek çözümü bulmaları istenmiştir. Hârezmî'nin bu konuyla ilgili açıklamasını okuduktan sonra, öğretmen adayları, ikinci dereceden denklemlerin çözümünü tarihsel bir perspektiften inceleme konusundaki araştırmalarına devam etmişlerdir. Hârezmî'ye göre, tam kare metodunu kullanabilmek için kenar uzunlukları  $x$  ve  $(x + 10)$  olan  $39$  birimkare alana sahip dikdörtgeni kullanarak yeni bir kare oluşturmak için aşağıdaki adımlar gereklidir. Öncelikle, kenarları  $x$  ve  $(x + 10)$  olan  $x(x + 10)$  alanına sahip bir dikdörtgenle başlayın. Dolayısıyla, gölge alan  $10x$  olur (Şekil 1a). İkinci olarak, gölge alanı her biri  $5x$  alana sahip iki küçük eşit dikdörtgen şeklinde bölün ve bunları ' $x^2$ ' karesinin bitişik yanlarına taşıyın (Şekil 1b). Toplam alan halen  $39 = x(x + 10)$ 'dur. Kare ve iki dikdörtgenin oluşturdukları toplam alan  $x(x + 10) = 39$  dur. Toplam alanı  $64$  birimkarelik bir kare yapmak için  $25$  birimkarelik alana sahip tek bir karenin oluşan şekle eklenmesi yeterli olacaktır. Buna göre, sağ alt köşede kenar uzunluğu  $5$  birim ve alanı  $25$  birimkare olan yeni bir kare şekillendirilir. Önceki şekle bu küçük kare eklenerek,  $x^2 + 2(5x) + 25$  alanlı geniş kare tamamlanmış olunur. Bu nedenle,  $39 + 25 = x(x + 10) + 25$  veya  $x^2 + 2(5x) + 25 = 64$  yazabiliriz. Büyük karenin alanı kenar uzunluğu  $(x + 5)$  olduğu için  $(x + 5)^2$  olmuştur. Dolayısıyla,  $(x + 5)^2 = 64$  ise  $(x + 5) = 8$  ve  $x = 3$  olur. Bugün, bu denklem için  $x = -13$  olan ikinci bir çözüm bulabiliriz, ancak o zaman için negatif sayılar yoktu. Dolayısıyla, Hârezmî için,  $x = 3$  tek çözümdür (Katz, 1997).

### Görüşme Protokolü

Öğretmen adaylarının görüşleri arasındaki tekrar eden ifadeleri, temaları ve ortak noktaları belirlemek için yarı yapılandırılmış bir görüşme protokolü geliştirilmiştir (Merriam, 1998). Bu durum, ikinci dereceden denklemlerin öğretiminde matematiğin tarihsel ve kültürel yönlerinin kullanılmasına ilişkin daha detaylı bilgi toplamamızı sağlamıştır. Protokol ile ilgili sorular kategorik olarak düzenlenmiştir, ancak görüşme akışının devam etmesine yardımcı olmak için görüşme sırasında yapılan değişiklikler de olmuştur. Görüşme sorularının geçerliliğini sağlamak için uzman görüşünden faydalanılmıştır. Görüşme sorularının pilot çalışması üç öğretmen adayı ile yapılmıştır. Pilot çalışmanın ardından sorular son şeklini almıştır (örn. Matematik tarihinin özellikle Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun size katkısı ne olmuştur? Öğretmenlik yaşantınızda Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodu gibi matematik tarihinden faydalanmayı düşünüyor musunuz? Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodu gibi matematik tarihi ile zenginleştirilen derslerin öğrencilerinize katkısı sizce ne olacaktır?). Bütün görüşmeler bir ses kaydedicisi tarafından kaydedilmiştir. Görüşmeler sırasında, katılımcıya ayak uydurmak ve onu uygun olmayan bir zamanda engellemek adına daha derinlemesine soruşturma yapılması gereken durumlar için notlar alınmıştır. Katılımcılarla görüşme yapılmadan önce, görüşmenin neden kayıt altına alınması gerektiği açıklanmış ve onların rızası alınarak görüşmeye başlanılmıştır. Her görüşme yaklaşık  $25-30$  dakika sürmüştür. Görüşmeler tamamlandıktan sonra kaydedilen görüşmeler dinlenerek tüm transkripsiyonlar hazırlanmış ve veri analizi için uygun hale getirilmiştir.

### Veri Analizi

Öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler içerik analizi yöntemi ile incelenmiş belirlenen temalara göre özetlenmiş ve yorumlanmıştır (Creswell, 2009; Merriam, 1998). Katılımcıların görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla elde edilen bulgular, temalar ve alt temalar altında öğretmen adaylarının verdikleri frekansı yüksek yanıtlardan doğrudan alıntılar yapılarak verilmiştir (Yıldırım & Şimşek, 2005). Öncelikle, ilk analize dayanarak bir kodlama listesi geliştirilmiştir. Bu ilk kod listesiyle tüm transkripsiyonlar karşılaştırılırken, her bir transkripsiyon ve görüşme tekrar incelenmiş ve dinlenmiştir. Bu şekilde, ortak temaları ve görüşleri tanımlamak için transkripsiyonların içerik analizi tamamlanmıştır. Daha sonra bu başlangıç kodlama listesi revize edilerek araştırma verileriyle daha uyumlu hale getirilmiştir. Bu süreç, benzer kodları birleştirerek ve gereksiz kodları kaldırarak kodlama sisteminin doğruluğu ve iç tutarlılığının oluşturulmasını sağlamıştır. Ayrıca, katılımcılardan kendilerini daha iyi yansıtmalarını sağlamak için transkripsiyonlardaki her detayı incelemeleri ve katılmadıkları ifadeleri belirtmeleri istenmiştir. Bu şekilde, ilk sonuçların kontrolünün katılımcılar tarafından yapılması sağlanmıştır. Katılımcı onayının amacı olası önyargıları saptamak ve en aza indirmektir. Birkaç ek açıklama isteği haricinde hiçbir katılımcı transkripsiyonlardaki ifadelerini reddetmemiştir. Bu durum veri analizi için ayrı bir güven oluşturmuştur. Analizin son aşamasında, uzman incelemesine ek olarak, başka bir matematik eğitimi araştırmacısı tarafından da oluşturulan tema ve kodlar kontrol edilmiştir. Böylece, güvenilirliği arttırmak için birkaç deği-

şiklik yapılarak ortaya çıkan tüm anlaşmazlıklar giderilmiştir.

### 3. Bulgular ve Yorumlar

Öğretmen adaylarının görüşlerinin alınmasıyla elde edilen verilerin analizi sonucu ortaya çıkan ana temalar şu şekildedir. İlk ana tema öğretmen adaylarının ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılmasının bu konudaki mevcut matematik bilgilerine olan etkisi hakkındaki düşüncelerini içermektedir. Bu bağlamda, önemli sayıda katılımcı, kendi öğrenme deneyimlerinden yola çıkarak, okullarda öğretilen ikinci dereceden denklemler konusunun ezbere dayalı yöntemle daha çok kuadratik formülü uygulama üzerine yapıldığını vurgulamıştır. Öte yandan, Hârezmî'nin  $x^2 + 10x = 39$  denkleminin çözümü için sunduğu geometrik gerekçelendirme sonucunda bir grup katılımcı, Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmada farklı, yenilikçi, sağlam ve ilgi çekici bir yöntem olduğu üzerine görüşlerini belirtmişlerdir. İkinci ana tema ise öğretmen adaylarının gelecekte yapacakları öğretmenlik mesleğinde ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılması hakkındaki düşüncelerini ortaya koymuştur. Bu konuda, bazı katılımcılar, Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun, ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesi ve öğrenilmesinde matematiksel içerik ve matematiksel düşünce üzerine olan etkisi hakkındaki görüşlerini paylaşmışlardır. Diğer taraftan bazıları Hârezmî'nin bu metodunun sadece matematiksel içerik ve matematiksel düşünce üzerine olan etkisine vurgu yapmakla kalmayıp, aynı zamanda bunu matematik eğitiminde tutum, öz yeterlik, motivasyon, kaygı gibi duyuşsal özellikler açısından da değerlendirmiştir.

**Öğretmen adaylarının ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılmasının bu konudaki mevcut matematik bilgilerine olan etkisi hakkındaki görüşleri**

**Okullarda öğretilen ikinci dereceden denklemler konusunun ezbere dayalı bir yöntem olan kuadratik formülü kullanma deneyimleri üzerine yapılan vurgular**

Katılımcıların oldukça büyük bir bölümü okuldaki matematik öğrenimini ezbere dayalı bir öğrenme yöntemi olarak belirtmiştir. Öğretmen adayları, ikinci dereceden denklemleri çözmek için önceki öğrenme deneyimlerini kuadratik formülü ezberleme ve formülde verilen değerleri yerine koyma olarak tanımlamışlardır. Örneğin, bir katılımcı:

Ben ikinci dereceden denklemlerin çözümünün nasıl ispatlanacağına dair herhangi birşey öğrenmedim. Bize sadece kuadratik formül ve formülde karşılık gelen sayıları nasıl yerine konulacağı öğretildi...(K8).

Benzer şekilde başka bir katılımcı:

Eğer ikinci dereceden denklemin köklerini bulmayı bu etkinlik gibi ispat ederek öğrenseydik, bu muhtemelen derste bizim öğrenme deneyimimizi zenginleştirmiş olacaktı. Ancak, bize bugüne kadar, ezberlemek için bir formül verildi ve gerçekten ne yaptığımızı bilmeden bu formülü uyguladık. Bize formülün arkasındaki mana açıklanmadı... Sadece formülü ezberledik ve gerektiğinde de onu kullandık...(K5).

Görüldüğü gibi, katılımcıların ortak görüşü, herhangi bir ikinci dereceden denklemin çözülmesi için ezberlenmesi ve takip edilmesi gereken sabit bir kurallar zincirinin var olduğuna inanmasıdır. Diğer bir ifadeyle, öğretmen adayları, doğru çözüme ulaşılması için adım adım yapılması zorunlu olan ve formül ezberlemeye dayalı bir metodun kendilerine öğretilildiğini söylüyorlar. Ancak, ezberlenmek zorunda kalınan formüller ve kuralların ikinci dereceden denklemlerin çözümü sırasında genellikle karışıklığa sebebiyet verdiği vurgulanmıştır. Sadece bir adımı kaçırmamanın ya da unutmamanın çok kolay olacağı düşünüldüğünde doğru cevabı elde etmenin çok zorlaşacağı belirtilmiştir. Doğru cevaba ulaşma başarısızlığından sakınmak için matematiksel problemleri çözmekten kaçınıldığı ifade edilmiştir. Dolayısıyla, ezberlenmek zorunda kalınan tüm bu formüller ve adımlar belli bir süre sonra birey için bir yük haline geleceği söylenmiştir. Örneğin, bir katılımcı:

İkinci dereceden denklemler konusu benim için zordu. Belki gerçekten zordu çünkü anlamsız ezberlemek zorunda olduğum birçok formül vardı ve ezberi sevmiyordum...(K1).

Katılımcı öğretmenlere göre, birçok insanın matematiği öğrenme deneyimleri maalesef matematik kaygısının ve korkusunun yayılması için oldukça elverişlidir. Tobias (1978), bu kaygının okulda matematik öğrenimini engelleyen en önemli faktör olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle, çoğu kişi matematikte başarısız olduğu için veya en azından kendini başarısız hissettiği için okulu çok erken yaşlarda terk etmek zorunda kalmıştır. Bazı öğrencilere başarısız olma şansı bile verilmemiştir (Hilton, 1980). Sonuç olarak, Gagne (1983)'nin vurguladığı gibi, çoğu insan matematikte başarılı olamamış veya matematiği sevmemiştir. Bununla birlikte, gerçekten şaşırtıcı ve hatta eşit derecede endişe verici olan şey, bu araştırmanın katılımcıları olan matematik öğretmen adaylarının eğitimdeki bütün reform ve yenilik hareketlerine rağmen ikinci dereceden denklemler konusu gibi temel cebirsel gerçekleri öğrenme deneyimlerinin ne yazık ki ezbere dayalı, formül odaklı bir matematik eğitim modeline dayanıyor olmasıdır.

**Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metodunu kullanarak ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmada farklı, yenilikçi ve dikkat çekici bir yöntemin geliştirilmesi üzerine yapılan vurgular**

Birçok matematik öğretmen adayı ikinci dereceden denklemin köklerini bulmak için tam kareye tamamlama yönteminin ne anlama geldiğini Hârezmî'nin geometriyi kullanarak yaptığı metodla daha iyi anladıklarını belirtmiştir. Örneğin, bir katılımcı:

Sınıfta yapılan Harezmi'nin kareye tamamlama aktivitesinin görsel ve geometrik olması sayesinde köklerin nasıl bulunacağı artık çok daha anlamlı bence. Yani, Harezmi'nin tam kareye tamamlama tarzını tartıştıktan sonra ikinci dereceden denklemleri çözmek benim için daha anlaşılır oldu...(K4).

Benzer şekilde, katılımcı 10 ile yapılan görüşme incelendiğinde öğretmen adaylarının Harezmi metodu ile öğrenmenin daha kalıcı bir etki oluşturacağına inandığı görülmektedir.

Ben matematik dersinde Harezmi'nin kareye tamamlama metodunu görünceye kadar tam kare metodunu tam anlayamadım... Ben Harezmi yöntemi sayesinde kareye tamamlayarak ikinci dereceden denklemleri çözme yolu için yeni ve oldukça değerli bir bilgi öğrendiğimi düşünüyorum (K10).

Görüldüğü gibi, öğretmen adayları ikinci dereceden denklemler konusunda Harezmi yönteminin kavramsal anlayışa çok büyük katkı sağladığını iddia etmişlerdir. Bunun anlamı kavramsal anlayışın, sembollerin ardında gizlenmiş soyut düşünceleri kavrama yeteneğiyle gelmesi gerçeğidir (Sfard & Linchevski, 1994). Bu bağlamda, matematiğin kavramsal ve işlemsel/prosedürel anlayışı arasındaki ayrımı tanımlama ihtiyacı vardır. İşlemsel/prosedürel perspektife sahip bireyler, kural ve prosedür tabanlı veya kural hafızalı olarak tanımlanır. Bu kişiler, matematiği öğrenmek için ezber yoluyla kullanacakları bir dizi kuralı bilmelidirler. Bu perspektif, kuralları ve prosedürleri bilen ve onları aktaran öğretmen veya öğretici gibi bir otoritenin bulunduğu, matematiğin prosedürel görünümünü yansıtır (Carter & Yackel, 1989; Noss & Baki, 1996). Buna karşılık, matematiğin kavramsal görüşüne sahip öğrenciler problem çözmede ve matematiksel bilgi üretmede yaratıcılıklarını kullanabilen ve sorun çözenler olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımdan, matematiğin kavramsal görüşü, yalnızca öğretmenin gösterdiği matematiğin ve algoritmaların üretilmesi anlamında değil, öğrenmeyi öğrenme açısından da değerlendirdiği söylenebilir (Carter & Yackel, 1989). Yani, matematiği, ilgili kavramlar ve düşünceler kümesi olarak görüp, öğrencilerin bu kavramları ve düşünceleri kendileri için kurma fırsatlarının sağlanması gerektiğini savunmaktadır (Noss & Baki, 1996). Benzer şekilde, Skemp (1976, 1982) semboller ve semboller arasındaki ilişkileri kavramlardan ve bunlar arasındaki etkileşimlerden ayrı olarak düşünen öğrencilerin semantik derin yapıyı, yani sembollerle temsil edilen kavramları ve bunların kombinasyonlarına yansıyan ilişki yapıları anlayan öğrencilerin aksine cebirsel ifadelerin sadece yüzeysel sözdizimsel yapısını anlayabileceklerini vurgulamıştır. Bu bağlamda, katılımcıların büyük bir kısmı, çoğu zaman matematik dersinde öğretilenlerin, önceden öğrenilen bilgilerle ilişkisinin kurulmadığını bunun da birçok insan için matematiğin zor, alakasız ve oldukça sıkıcı bir ders olarak algılanmasına yol açtığını belirtmiştir. Harezmi'nin ispatı üzerine ders yapana kadar, ikinci dereceden denklemlerdeki kavramların matematikteki diğer kavramlarla olan ilişkisini kurgulamakta zorluk çektiklerini eklemiştir. Örneğin, bunu destekleyen bir katılımcı şu ifadeleri söylemiştir.

Bize ikinci dereceden denklemleri çözmek için tam kareye tamamlama metodun cebirsel ve geometrik yorumları arasındaki ilişki asla gösterilmemişti... Matematik dersinde hep nasıl olduğunu kavrayarak değil de hazır verilmiş bir şeyleri yapıyorduk... Matematik tarihinde geometri kullanılarak yapılan çalışmayı gördükten sonra ben şimdi bu ikinci dereceden denklemleri daha iyi kavramış oldum...(K7).

Yukarıdaki görüşten anlaşılacağı üzere, matematikteki kavramlar veya düşünceler aslında birbirinden ayrı veya bağımsız değildir. Tam aksine, bu kavramlar veya düşünceler iç içe geçmiş ve karşılıklı olarak birbirlerini desteklerler. Ancak, matematiksel problemlerin yalnızca prosedür yönüyle ele alınması gerçeği matematikteki kavram veya düşüncelerin birbiriyle sıkı sıkıya ilişkili olduğu gerçeğinin önüne geçilmesine neden olmaktadır. Bu nedenle, matematiğin işlemsel/prosedürel anlayışından kurtulmak ve matematiğin kavramsal anlayışına geçmek için, öğrencilerin matematiğin kavramlar veya düşünceler arasındaki ilişki yapıları üzerine eğitilmesi gerekmektedir (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 2000). Bu şekilde, yeni yapı belirli bir işlemsel yapıya bağlı kalmaz. Aksine, geniş bir yapısal nesne olarak düşünülür ve somutlaştırma evresi başlar. Somutlaşmış yapı, genel özellikleri ve üyeleri arasındaki çeşitli ilişkileri gösteren belirli bir kavram kategorisine dâhil olduktan sonra, bu yeni yapı daha fazla kavramsal ilişkinin nesnesi haline gelir (Sfard, 1991, 1994).

**Öğretmen adaylarının gelecekte yapacakları öğretmenlik mesleğinde ikinci dereceden denklemlerin öğrenme ve öğretiminde matematik tarihinin özellikle Harezmi'nin tam kareye tamamlama metodunun bir öğretim aracı olarak kullanılması hakkındaki görüşleri**

#### **Tutum, öz yeterlik, motivasyon, kaygı gibi duyuşsal özellikler üzerine yapılan vurgular**

Görüşmenin üçüncü sorusundan elde edilen bulgular ışığında öğretmen adaylarının derslerinde matematik tarihini kullanmaları durumunda, öğrenciler için sıkıcı bir ders olarak görünen matematiğin eğlenceli hale geleceğine ve öğrencilerin ilgisini çekebileceğine ve bunun yanı sıra öğrencilerinin kendilerine olan güvenlerini arttıracığına ve öğrenmelerinin daha kalıcı olacağına inandıkları görülmüştür. Örneğin, bir katılımcı:

Bize hep Harezmi ikinci dereceden denklemlerin çözümünü yapmıştır dendi. Ama nasıl yaptığı söylenmedi. Hâlbuki bence Harezmi'nin ikinci dereceden denklemlerle ilgili yapmış olduğu çalışmayı nasıl yaptığının bize öğretilmesi gerekli diye düşünüyorum. Ben hep bunlar ne işime yarayacak diye düşünüyordum. Böylece şunu gördüm, yapılan çalışmalar güzel bir şekilde derslere entegre edilebiliyormuş. Ben bundan çok etkilendim. İlgimi çektiğini söyleyebilirim. Bende ileride öğrencilerimin ilgisini çekmek için bunu kullanabilirim. Öğrenciler için sıkıcı sayılan matematik dersi böylece eğlenceli hale gelecektir. Büyük ihtimalle de öğrencilerim bu yöntemle matematiğe değişik bir açıdan bakabilecekler...(K2).

Görüldüğü gibi, öğretmen adayları matematik tarihinin matematik öğretimiyle bütünleştirilmesiyle öğrencilerini motive etmek

için etkili bir araç elde edecekleri görüşündedirler. Bu nedenle, matematik tarihi kullanarak öğrencilerin matematiğe karşı olan ilgisini çekme ve matematik öğrenmeye yönelik olumlu tutum geliştirme fikri büyük önem kazanmıştır (Ernest, 1998; Fauvel, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000). Matematik tarihi etkileyici örneklerle dolu olduğu için matematik öğretimine entegrasyonu, öğrencilerin matematiğe olan ilgisini ve merakını çekebilmektedir. Bundan dolayı, birçok matematik eğitimi araştırmacısı, matematik tarihindeki problemlerin öğrencilerin konuyla ilgili meraklarını uyandırıp matematikle daha bir zevkle ilgilenmelerini sağlayabileceğini belirtmiştir (Furinghetti, 2000; Rubinstein & Schwartz 2000; Thomaidis, 1991). Kısacası, matematik tarihi, öğretmen adaylarının öğretmeyi umdukları içeriğin anlaşılmasına çok olumlu katkıda bulunarak süreçlerin farkına varmalarına yardımcı olmuş ve onları, matematik tarihini kendi öğretimlerinde nasıl birleştireceğine dair yöntem ve tekniklerle donatarak motivasyonlarını arttırmıştır (Charalambous ve diğ., 2009; Jankvist, 2009). Philippou ve Christou (1998)'nun yaptığı bir çalışmadaki bulgular da yukarıda verilen görüşü desteklemektedir. Öğretmen adaylarının matematiğe ilişkin tutum ve görüşlerinin hazırlık programında iki tarih temelli matematik dersini aldıktan sonra radikal bir değişim gösterdiği belirtilmiştir. Sadece olumlu tutumlar gelişmemiştir, aynı zamanda öğrencilerin matematik hakkındaki kaygıları da azalmıştır. Nitekim geleneksel matematik öğretimi genellikle matematiğin, anlaşılabilir ve formüller topluluğu olarak algılanmasına neden olduğundan, öğrenciler gerçek matematiksel anlayışa karşı psikolojik engeller inşa ederler ya da matematiği öğrenme ve kullanma konusunda birtakım kaygılar geliştirirler (Swetz, 1984). Dolayısıyla, bu çalışmada olduğu gibi, matematiğin tarihsel yönleri matematik dersinin öğretim yaklaşımlarına entegre edildiğinde, öğrencilerin matematik kaygısının veya korkusunun önemli ölçüde azaltılabileceği düşünülmektedir (Lefort, 1990; Marshall, 2000; Schubring, 2000). Örneğin, katılımcı 6 ile yapılan görüşme incelendiğinde, matematik tarihinin öğrenciye olan faydasının matematik dersini eğlenceli hale getirmesi olduğuna inandığı anlaşılmaktadır. Yapılan görüşmeden anlaşılacağı gibi öğretmen adayının matematik tarihini öğrencilerini dinlendirmek ve aynı zamanda da dersten fazla uzaklaşmamayı sağlamak için kullanmayı düşündüğü görülmüştür:

Hârezmî'nin tam kareye tamamlama metoduyla ikinci dereceden denklemler daha zevkli hale geldi. Matematik tarihi okul matematiğini eğlenceli hale getirmede bana yardımcı olabilir. Dersimi renklendirmek için kullanabilirim. Öğrenciler için sıkıcı görünen matematiği eğlenceli hale getiriyor... Mesela, dersimi işliyorum, bir baktım ki sınıfın derse olan ilgisi azalmış ve artık benim anlattıklarım anlamsız gelmeye başlamış. Bu durumda öğrencilere matematik tarihinden bir şeyler anlatmaya başlarım. Hem öğrencileri dinlendirmiş olurum hem de bir yandan konu ile ilgili bir şeyler anlatmaya devam etmiş olurum... Bana kalırsa matematik tarihi ilgi çekmek için de mükemmel bir araçtır...(K6).

Dolayısıyla, matematik öğretiminde matematik tarihinin kullanılmasının öğretmen adaylarının motivasyonunu arttırdığı ve ilgilerini çektiği görülmüştür. Aslında, matematik tarihindeki problemler üzerinde çalışmak, hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin, birçok matematiksel kavram ve prosedürün ortaya çıkışı ve gelişiminin arkasındaki motivasyonu anlamalarına olanak tanır. Aslında bir problemi ilgi çekici yapan şey, yalnızca matematiksel içeriği değil, aynı zamanda belkide en önemlisi problemin neden dolayı ortaya çıktığıdır (Tzanakis & Thomaidis, 2000; van Maanen, 1991). Bu yüzden, öğrenciler her zaman için matematiksel gelişmeleri tetikleyen matematik tarihindeki problemleri, ders kitaplarında her bölümünün sonunda bulunan rutin alıştırma problemleri yerine yapmaktan çok daha istekli olacaklardır (Simonson, 2000; Swetz, 1989). Ayrıca, farklı zaman dilimlerinden ve kültürel kökenlerden gelen tarihi problemler, öğrencileri alternatif problem çözme stratejilerini değerlendirmeye ve karşılaştırmaya (Grugnetti, 2000), matematiksel ilişkileri kurmaya (Grugnetti & Rogers, 2000) ve daha derinlemesine araştırmalar ve incelemeler yapmaya itecektir (Reimer & Reimer, 1995; Wilson & Chauvot, 2000).

### Matematiksel içerik ve matematiksel düşünce üzerine yapılan vurgular

Öğretmen adaylarının çoğu, Hârezmî metodu ile matematik tarihini eğitim öğretime entegre etmenin sadece matematiğe yönelik tutumlarını arttırmaya yardımcı olmadığını, aynı zamanda matematiksel düşünce seviyelerini de geliştirmeye katkıda bulunduğunu belirttiler. Problemlerin eski çözüm yollarını analiz etmek, öğretmen ve öğrencilerin sadece matematik yapmasını sağlamaz aynı zamanda onları matematik hakkında düşünmeye, onun hakkında konuşmaya ve yazmaya doğru da yönlendirir (Tzanakis & Arcavi, 2000; van Maanen, 1997). Örneğin, bir katılımcı;

Bizden ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmak için Hârezmî'nin tam kareye tamamlama tekniği hakkında ne biliyorsak yazmamız ve ne yazmış isek bunları sınıf ortamında paylaşarak tartışmamız istendi. Tahminler arkasındaki mantığı paylaşan her açıklama zengin bir matematiksel tartışma ortamı oluşturmuştur. Biz bazen tahminleri açıklamak için zihinsel mücadeleler verdik ve bu bizim matematiksel düşüncemizi geliştirmemize yardımcı olmuştur. Yani, matematiksel fikirler arasında bağlantı kurmamıza ve bizim matematik bilginizi kuvvetlendirmemize yardımcı olmuştur. İlk defa, problemin bir parçası olduğumu fark ettim. Hârezmî tekniği ile gelecekte benim kendi öğrencilerime de matematiksel düşünce ve anlayışı kazandırmak mümkün olacaktır diye düşünüyorum...(K9).

Matematik derslerinde Hârezmî Metodu gibi aktivitelerle matematik tarihinin matematik eğitime entegrasyonu öğretmen adaylarının yaratıcılığını ve matematiksel anlayışını derinleştirdiği görülmektedir (Barbin, 2000; van Maanen, 1997). Ayrıca, öğrenme ortamına matematik tarihini entegre etmek öğrencilerin bilgi ve yaratıcılığı için de önemli bir fırsat sunacaktır (Estrada, 1993). Bu nedenle, matematik tarihinin ders içinde kullanımıyla öğrencilerin matematiksel düşüncesinin gelişebileceği belirtilmiştir (Barbin, 1996; Rickey, 1996). Örneğin, bir katılımcı;

Hârezmî'nin geometrik gerekçelerle örülü kareye tamamlama metodu ikinci dereceden denklemleri anlamlı bir şekilde tartışmak için bize fırsatlar sağladı. Tartışma sırasında, argümanları oluşturmak için matematiksel bilginizi kullanmış olduk. Düşüncelerimizi kâğıda döktük. Böylelikle, farklı yolları incelemek hem anlayışımızı güçlendirdi hemde bizi

kendi aramızda düşünmeye ve tartışmaya itti. Bu yolla sorgulamanın, dinlemenin ve yazmanın hem öğrencilerimiz için hem de öğretmen olarak kendimiz için çok önemli araçlar olduğunu farkettilik. Bu öğretmenlik kariyerine başlamadan önce bizler için paha biçilmez bir kazanım oldu (K3).

Şu bir gerçektir ki, birçok matematiksel kavram, bilim adamları tarafından matematik tarihi boyunca defalarca gözden geçirilmiş ve revize edilmiştir. Bu büyük çabaların arkasındaki bilgelik, matematiksel düşüncenin özünü de oluşturmaktadır (Liu, 2003). Ernest (1998), matematik tarihini öğrenmenin nedeni olarak, bugünkü matematik eğitim ve öğretiminde halen çok değerli olan tarihteki matematikçilerin matematiksel süreçleri ve stratejileri oluşturmadaki mücadelelerini görmek, yorumlamak ve daha da ilerletmek olarak vurgulamıştır. Liu (2003) matematiksel düşüncenin tahmin, tümevarım, tümdengelim, tanım, genelleme, benzerlik, muhakeme, doğrulama, vb. gibi karmaşık süreçlerin bir bileşimi olduğunu ileri sürer. Ancak, modern ders kitapları genelde matematiksel kavramları alımlı ve cilalanmış bir biçimde sunarak verilen mücadeleyi gizler ve bütün hikâyeyi yok ederler (Lakatos, 1976). Dahası, Clark (2011), öğrencilere bir örnekle sadece tek bir çözüm yöntemi öğretilerek ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesinin oldukça üzücü olduğunu savunmaktadır. Savunduğu argümanını, yapmış olduğu çalışmada ikinci dereceden denklemlerin sadece algoritmik olarak çözülmesinin matematik öğretmen adaylarının tam kareye tamamlama yönteminin gerçekten ne anlama geldiğini tam olarak anlamalarına engel olduğunu göstererek kanıtlamaya çalışmıştır. Hâlbuki ikinci dereceden denklemlerin çözümü gibi tarihte farklı dönemlerdeki belirli matematiksel problemler için alternatif çözümlerin öğretilmesi matematiksel anlayışın geliştirilmesi için etkili bir yol sağlamaktadır. Bu nedenle, matematik tarihinde uğraşılan problemlerle ilgili önceki dönemlerde farklı matematikçilerinin yaklaşımları analiz edilerek matematiksel düşünce daha iyi geliştirilebilir ve onun dinamik yapısı daha rahat değerlendirilebilir. Basitçe söylemek gerekirse, matematik tarihinde ki bu çoklu yaklaşımlar bireyleri ikna etmekle kalmaz aynı zamanda onları çalıştıkları konuda aydınlatır. Böylece, basmakalıp bir düşünce olan problemlerin çözüm yolu değişmez ya da problemler mutlak bir çözüm yöntemine sahiptir gerçeğini de bu şekilde reddetmeyi öğrenebilirler (Siu, 2000).

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Mevcut çalışmanın sonuçları, öğretmen adaylarını Hârezmi metodunda olduğu gibi matematiksel düşüncenin tarih içindeki gelişim sürecinden haberdar etmekle onların matematik öğretiminde alternatif perspektifleri de göz önüne alabileceklerini göstermiştir. Matematiğin tarihsel gelişiminde öne çıkan problemleri matematik öğretim yaklaşımlarına entegre etmek, öğretmen adaylarına, günümüzde sıklıkla kullanılan matematiksel formül ve hipotezlerin nasıl üretildiğini ve nasıl geliştirildiğini öğrenmelerine yardımcı olmakla birlikte onlara sınıfta ve gündelik yaşamımızda bugünkü problemleri çözmek için bunları çeşitli tekniklerle nasıl kullanmamız gerektiğine dair inceleme fırsatını da sunmaktadır (Baki & Bütüner, 2010; Rice, 1998). Nitekim matematiksel düşüncelerin gelişimi sırasında, belli kavramlar matematikçiler tarafından aşamalı olarak kabul görmüştür. Matematik topluluğunun kabul etmesi zor olan konular ile öğrencilerin anlamakta zorluk çektiği konular arasında yüksek bir korelasyon olduğundan (Kelley, 2000), bu durum, günümüz öğrencilerinin bu kavramları öğrenmeye başladıklarında da aynı zorluklarla karşılaşacağını göstermektedir. Bu nedenle, öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel kavram ve işlemleri öğrenirken karşılaştıkları zorlukları anlamaları ve bunlara çözüm yolları geliştirme konusunda daha hassas ve duyarlı olmaları gerekmektedir. Bu bağlamda, matematik tarihi, matematik öğretmen adayları için ikinci dereceden denklemlerin çözümü konusunda farklı bir açıklama, değişik örnekler ve alternatif yaklaşımlar sağlamaktadır (Schubring, 2000). Bu aynı zamanda, öğretmen adaylarının tam kareye tamamlama yöntemiyle ikinci dereceden denklemlerin köklerini bulmada öğrencilerin karşılaştıkları zorlukları anlamalarını da sağlayabilir. Ayrıca, öğrenciler matematik tarihindeki yaşanmışlıkları öğrenerek, matematik öğrenme süreçlerinde pek çok problemle mücadele ederken yalnız olmadıklarını hissedebilir ve bu konuda daha az kaygı yaşayabilirler (Ernest, 1998; Fauvel, 1991).

Bununla birlikte, matematik tarihinin öğretim programına entegrasyonunun dikkatli bir şekilde yürütülmesi gerektiği ve son derece yetkin eğitimcilerin uzmanlığıyla başarılacağı gerçeğini de görmezden gelemeyiz (Leng, 2006). Dolayısıyla, matematiksel kavramların gelişimini gösteren öğretim durumlarını oluşturmak için tarihi argümanları yerinde kullanmak oldukça önemlidir (Brousseau, 1997). Ayrıca, matematik tarihini matematik öğretimiyle bütünleştirmek, öğrencilerin bir gecede konuya hâkim olmasını sağlamaz, ancak matematik öğrenimini yaşanmış bir deneyim haline getirebilir, böylece öğrenme daha kolaylaşabilir ve anlamlı bir hale gelebilir (Siu, 2000). Belki şunu da belirtmeliyiz ki, matematik öğretim programında nadiren ek konulara ya da mevcut materyal üzerine uzun tartışmalara yer bırakıldığından sınırlı sürede belirlenen sayıda konuyu tamamlaması gereken öğretmenler, faydasına rağmen matematik tarihini matematik dersine entegre edip uygulamakta direnebilirler (Fried, 2001). Bunun aksine, Avital (1995) öğretmenlerin ilave bir zamana veya ek konuya girmeye ihtiyaç duymadıklarını sadece eski metodlarla öğretilen konuların yeni bir yöntemle öğretilmesi gerektiğini ileri sürmektedir. Bu sayede, öğretim programındaki her konu için, ilgili bir problem, düşünce veya figür matematik tarihinde bulunabileceği için tarihteki matematiksel problemlere yönelik matematik eğitimi yaklaşımı yalnızca öğretim yöntemlerini zenginleştirmekle kalmayıp, aslında eğitimsel açıdan modern olanlardan daha iyi yolları da gösterebilmektedir (Fried, 2001). Özetle, Hârezmi yöntemi gibi matematik tarihindeki çalışmaları matematik öğretiminde kullanmak öğretmen adaylarının ikinci dereceden denklemlerin içeriğini daha iyi anlamalarını sağlamıştır. Onlara, matematik tarihindeki materyalleri ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesine dâhil etmek için farklı yöntemler ve teknikler sunmakla birlikte, ikinci dereceden denklemlerle ilgili matematik tarihinin nasıl geliştiğine dair de fikir vermiştir (Charalambous ve diğ., 2009).

Sonuç olarak, matematik tarihiyle zenginleştirilmiş matematik dersleri öğrencilerin yaratıcılıklarını ve motivasyonunu artırır, tutumlarını destekler, matematiksel kavramların oluşumunda ve gelişiminde karşılaşılabilecek muhtemel zorluklara dikkat çeker ve böylece konunun hümanist tarafını ortaya çıkarır (Avital, 1995; Baki & Bütüner, 2010; Jankvist, 2009; Swetz, 1995). Diğer bir ifadeyle, matematik tarihini, ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesi ve öğrenilmesine dâhil etme girişimleri, öğrencilerin mevcut



inanç ve tutumlarını değiştirerek matematiksel anlamlar oluşturmalarını ve matematikle ilgili yeni kavramları daha iyi algılamalarını sağlar (Ernest, 1998; Fauvel, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000). Bu durum, ikinci dereceden denklemlerin çözümünde matematiksel görevlerde çalışmada kendine güveni otomatik olarak artırabilir ve matematiksel yöntemleri uygulama becerilerini geliştirir (Charalambous ve diğ., 2009). Bu nedenle, matematik tarihinin matematiğin öğretilmesi ve öğrenilmesinde kullanımı alternatif bir yol olmaktan ziyade öğretmenler ve eğitim araştırmacıları için değerli bir pedagojik araç olarak karşımıza çıkar (Sfard, 1995). Ancak, matematik eğitimine matematik tarihinin entegrasyonun körü körüne aynı yolun izlenmesi anlamına gelmediğini kabul etmek de önemlidir. Bu bağlamda, tarih bize takip edilmesi gereken iyi örnekleri sunduğu gibi aynı zamanda iyi olmayan örnekleri de aktarabilmektedir. Yine de, matematik tarihinin, ikinci dereceden denklemlerin öğretilmesinde ve öğrenilmesinde olumlu bir rol oynayabileceği inancı tamdır (Clark, 2011; Rice, 1998; Schubring, 2000). Ancak, matematik tarihinin matematik öğretilmesine etkili bir şekilde entegrasyonu, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin matematiği daha derinden anlamasına ve bu anlayışı geliştirmesinde matematik tarihinin rolünü çok daha iyi tanımasına yardımcı olmak için daha detaylı araştırmalara da ihtiyaç duyulmaktadır.

## 5. Kaynakça

- Allaire, P. R., & Bradley, R. E. (2001). Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. *Mathematics Teacher*, 94(4), 308-319
- Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 111-129.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2000). A model for analysing algebraic thinking. In Sutherland R., Roiano T., & Bell A. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Washington, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Avital, S. (1995). History of mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 3-12). The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin, Paris.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi* (Genişletilmiş 4. Basım). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Baki, A., & Bütüner, S. Ö. (2010). Matematik tarihi etkinlikleriyle zenginleştirilmiş sınıf ortamından yansımalar. *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiri Özetleri* içinde (s. 104), Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Baki, A., & Bütüner, S. Ö. (2013). 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitaplarında matematik tarihinin kullanım şekilleri. *İlköğretim Online*, 12(3), 849-872.
- Baki, A., & Yıldız, C. (2010). Matematik tarihi etkinlikleriyle zenginleştirilmiş sınıf ortamından yansımalar. *II. Uluslararası Türkiye Eğitim Araştırmaları Kongre Kitabı* içinde (ss. 563-577), *Eğitim Araştırmaları Birliği*, Antalya.
- Barbin, E., & Menghini, M. (2000). On potentialities, limits, and risks. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, (pp. 86-90). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*, (pp. 17-25). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, (pp. 63-90). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bossé, M. J., & Nandakumar, N. R. (2005). The factorability of quadratics: motivation for more techniques (section A). *Teaching Mathematics and its Applications*, 24(4), 143-153.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer, Dordrecht.
- Brown, S. I. (1993). Towards a pedagogy of confusion. In A. White (Ed.), *Essays in humanistic mathematics* (pp. 107-122). The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Carter, C. S., & Yackel, E. (1989). A constructivist perspective on the relationship between mathematical beliefs and emotional acts. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco.
- Charalambous, C. Y., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in pre-service teachers' beliefs and attitudes: Insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 161-180.
- Cheung, Y. L. (1980). Learning ideas for mathematics teacher education. *Journal of Science and Mathematics Education in S. E. Asia*, 3(2), 12-19.
- Clark, K. M. (2011). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 67-84.
- Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001). The mathematical education of teachers: Vol. 11. *Issues in mathematics education*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Los Angeles: SAGE Publications.
- Didiş, M. G., Baş, S., & Erbas, A. K. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*, pp. 479-489.
- Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 26-31.
- Estrada, M. F. (1993). A história no ensino da matemática [History in the teaching of mathematics]. *Educação e Matemática*, 27(3), 17-20.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3-6.
- Fauvel, J., & Gray, J. (1987). The history of mathematics: A reader. The Open University, London.
- Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education-The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Fidel, R. (1984). The case study method: A case study. *Library and Information Science Research*, 6(3), 273-288.
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.

- Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55-61.
- Furinghetti, F. (2000). The long tradition of history in mathematics teaching. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 49-58). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.
- Gagne, R. M. (1983). Some issues in the psychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 7-18.
- Garner, M. (1996). The importance of history in mathematics teaching and learning. *A paper presented at Interface '96*, Atlanta.
- Glaisher, J. W. L. (1890). *Presidential address British association for the advancement of science*. (Section A), *Nature* 42, no. 1089, 464-468.
- Gray, R., & Thomas, M. O. J. (2001). Quadratic equation representations and graphic calculators: Procedural and conceptual interactions. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and beyond. Proceedings of the 24th Conference for the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney*, (pp. 257-264). Sydney: MERGA
- Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, (pp. 39-62). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Hilton, P. (1980). Math anxiety: Some suggested causes and cures: Part 1. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 11(3), 174-188.
- Hoffman, N. (1976). Factorisation of quadratics. *Mathematics teaching*, 76, 54-55.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in teaching mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Katz, V. J. (1993). Using the history of calculus to teach calculus. *Science & Education*, 2, 243-249.
- Katz, V. J. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 62-63.
- Katz, V., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Math*, 66(2), 185-201.
- Kelley, L. (2000). A mathematical history tour. *Mathematics Teacher*, 93(1), 14-17.
- Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and pedagogical aspects. *Science & Education*, 2, 183-209.
- Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics: A cognitive approach. *Australian Mathematics Teacher*, 63(2), 19-24.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lefort, X. (1990). History of mathematics in adult continuing education. In J. Fauvel (Ed.), *History in the mathematics classroom: The IREM papers* (vol. 1). (pp. 85-96). Leicester, England: The Mathematical Association.
- Leng, W. N. (2006). Effects of an ancient Chinese mathematics enrichment programme on secondary school students' achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematical Education*, 4, 485-511.
- Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- MacDonald, T. H. (1986). Problems in presenting quadratics as a unifying topic. *The Australian Mathematics Teachers*, 42(3), 20-22.
- Marshall, G. (2000). *Using history of mathematics to improve secondary students' attitudes towards mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Bloomington-Normal, IL, USA.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.
- National Council for the Accreditation of Teacher Education. [NCATE]. (2003). *NCATE/NCTM Program standards: Programs for initial preparation of mathematics teachers*. Washington, DC: Author.
- Ness, H. (1993). Mathematics: An integral part of our culture. In A. M. White (ed.), *Essays in humanistic mathematics*, (pp. 49-52). The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Noss, R., & Baki, A. (1996). Liberating school mathematics from procedural view. *Journal of Hacettepe Education (Ankara)*, 12, 179-182.
- Philippou, G. N., & Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes toward mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189-206.
- Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 143-170). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
- Reimer, L., & Reimer, W. (1995). Connecting mathematics with its history: A powerful, practical linkage. In A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum, 1995 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 104-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Rice, A. (1998). A Platonic stimulation: Doubling the square or why do I teach maths? *Mathematics in School*, 27(4), 23-24.
- Rickey, V. F. (1996). The necessity of history in teaching mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*, (pp. 251-256). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Rubinstein, R. N., & Schwartz, R. K. (2000). Word histories: Melding mathematics and meanings. *Mathematics Teacher*, 93(8), 664-669.
- Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, (pp. 91-142). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228. Reprinted in P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics-Constructivist and Interactionist theories of mathematical development*. (pp. 87-124). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.
- Simonson, S. (2000). The mathematics of Levi ben Gershon. *Mathematics Teacher*, 93(8), 659-663.
- Siu, M. K. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 3-9). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R. (1982). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. *Visible Language*, 16, 281-288.
- Swetz, F. (1984). Seeking relevance? Try the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, 77(1), 54-62.
- Swetz, F. (1989). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. *Mathematics Teacher*, 82(5), 370-377.
- Swetz, F. (1995). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters* (pp. 25-38). The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Thomaidis, Y. (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 37-43.
- Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons. *Science & Education*, 2, 69-86.
- Tobias, S. (1978). *Overcoming maths anxiety*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI book*, (pp. 201-240). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44-55.
- Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 18(1), 47-77.
- van Maanen, J. (1991). LHôpital's weight problem. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 44-47.
- van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *For the Learning of Mathematics*, 17(2), 39-46.
- Vinogradova, N. (2007). Solving quadratic equations by completing squares. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(7), 403-405.
- Wilson, P. S., & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (2. baskı). Ankara: Seçkin yayıncılık.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed.). Applied Social Research Series, Vol. 5, Sage Publications.

## Extended Abstract

Although the use of history of mathematics in mathematics classes is not a new topic of debate, scientific interest has been rapidly growing in recent years for utilizing history of mathematics in teaching and learning of mathematics (Arcavi & Isoda, 2007; Baki & Bütüner, 2013; Charalambous, Panaoura & Phillippou, 2009; Fauvel, 1991; Fried, 2001; Furinghetti, 2007; Jankvist, 2009; Schubring, 2000; Vinogradova, 2007). For example, in some studies, it has been suggested that using history of mathematics in mathematics education enhances students' motivation and helps them develop a positive attitude toward mathematics (Avital, 1995; Baki & Bütüner, 2010; Brown, 1993; Swetz, 1995). It has also been stated that thanks to integrating history of mathematics into mathematics education students can clearly see and evaluate the challenges encountered in the development of mathematics from past up to present (Radford, 2000). It is thus emphasized that the history of mathematics helps students to understand mathematical concepts more meaningfully and to consider that mathematics is a human and sociological phenomenon rather than an isolated discipline (Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS], 2001). In the relevant literature, despite the emphasis on the use of history of mathematics in mathematics education, it is particularly difficult to find examples that investigate the effects of using history of mathematics in mathematics education on the conceptions of pre- or in-service mathematics teachers. In particular, research studies for teaching and learning second-degree equations generally focus on the use of geometric approximations for solving equations in the second-order (Allaire & Bradley, 2001), solving quadratics by completing the square (Vinogradova, 2007), solving quadratic equations by factoring (Cheung, 1980; Hoffman, 1976), and graphical method for solving quadratic equations (Macdonald, 1986). In these studies, the most satisfying conclusion reached by many researchers is that almost all of the learners often have difficulty in solving equations in the second-order (Bosse & Nandakumar, 2005; Didiş, Baş, & Erbaş, 2011; Gray & Thomas, 2001; Kotsopoulos, 2007; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Thus, this is one of the most important reasons why mathematics education researchers have sought to look at different aspects of teaching second-degree equations. However, there is not much research on how teachers can use history of mathematics in mathematics lessons and what kind of conceptions they can have. For this reason, the views of the prospective teachers about the use of history of mathematics for teaching mathematics cannot be ignored. In this context, the purpose of this study is to explore the preservice elementary mathematics teachers' conceptions regarding the use of history of mathematics as a teaching tool, especially Al-Khwarizmi's method of completing the square in the learning and teaching of second-degree equations.

In this study, a qualitative research method was used. A case study that is a preferred method for responding to 'what', 'how' and 'why' questions in order to allow a specific event, individual or group to be studied in depth over a limited period of time within the context of the situation had been identified as the most appropriate research design for in-depth analysis of the preservice elementary mathematics teachers' conceptions about integrating history of mathematics in mathematics education (Yin, 2009). The data of the study were collected through semi-structured interviews with 10 teacher candidates among senior students who were studying in the elementary mathematics teacher education program on the basis of volunteerism through activity focusing on solving second-degree equations by Al-Khwarizmi's method. These teacher candidates had taken history of mathematics course as part of their undergraduate education program, in which the main topics of mathematics such as arithmetic, algebra, geometry, trigonometry, probability, statistics and advanced mathematics were studied from the perspective of mathematical pedagogy and critical thinking within the historical development of mathematics. The pilot study of interview questions was conducted with three teacher candidates. Following the pilot study, the questions were finalized with an expert opinion. Semi-structured interviews with preservice teachers were examined by content analysis and the themes were identified for interpretations (Creswell, 2009; Merriam, 1998). In order to reflect the views of the participants in a striking way, the findings were given in direct excerpts from the high frequency responses from the teacher candidates under themes and sub-themes (Yıldırım & Şimşek, 2005).

Two main themes were identified as a result of the analysis of the findings obtained within the scope of the research study. The first major theme demonstrated the conceptions of the influences of the use of history of mathematics, specifically Al-Khwarizmi's method of completing the square, in the teaching and learning

of quadratic equations on preservice mathematics teachers' current mathematical knowledge. In this context, based on their own learning experiences, a significant number of participants emphasized that the second-order equations taught in schools are generally based on the use and application of rote memorization of formulas. On the other hand, a group of participants as a result of the geometric reasoning presented by Al-Khwarizmi for the solution of  $x^2 + 10x = 39$  suggested that Al-Khwarizmi's method of completing the square is a different, innovative, robust and interesting method for finding the roots of quadratic equations. The second main theme described the conceptions of the influences of the use of history of mathematics as a means of teaching and learning of quadratic equations on their future teaching professions. In this regard, some participants expressed their views about the effects of Al-Khwarizmi's method of completing the square on mathematical content and mathematical thinking in the teaching and learning of second-degree equations. On the other hand, some of them had not only emphasized the influence of Al-Khwarizmi's method on mathematical content and mathematical thinking, but also assessed this method in terms of affective characteristics such as attitude, self-efficacy, motivation and anxiety in mathematics education.

In summary, the use of history of mathematic in the teaching of mathematics, such as Al-Khwarizmi's method of completing the square, has made it possible for prospective teachers to better understand the content of second order-equations. This provided them new ideas with how the history of mathematics about second-order equations was developed, as well as presenting different methods and techniques to incorporate materials from the history of mathematics into the teaching of equations in second-degree (Charalambous, Panaoura, & Philippou, 2009). Accordingly, attempts to incorporate the history of mathematics into teaching and learning quadratic equations have allowed students to change their existing beliefs and attitudes to create mathematical meanings and to better understand new concepts related to mathematics (Ernest, 1998; Fauvel, 1991; Tzanakis & Arcavi, 2000). This can automatically increase self-confidence of students by improving their ability to apply different mathematical methods when working on mathematical tasks in solving second-order equations (Charalambous et al., 2009). For this reason, integrating history of mathematics into mathematics teaching has begun to be perceived not as an alternative way but as a valuable pedagogical tool for teachers and researchers (Sfard, 1995). However, it is also important to recognize that the application of history of mathematics in mathematics education does not mean that the same path must be followed blindly. In this context, history can provide us with good examples that need to be followed, as well as examples that should not be followed in mathematics teaching and learning. Nonetheless, there is a firm belief that the history of mathematics can play a positive role in the teaching and learning of second-degree equations (Clark, 2011; Rice, 1998; Schubring, 2000). However, much research is needed to better understand how effectively integrate the history of mathematics into mathematics education in order to help both preservice and in-service teachers to better appreciate the role of history of mathematics on improving their understanding in the teaching and learning of mathematics.