
YÜKSEK DERECEDEDEN MOMENTLER VE BULANIK ENTROPİYE DAYALI PORTFÖY OPTİMİZASYONU

Mehmet AKSARAYLI¹ Osman PALA²

Öz

Tarihsel getirilerin normal dağıldığı varsayımına dayanan ortalama varyans modelinin etkinliği, hisse senetleri getiri serileri normal dağılım göstermediğinde düşmektedir. Modelin etkinliğini artırmak ve getiri serilerinin dağılımını daha iyi modele aktarabilmek için yüksek dereceden momentler modele eklenmektedir. Ortalama varyans modeli ve varyantlarının bir başka karşılaştığı problem ise modellerin sıklıkla ürettiği köşe çözümlerdir. Belirli hisse senetlerine yığılmayı önlemek ve doğal çeşitliliği artırmak için entropi fonksiyonu kullanılmaktadır. Fakat entropi fonksiyonları karar vericinin bakış açısından uzak ve diğer amaç fonksiyonlarına baskınlık kuran sonuçlar üretebilmektedir. Çalışmada, değinilen sorunları aşmak için yeni bir bulanık entropi tanımlanmış, yeni bir ortalama-varyans-çarpıklık-baskınlık-bulanık entropi portföy seçim modeli önerilmiş ve önerilen modelin etkililiğini göstermek için, iki gerçek veri seti üzerindeki deneyler, çeşitli portföy hedefleri ve karar vericilerin tercihleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Entropi ve bulanık entropi, amaç fonksiyonu olarak yüksek momentleri içeren portföy modelleri açısından karşılaştırılmıştır. Bulgular, önerilen bulanık entropi yaklaşımının, özellikle yüksek dereceden momentli portföy modelleri için daha uygun olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Portföy optimizasyonu, yüksek dereceden momentler, entropi, bulanık entropi.
JEL Sınıflandırması: G110, C610, C100.

PORTFOLIO OPTIMIZATION BASED ON HIGHER ORDER MOMENTS AND FUZZY ENTROPY

Abstract

The effectiveness of the mean variance model, which is based on the assumption that the historical returns are normally distributed, falls when the series of stock returns do not follow a normal distribution. In order to increase the efficiency of the model and to cover the properties of the return series' distribution better, higher order moments are added to the model. Mean variance model and its variants are often facing another problem, corner solutions that models often produce. Entropy function is used to prevent accumulation in certain stocks and to increase natural diversity. Entropy functions, however, can be far from the decision maker's point of view and can also produce results that dominate other objective functions. In the study, a new mean-variance-skewness-kurtosis-fuzzy entropy portfolio selection model with a new defined fuzzy entropy has been proposed to overcome the problems mentioned and experiments was performed on two real data sets to show the effectiveness of the proposed model with using various portfolio objectives and preferences of decision makers. Entropy and fuzzy entropy are compared in basis of portfolio models which have higher moments. Results present that proposed fuzzy entropy approach is better-suited especially with higher-moment portfolio models.

Keywords: Portfolio optimization, higher order moments, entropy, fuzzy entropy.
JEL Classification: G110, C610, C100.

¹ Doç. Dr. DEÜ İİBF mehmet.aksarayli@deu.edu.tr

² Arş. Grv. DEÜ İİBF osman.pala@deu.edu.tr

1. Giriş

Portföy seçimi finansal yatırımın önemli bir konusudur. Fon yöneticileri, bir takım riskli varlıklardan oluşacak optimum portföy seçimi ile ilgilenmektedir. Portföy optimizasyonu, belirli finansal kriterler dahilinde riskli varlıklar arasında en iyi mevcut sermaye dağılımının seçilmesi olarak tanımlanabilmektedir (Markowitz, 1952: 89). Markowitz'in modern portföy teorisi (MPT) olarak da adlandırılan, portföy seçim teorisinin tarihçesinde bir kilometre taşı olarak görülen ortalama varyans modeli (OVM), portföy getirisini portföy tarihsel getiri ortalaması, portföy riskini ise portföy varyansı olarak tanımlamaktadır. OVM, basitçe tüm yatırımcıların portföy getirisini en üst düzeye getirmeye ve portföy riskini en aza indirmeye odaklandığı fikrine dayanmaktadır (Markowitz, 1991: 470). OVM odaklı portföy optimizasyonu üzerine çok sayıda çalışma yapılmış ve Steinbach (2001) çalışmasında bu modellere yer vermiştir. Bununla birlikte, ortalama ve varyans, hisse senedi getirilerinin normal dağılmadığı durumlarda en iyi portföyü seçmek için yetersiz olmaktadır (Simkowitz ve Beedles, 1978: 929).

Samuelson (1970), OVM'ye portföy çarpıklığını ekleyerek ortalama-varyans-çarpıklık modeli (OVÇM) önermiştir. Çarpıklık optimizasyon sürecine dahil edildiğinde daha yüksek getiri elde edilebileceğine ilişkin güçlü kanıtlar bulunmuştur. (Harvey vd., 2010: 470). Son dönemdeki araştırmalarda, portföy seçimine ve modele eklenen portföy basıklığı, Jurczenko, Maillat ve Merlin'in (2005) çalışmasında olduğu gibi ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık modeli (OVÇBM) olarak adlandırılmıştır. Portföydeki aşırı basıklık, portföy getirisinin kuyruk dağılımının normal dağılımdan daha yoğun olduğunu ve dolayısıyla büyük kayıp riskinin çok yüksek olacağını göstermektedir.

Yüksek dereceden momentli portföy modelleri, OVÇM ve OVÇBM, yakın geçmişte çeşitli portföy seçim yaklaşımlarında yaygın olarak kullanılan modeller haline gelmiştir. Bununla birlikte, yüksek dereceden momentli modeller ve OVM ile elde edilen portföylerin bir kaç tane hisse senedi üzerine yayıldığı veya portföydeki bazı pozisyonlara konsantre oldukları, daha az çeşitlendirilmiş portföylere neden oldukları gözlenmiştir (Chunhachinda vd., 1997: 146). Çalışmalar finansal kriz sırasında iyi çeşitlendirilmiş portföylerin, konsantre olanlardan daha düşük sistematik riski taşıdığını göstermektedir (DeMiguel vd., 2009: 1920). Çeşitlilik ölçütü olan entropi, çeşitlendirmeyi sağlamak için portföy optimizasyonunda objektif bir işlev olarak kullanılabilir. Literatür, portföy performans ölçümleri açısından, portföy seçiminde entropi fonksiyonlarının farklı performans sergilediklerini göstermiştir (Yu vd., 2014: 49). Çalışmada, Shannon entropisi ve tanımlanmış olduğumuz Bulanık Yager entropisi olmak üzere iki farklı entropi ölçütünün performansı portföy optimizasyonu açısından karşılaştırılmıştır. Aynı anda optimize edilmek üzere birden fazla amaç fonksiyonu içeren ve doğrusal olmayan çok amaçlı optimizasyon problemleri olarak düşünülen portföy optimizasyonu modeli, birbiri ile çelişen hedeflere sahiptir. Portföy optimizasyonu için entropi fonksiyonları, portföy moment değerlerinde beklenmeyen ve istenmeyen azalmalara neden olmaktadır. Bu problemi önlemek ve ayrıca bulanık mantık esnekliğinden fayda sağlamak için bulanık hedef kavramı kullanılarak oluşturulan Bulanık Yager entropisi önerilmiştir. Ağırlıklı toplam yöntemi (ATY), yatırımcı tercihleri ile ağırlıklandırılabilir şekilde, ortalama, çarpıklık ve entropiyi maksimize ve varyans ile basıklığı ise minimize etmek gibi çelişen çoklu hedefleri çözmek için kullanılmıştır. Bu çalışmanın katkısı, ortalama-varyans-çarpıklık-basıklık-entropi modeli (OVÇBEM) geliştirmekle birlikte, portföy optimizasyonu için yeni bir bulanık entropi fonksiyonu önermek, ve önerilen modelin iki farklı piyasada test edilmesidir. Tüm modeller MATLAB programlama dilinde kodlanmış ve çözülmüştür.

2. Literatür Özeti

Bazı çalışmalarda, örneğin, Samuelson (1970), Levy (1974), Arditti ve Levy (1975), Singleton ve Wingender (1986), Konno ve Suzuki (1995), Liu, Wang ve Qiu (2003), Wang ve Xia (2012) çarpıklık portföy seçim sürecine dahil olmuş ve OVÇM önerilmiştir fakat bu modeller portföy basıklığını göz ardı etmektedir. Son dönemde basıklık portföy optimizasyon sürecine dahil edilmeye başlanmış ve OVÇBM portföy seçim probleminde kullanılabilir hale gelen bir model olmuştur. Jurczenko vd. (2005),

Lai vd. (2006), Maringer ve Parpas (2009), Mhiri ve Prigent (2010), Kemalbay vd. (2011) ve Aracıoğlu vd. (2011) çalışmalarında portföy optimizasyonu sürecine basıklığı amaç fonksiyonu olarak dahil etmişlerdir. Portföyde basıklığın 0'dan büyük olması portföy getiri dağılımının normal dağılımdan daha fazla şişman kuyruklara sahip olmasına neden olmakta ve göreceli yüksek kayıp ve kazanç risk problemini beraber doğurmaktadır.

Bazı çalışmalarda ise yüksek dereceden momentler ve entropinin portföy seçiminde birlikte kullanımına rastlanmaktadır. Örneğin, Jana vd. (2007), Bera ve Park (2008), Usta ve Kantar (2011) Shannon entropisi odaklı portföy seçimi gerçekleştirmişlerdir. Zhou vd. (2013) farklı entropi fonksiyonlarını portföy optimizasyonunda kullanan çalışmaları incelemişlerdir. Bulanık entropinin öncü çalışmalarından birini De Luca ve Termini (1972) gerçekleştirmişlerdir. Kosko (1986) bulanık entropinin aksiyom ve koşullarını tanımlamıştır. Qin vd. (2009) bulanık çapraz entropiyi genetik algoritma ve bulanık simulasyon ile kullanarak portföy seçimi gerçekleştirmiştir. Huang (2012) oransal bir entropi tanımlayarak bulanık çok amaçlı optimizasyon yaklaşımı ile en uygun portföyü seçmiştir. Joshi ve Kumar (2014) bulanık entropi tanımlayarak bulanık TOPSIS ile portföyleri analiz etmişlerdir.

3. Yöntem

Portföy seçim sürecine karar vericinin düşünce ve varsayımlarını aktarmak önemli bir konu olup buradan oluşacak modele çözüm yönteminin uyarlanması ise uzmanlık gerektiren hassas bir iştir. Tablo 1'de portföy modellerinde kullanılan notasyon verilmiştir.

Tablo 1: **Portföy Modellerinde Kullanılan Notasyon**

Değişken	Değişken Açıklaması
W	hisse senedi ağırlık vektörü
M	hisse senedi ortalama getiri vektörü
R	hisse senedi getiri serileri
R_p	portföyün getiri oranı
$E(R_p)$	portföyün beklenen getiri oranı
σ_{ij}	j. ve i. hisse senetlerinin arasındaki kovaryans
V	hisse senetleri varyans kovaryans matrisi
$V(R_p)$	portföyün varyansı
S_{ijk}	i., j. ve k. hisse senetlerinin arasındaki çarpıklık parametresi
S	hisse senetleri ortak çarpıklık matrisi
$S(R_p)$	portföyün çarpıklığı
K_{ijkl}	i., j., k. ve l. hisse senetlerinin arasındaki basıklık parametresi
n	portföy seçiminde kullanılan hisse senedi sayısı
w_i, w_j, w_k, w_l	i., j., k. ve l. hisse senedinin portföydeki oranı
m_i, m_j, m_k, m_l	i., j., k. ve l. hisse senedinin ortalama getiri oranı
r_{it}	i. hisse senedinin t. periyottaki getiri oranı
R_i, R_j, R_k, R_l	i., j., k. ve l. hisse senedinin getiri oranı serileri
K	hisse senetleri ortak basıklık matrisi
$K(R_p)$	portföyün basıklığı
μ_i	i. hisse senedinin bulanık entropi üyelik değeri
1_N	n x1 boyutunda 1 lerden oluşan sütun vektörü

3.1. Portföy Optimizasyonu Amaç Fonksiyonları

Portföy beklenen getirisinin, bir başka adla portföy ortalamasının yatırımcının ihtiyaçları açısından maksimizasyonu amaçlanmakta ve Eşitlik 1'deki gibi hesaplanmaktadır (Pala ve Aksaraylı, 2016: 101).

$$R_{pe} = E(R_p) = W^T M = \sum_{i=1}^n w_i m_i \quad (1)$$

İstatistikte bir yayılım ölçüsü olan varyans portföyün riskini ölçmekte kullanılmaktadır. Portföy varyansı, minimizasyon yönlüdür ve Eşitlik 2'deki gibi hesaplanmaktadır (Pala ve Aksaraylı, 2016: 101);

$$V_p = V(R_p) = W^T V(W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2)$$

Üçüncü moment olan çarpıklık, portföyde yüksek kazanç olasılığını arttırmakta, bu nedenle maksimizasyonu amaçlanmakta ve Eşitlik 3'deki gibi hesaplanmaktadır (Pala ve Aksaraylı, 2016: 101);

$$S_p = S(R_p) = E(W^T (R - M))^3 = W^T S(W \otimes W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k S_{ijk} \quad (3)$$

Dördüncü moment olan basıklık, yüksek dalgalanma olasılığını arttırdığı için minimize edilmelidir. Portföy basıklığı Eşitlik 4'deki gibi hesaplanmaktadır (Pala ve Aksaraylı, 2016: 101);

$$K_p = K(R_p) = E(W^T (R - M))^4 = W^T K(W \otimes W \otimes W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_i w_j w_k w_l K_{ijkl} \quad (4)$$

Shannon (1948) çok sıklıkla kullanılan ve entropi fonksiyonlarının en popülerleri olan Shannon entropi hesaplanmasını Eşitlik 5'deki gibi formüle etmiştir;

$$E_s = - \sum_{i=1}^n w_i \ln w_i = -W^T (\ln W) \quad (5)$$

Yager (1995) kendi adını taşıyan ve mutlak değer hesaplanmasına dayanan entropi ölçütünün hesaplanmasını Eşitlik 6'daki gibi vermiştir;

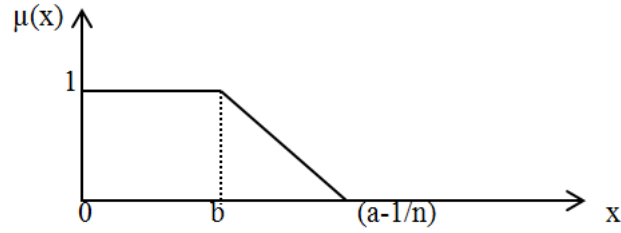
$$E_Y = - \sum_{i=1}^n \left| w_i - \frac{1}{n} \right| \quad (6)$$

Önerilen bulanık Yager entropi, her bir hisse senedinden elde edilen, bulanık üyelik fonksiyonu ile tanımlı bulanık üyelik değerlerinin toplamı olarak Eşitlik 7'deki gibi hesaplanmaktadır.

$$E_{BY} = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (7)$$

Şekil 1'deki gibi tanımlanmış olan sağa dayalı bulanık üyelik fonksiyonu ile ifade edilmiş $x = \left| w_i - \frac{1}{n} \right|$ olarak değer alan ve bulanık üyeliği $\mu(x) = \mu_i$ olan bulanık entropi fonksiyonun bulanık küme merkezi, b'ye kadar uzanmaktadır. Yayılımı ise b ile a-1/n aralığındadır. Parametreler b=(0,1) ve a=(0,1) aralığında karar verici tarafından tayin edilebilmektedir. Parametrelerin alabileceği değerler için koşul $0 \leq b \leq a-1/n \leq 1-1/n$ sağlanmalıdır.

Şekil 1: Bulanık Yager Entropi Fonksiyonunun Bulanık Sağa Dayalı Üyelik Fonksiyonu



Zimmermann (1978) tipi üyelik fonksiyonuna göre bulanık Yager entropi fonksiyonu Eşitlik 8'deki gibi tanımlanabilir;

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{ise } \left| w_i - \frac{1}{n} \right| \leq b \\ \frac{\left(a - \frac{1}{n} - \left| w_i - \frac{1}{n} \right| \right)}{a - \frac{1}{n} - b}, & \text{ise } a - \frac{1}{n} \geq \left| w_i - \frac{1}{n} \right| \geq b \\ 0, & \text{ise } \left| w_i - \frac{1}{n} \right| > a - \frac{1}{n} \end{cases} \quad (8)$$

3.2. Çok Amaçlı Portföy Optimizasyon Modelleri ve Ağırlıklı Toplam Yaklaşımı

OVÇBEM'de portföyün ortalaması, çarpıklığı ve entropisi maksimize edilirken aynı zamanda varyansı ve basıklığı minimize edilmeye çalışılır ve çok amaçlı optimizasyon probleminin matematiksel modeli P(1) adı ile Eşitlik 9'deki gibi kurulabilir.

$$P(1) \begin{cases} \text{Maks } W^T M \\ \text{Min } W^T V(W) \\ \text{Maks } W^T S(W \otimes W) \\ \text{Min } W^T K(W \otimes W \otimes W) \\ \text{Maks Entropy}(w) \\ \text{kisitlar; } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

ATY'ye göre çok amaçlı optimizasyon modelinin minimizasyon yönlü en basit hali Eşitlik 10'daki gibi formüle edilebilir;

$$\text{Min } F_T(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x) \quad (10)$$

Burada n adet F fonksiyonunun λ ile ağırlıklandırılmış toplamalarını minimize etmek esastır. ATY'yi Usta ve Kantar (2011) ortalama, varyans, çarpıklık ve entropiden oluşan fonksiyonlara sahip portföy optimizasyonu problemi için kullanmışlardır. ATY ile portföy optimizasyonu modeli oluşturmada hedef fonksiyonlarının farklı büyüklük ve aralıkta değer alabilmesinden dolayı aralık veya büyüklük değeri daha yüksek olan amaç fonksiyonları sonucu daha çok etkilemektedir. Bu problemi gidermek için her bir amaç fonksiyonu ideal hedef değerleri olan $R_{pe}^*, V_p^*, S_p^*, K_p^*, E_S^*$, E_Y^* ve E_{BY}^* ile bölünürse daha gerçekçi sonuçlar elde edilmiş olunur. Bu nedenle aşağıdaki yedi alt problem birbirinden bağımsız çözümlenerek optimum değerler elde edilir,

$$SP(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maks } R_{pe}^* = W^T M \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$SP(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } V_p^* = W^T V(W) \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

$$SP(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maks } S_p^* = W^T S(W \otimes W) \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

$$SP(4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } K_p^* = W^T K(W \otimes W \otimes W) \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$SP(5) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maks } E_S^* = -W^T (\ln W) \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$SP(6) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maks } E_Y^* = -\sum_{i=1}^n \left| w_i - \frac{1}{n} \right| \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ W \geq 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$SP(7) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maks } E_{BY}^* = \sum_{i=1}^n \mu_i \\ \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\ \left| w_i - \frac{1}{n} \right| + \mu_i \left(a - \frac{1}{n} - b \right) \leq a - \frac{1}{n} \\ \mu_i \leq 1 \\ W, \mu_i \geq 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

SP(7)'de daha önce tanımlanan bulanık üyelik fonksiyonu gereği n adet doğrusal olmayan kısıt bulunmaktadır. Model büyük ve karmaşık olduğunda çok sayıda doğrusal olmayan kısıtla çözüm elde etmek verimsiz olacağı için, mutlak değer fonksiyonundan yararlanılarak doğrusal olmayan kısıtlar doğrusal hale NSP(7)'de olduğu gibi dönüştürülmüştür,

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Maks } E_{BY}^* = \sum_{i=1}^n \mu_i \\
 \text{kst } W^T \mathbf{1}_N = 1 \\
 w_i - \frac{1}{n} + \mu_i \left(a - \frac{1}{n} - b \right) \leq a - \frac{1}{n} \\
 -w_i + \frac{1}{n} + \mu_i \left(a - \frac{1}{n} - b \right) \leq a - \frac{1}{n} \\
 \mu_i \leq 1 \\
 W, \mu_i \geq 0
 \end{array} \right\} \text{NSP(7)} \quad (18)$$

Alt problemler çözülerek her bir amaç fonksiyonu için ideal değerler elde edilmiştir. SP(6) çözümünde n'den bağımsız olarak çözüm değeri 0 olduğu için ATY'de Yager entropisi amaç fonksiyonu olarak kullanılmamıştır. Bu nedenle iki temel yaklaşım değerlendirilmiştir. Birinci yaklaşım olan ortalama varyans çarpıklık basıklık Shannon entropi modeli (OVÇBE_SM) aşağıdaki gibidir;

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Maks } \lambda_1 \left(\frac{W^T M}{R_{pe}^*} \right) - \lambda_2 \left(\frac{W^T V(W)}{V_p^*} \right) + \lambda_3 \left(\frac{W^T S(W \otimes W)}{S_p^*} \right) \\
 - \lambda_4 \left(\frac{W^T K(W \otimes W \otimes W)}{K_p^*} \right) - \lambda_5 \left(\frac{W^T (\ln W)}{E_S^*} \right) \\
 W^T \mathbf{1}_N = 1 \\
 W \geq 0
 \end{array} \right\} P(3) \quad (19)$$

İkinci yaklaşım ise ortalama varyans çarpıklık basıklık bulanık Yager entropi modeli (OVÇBE_{BY}M) aşağıdaki gibidir;

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Maks } \lambda_1 \left(\frac{W^T M}{R_{pe}^*} \right) - \lambda_2 \left(\frac{W^T V(W)}{V_p^*} \right) + \lambda_3 \left(\frac{W^T S(W \otimes W)}{S_p^*} \right) \\
 - \lambda_4 \left(\frac{W^T K(W \otimes W \otimes W)}{K_p^*} \right) + \lambda_5 \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{E_{BY}^*} \right) \\
 W^T \mathbf{1}_N = 1 \\
 w_i - \frac{1}{n} + \mu_i \left(a - \frac{1}{n} - b \right) \leq a - \frac{1}{n} \\
 -w_i + \frac{1}{n} + \mu_i \left(a - \frac{1}{n} - b \right) \leq a - \frac{1}{n} \\
 \mu_i \leq 1 \\
 W, \mu_i \geq 0
 \end{array} \right\} P(4) \quad (20)$$

OVÇBE_{S-BY}M ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$) modellerine toplamları 1 olacak şekilde farklı λ_i atanarak çok sayıda portföy modeli elde edilmiştir. Ağırlık katsayısı λ_i , kullanımına örnek olarak OVÇBE_{BY}M (1/4,1/4,1/4,1/4,0) modelinin dengeli OVÇBM modeline dönüşmesi ve μ_i içeren kısıtların modelden çıkarılması verilebilir. E_{BY} parametreleri "b" ve "a", sırasıyla 1/n ve 1 olarak modellerde kullanılmıştır. Gereksiz hisse senedinin portföye katılmamasının cezalandırılmasının önüne geçmek

adına “b” ilgili değeri almıştır. Hisse senedi oranlarında kısıtlamalara gidilmemesi için ise “a” ilgili değeri almıştır.

4. Uygulama

Önerilen portföy optimizasyon modellerinin etkinliğini test etmek için iki farklı ülke, Türkiye ve Amerika'nın hisse senedi piyasasından alınmış olan birer veri seti kullanılmıştır. Birincisi Türkiye’de faaliyet gösteren, Borsa İstanbul 30 (BİST 30) endeksinde Ocak 2005 - Aralık 2015 tarihleri arasında sürekli işlem görmüş 21 adet hisse senedinin aylık getiri serilerinden oluşmaktadır. Veriler BİST’in internet sitesinden alınmıştır. İkinci veri seti ise Amerikan hisse senedi piyasalarında işlem gören ve Kenneth-French’in internet sitesinde bulunan; Gıda, madencilik, petrol, tekstil, dayanıklı tüketim malzemeleri, kimya, dayanaksız tüketim malzemeleri, inşaat, çelik, imalat sanayi, iş ekipmanları, otomobil, ulaşım, yardımcı hizmetler, perakendecilik, finans ve diğerleri şeklinde adlandırılan on yedi sektörel portföyün Ocak 1970 ile Aralık 2015 aralığındaki getiri serileri olarak ele alınmıştır. Tüm verilere kar payları ve sermaye bölünmeleri eklenmiştir. Ayrıca karışıklık yaratmaması açısından bundan sonra sektörel portföyler sektör olarak adlandırılacaktır. Test periyodu olarak birinci veri seti için Ocak 2016 ile Kasım 2016 ikinci için ise Ocak 2016 ile Aralık 2016 aralığı aylık kapanış fiyatlarından elde edilen getiri serileri kullanılmıştır. Birinci veri setinde bulunan hisse senetlerine ait getiri serilerinin istatistik değerleri ve Jarque-Bera (JB) normallik testi sonuçları Tablo 2’deki gibidir. İstatistik değerler ve JB test sonuçları yüksek dereceden momentlerin portföy seçiminde kullanımını desteklemektedir. JB test sonuçlarından elde edilen P değerleri önem derecesi 14 hisse senedi için %5 in altında çıkmıştır. Bu da hisse senetlerinin getiri serilerinin normal dağılımı olduğunu göstermektedir.

Tablo 2: Veri Seti 1’in Özet İstatistikleri

HİSSE	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık	JB	P	DK
X1	0.0052	0.0143	0.7106	5.0648	34.2978	0.001	23.1823
X2	0.0113	0.0156	0.3922	4.878	22.6098	0.0022	11.0261
X3	0.0196	0.0242	-0.2843	3.0711	1.7929	0.3361	7.9483
X4	-0.0042	0.0175	-0.4717	5.8997	50.7521	0.001	31.3067
X5	-0.0015	0.0162	-0.876	4.2967	25.9324	0.0016	86.6134
X6	0.0035	0.0172	-0.5534	3.8172	10.3314	0.0148	37.9756
X7	0.0121	0.0091	-0.1432	3.5356	2.0137	0.2935	7.9184
X8	0.0108	0.0165	-0.1586	5.0733	24.0119	0.0019	11.9233
X9	0.0027	0.0134	-0.0259	3.7474	3.0634	0.151	42.5357
X10	0.0093	0.015	-0.0197	3.6046	2.0037	0.2954	13.1067
X11	0.0079	0.0195	-0.5958	4.7326	24.1369	0.0019	17.7878
X12	0.0287	0.0168	0.3929	4.7136	19.3984	0.0034	4.5262
X13	0.0066	0.0153	-2.1318	15.6071	966.7602	0.001	18.643
X14	0.0102	0.015	0.4774	4.4974	17.2158	0.0045	11.9988
X15	0.0067	0.0157	-0.6058	5.5239	42.7819	0.001	18.5485
X16	0.0036	0.0071	-0.0321	3.6983	2.6842	0.1899	23.2518
X17	0.0117	0.019	-1.0733	8.4946	189.9383	0.001	11.7451
X18	0.0223	0.0163	-0.1521	4.6483	15.3347	0.006	5.7262
X19	0.0155	0.0084	-0.1963	2.8406	0.9803	0.5	5.9218
X20	0.0154	0.012	0.0063	3.7812	3.3318	0.1296	7.1149
X21	0.0043	0.015	-0.401	6.0541	54.4231	0.001	28.3751

Yüksek dereceden momentlerin kullanıldığı modeller ile yapılan portföy seçim sürecine sadece normal dağılışa sahip olmayan 14 hisse senedi dahil edilerek modelin geçerliliği ve etkinliği artırılmıştır. Bu nedenle X3, X7, X9, X10, X16, X19 ve X20 araştırmada kullanılmamıştır. Hisse senetlerinin getiri serileri için hesaplanan standart sapmanın ortalama getiriye bölümü ile elde edilen değişkenlik katsayısı (DK) kullanılarak, X5’in birim başına en yüksek riske, X12’nin ise en düşük riske sahip olduğu ortaya konulmuştur. DK değerleri riskli hisse senetlerini gözlemlemek açısından karar vericiye ön bilgi sağlamaktadır.

Tablo 3: Veri Seti 2'nin Özet İstatistikleri

SEKTÖR	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık	JB	P	DK
X1	0.011	0.002	-0.225	8.04	588.78	0.001	4.15
X2	0.01	0.007	0.193	5.423	138.48	0.001	8.38
X3	0.011	0.007	-0.098	4.39	45.31	0.001	7.32
X4	0.01	0.004	0.304	7.867	553.25	0.001	6.7
X5	0.009	0.005	0.164	7.024	374.9	0.001	7.54
X6	0.012	0.004	-0.47	6.093	240.27	0.001	5.04
X7	0.015	0.005	0.011	5.221	113.47	0.001	4.44
X8	0.01	0.005	0.263	6.666	315.4	0.001	6.58
X9	0.01	0.005	-0.081	5.48	142.08	0.001	7.51
X10	0.012	0.004	-0.183	5.745	176.33	0.001	5.11
X11	0.013	0.006	0.042	4.904	83.57	0.001	5.94
X12	0.01	0.005	-0.012	6.488	279.9	0.001	7.36
X13	0.012	0.004	-0.216	5.689	170.62	0.001	5.29
X14	0.011	0.001	0.07	5.856	188.06	0.001	3.34
X15	0.01	0.004	0.187	7.6	489.94	0.001	6.37
X16	0.011	0.002	-0.26	6.58	301.05	0.001	4.41
X17	0.012	0.005	-0.003	5.71	168.93	0.001	5.82

İkinci veri setinde bulunan sektörlere ait getiri serilerinin istatistik değerleri ve Jarque-Bera (JB) normalite testi sonuçları Tablo 3'deki gibidir. İstatistik değerler ve JB test sonuçları yüksek dereceden momentlerin portföy seçiminde kullanımını desteklemektedir. JB test sonuçlarından elde edilen P değerleri önem derecesi 17 sektör için %5 in altında çıkmıştır. Bu da sektörlerin getiri serilerinin normal dağılmadığını göstermektedir. Yüksek dereceden momentlerin kullanıldığı modeller ile yapılan portföy seçim sürecine tüm sektörler dahil edilerek modelin geçerliliği ve etkinliği artırılmıştır. Sektörlerin getiri serileri için değişkenlik katsayısı (DK) kullanılarak, X2'in birim başına en yüksek riske, X14'ün ise en düşük riske sahip olduğu ortaya konulmuştur. DK değerleri riskli sektörleri gözlemlemek açısından karar vericiye ön bilgi sağlamaktadır. ATY ile optimizasyon sürecinde, her bir amaç fonksiyonunun ideal hedef değerleri doğrusal ve doğrusal olmayan çözüm yöntemleri ile elde edilmiştir. Her iki veri seti için, amaç fonksiyonlarının ideal değerleri Tablo 4'deki gibidir.

Tablo 4: Amaç Fonksiyonları İçin İdeal Hedef Değerler

Hedefler	O*	V*	Ç*	B*	E _S *	E _{BY} *
Veri Seti 1	0.028675	0.006855	0.001197	0.000139	2.639057	14
Veri Seti 2	0.015098	0.001258	8.92556E-05	1.00515E-05	2.833213	17

İdeal değerler P(3) ve P(4)'de kullanılarak her bir amaç fonksiyonu normalize edilmiş ve portföy modelleri farklı λ_i değerlerine göre türetilmiştir. Dengeli portföy modellerinde herhangi λ_i eğer 0 değerini alırsa ilgili amaç fonksiyonu modelin amaç ve kısıtlarından çıkartılmış ve diğerleri modelde eşit ağırlık değeri almışlardır. Dengeli modellerinin kullanımına dair örnek olarak $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 1/2$ ve diğerleri 0 değerini aldığı anda portföy modeli tipik OVM olmuştur. Ağırlıklı modellerde ise λ_i modellerde ortalama ve çarpıklık amaç fonksiyonları varyans, basıklık ve entropi fonksiyonlarına göre iki kat daha ağırlıklı ele alındığında model agresif sayılmıştır. Agresif model örneği olarak $\lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/3$ ve diğerleri 0 değerini aldığı anda model tipik agresif OVM halini almıştır. Muhafazakar yaklaşımlı modellerde λ_i varyans, basıklık ve entropi fonksiyonları, ortalama ve çarpıklık amaç fonksiyonlarına göre iki kat daha ağırlıklı ele alınmıştır. Muhafazakar model örneği olarak $\lambda_1 = 1/3, \lambda_2 = 2/3$ ve diğerleri 0 değerini aldığı anda model tipik muhafazakar OVM halini almıştır. Eşit hisse senedi ağırlıklarından oluşan Eşit Ağırlıklı Model (EAM) karşılaştırma için tercih edilmiştir. Tablo 5'de veri seti 1 için elde edilmiş tüm modellerin çözüm sonucunda ortaya çıkan

amaç fonksiyon değerleri verilmiştir. Dengeli modeller (B), agresif modeller (A) ve muhafazakar modeller (C) ile ifade edilmiştir.

Tablo 5: Veri Seti 1 Portföy Model Sonuçları

Portföyler	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık	SHANNON	YAGER	B. YAGER
EAM	0.008824	0.007947	-0.0001	0.00021	2.639057	0	14
OVM(B)	0.016071	0.007781	-0.00028	0.000199	1.701223	-1.14026	13.6716
OVÇM(B)	0.013865	0.007778	-8.4E-05	0.000202	1.656557	-1.17333	13.67334
OVÇBM(B)	0.009636	0.007011	-0.00014	0.000145	1.830319	-1.10635	13.76166
OE _s M(B)	0.016893	0.008897	-0.0003	0.000296	2.243648	-0.69135	13.76338
OVE _s M(B)	0.012466	0.007525	-0.00022	0.000193	2.453127	-0.50702	13.91166
OVÇE _s M(B)	0.010702	0.007655	-9.7E-05	0.000193	2.517143	-0.43205	13.99728
OVÇBE _s M(B)	0.0089	0.007064	-0.00015	0.000149	2.334579	-0.68765	13.912
OE _{BY} M(B)	0.028675	0.016845	0.000849	0.001317	1.25E-06	-1.85714	13
OVE _{BY} M(B)	0.016003	0.007777	-0.00028	0.0002	1.753804	-1.09629	13.72218
OVÇE _{BY} M(B)	0.013394	0.00767	-8.6E-05	0.000194	1.710681	-1.14285	13.74639
OVÇBE _{BY} M(B)	0.009399	0.006997	-0.00014	0.000144	1.872159	-1.06299	13.79257
OVM(A)	0.021185	0.009565	-0.00038	0.000334	1.345212	-1.28571	13.4851
OVÇM(A)	0.006432	0.012954	0.00107	0.00081	0.565721	-1.71429	13.16667
OVÇBM(A)	0.011204	0.007154	-0.00013	0.000155	1.678798	-1.23843	13.67896
OE _s M(A)	0.024223	0.011776	-0.00028	0.000553	1.266295	-1.39071	13.35542
OVE _s M(A)	0.016628	0.008309	-0.0003	0.000248	2.18372	-0.76094	13.7725
OVÇE _s M(A)	0.008938	0.012038	0.000794	0.000627	1.282901	-1.44161	13.40906
OVÇBE _s M(A)	0.010236	0.00719	-0.00013	0.000157	2.280493	-0.77221	13.90109
OE _{BY} M(A)	0.028675	0.016845	0.000849	0.001317	7.75E-07	-1.85714	13
OVE _{BY} M(A)	0.020629	0.009309	-0.00036	0.000312	1.383424	-1.28571	13.5241
OVÇE _{BY} M(A)	0.006432	0.012954	0.00107	0.00081	0.565737	-1.71428	13.16663
OVÇBE _{BY} M(A)	0.011086	0.007145	-0.00013	0.000154	1.768629	-1.18282	13.71811
OVM(C)	0.012142	0.007106	-0.00022	0.000161	1.862461	-1.04376	13.72264
OVÇM(C)	0.011553	0.007183	-0.00013	0.00016	1.766565	-1.15102	13.71754
OVÇBM(C)	0.008437	0.00693	-0.00015	0.000141	1.930564	-0.98605	13.82447
OE _s M(C)	0.012457	0.008213	-0.00018	0.000238	2.551456	-0.30357	13.97481
OVE _s M(C)	0.010291	0.007317	-0.00019	0.000177	2.523217	-0.40565	13.98031
OVÇE _s M(C)	0.009605	0.007384	-0.00014	0.000177	2.551983	-0.37265	14
OVÇBE _s M(C)	0.008136	0.00702	-0.00016	0.000147	2.340328	-0.6535	13.90952
OE _{BY} M(C)	0.028675	0.016845	0.000849	0.001317	3.68E-06	-1.85714	13
OVE _{BY} M(C)	0.011676	0.007067	-0.00022	0.000161	1.964328	-0.95273	13.78979
OVÇE _{BY} M(C)	0.011113	0.007141	-0.00013	0.00016	1.939259	-0.99805	13.81316
OVÇBE _{BY} M(C)	0.008203	0.006924	-0.00015	0.000141	1.970724	-0.95478	13.85316

Veri seti 1'in sonuçlarına bakıldığında, EAM, OVM(B), OVÇM(B) ve OVÇBM(B) amaç fonksiyon değerleri açısından kıyaslandığında, OVM(B) en büyük ortalamaya sahiptir. Diğer amaç fonksiyonları açısından ise, OVÇBM(B) varyans ve basıklık, EAM entropi değerleri, OVÇM(B) çarpıklık açısından daha iyi sonuç vermiştir. Shannon entropili modeller kıyaslandığında, OE_sM(B) en iyi ortalama, OVÇBE_sM(B) en iyi varyans ve basıklık değerlerine sahip iken OVÇE_sM(B) entropi ve çarpıklık açısından önde gelmektedir. Bulanık Yager entropili modellerde ise, OE_{BY}M(B) en iyi çarpıklık ve ortalamaya sahip iken diğerlerinde OVÇBE_{BY}M(B) önde gelmektedir.

OVM(B), OVE_sM(B) ve OVE_{BY}M(B) veri seti 1'deki modeller açısından karşılaştırıldığında birincisi ortalama açısından en iyi iken OVE_sM(B) diğer amaç fonksiyonlarında önde gelmektedir. OVE_{BY}M(B), OVM(B)'ye göre daha iyi entropi değerine sahip iken diğer tüm amaç fonksiyon

değerleri birbirine benzerdir. Karşılaştırmalar çarpıklık eklenmiş, OVÇM(B), OVÇEsM(B) ve OVÇE_{BY}M(B) modelleri arasında yapıldığında da benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır. Basıklık eklenmiş, OVÇBM(B), OVÇBE_SM(B), OVÇBE_{BY}M(B) modellerinin karşılaştırılmasında da sonuçlar benzer yorumlanabilir durumdadır. Sonuç olarak veri seti 1 için entropili modellerin yüksek dereceleri momentlerle uyum içinde tutarlı sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Veri seti 1 için agresif model sonuçları incelendiğinde, OE_{BY}M(A) en yüksek ortalamaya sahip iken, OVÇBE_{BY}M(A) en düşük varyans ve basıklığa, OVÇE_{BY}M(A) ve OVÇM(A) en iyi çarpıklığa, OVÇBE_SM(A) ise en iyi entropi değerine sahiptir. Veri seti 1 için muhafazakar modellerde OE_{BY}M(C) en iyi ortalama ve çarpıklığa, OVÇBE_{BY}M(C) en iyi varyansa, OVÇBE_{BY}M(C) ve OVÇBM(C) en iyi basıklık değerine sahip iken OVÇEsM(C) en iyi entropi değerine sahiptir.

Veri seti 2 için model sonuçları Tablo 6'daki gibidir. Veri seti 2'nin sonuçlarına bakıldığında, EAM, OVM(B), OVÇM(B) ve OVÇBM(B) amaç fonksiyon değerleri açısından kıyaslandığında, EAM en iyi ortalama ve entropiye, OVM(B) en düşük varyansa, OVÇM(B) en iyi çarpıklığa sahip iken OVÇBM(B) en düşük basıklığa sahiptir. Shannon entropili modeller kıyaslandığında, OE_SM(B) en iyi ortalama ve entropiye, OVÇBE_SM(B) ise geri kalan amaç fonksiyonlarında en iyi değerler sahiptir. Bulanık Yager entropili modellerde ise, OE_{BY}M(B) en iyi ortalamaya, OVE_{BY}M(B) en iyi varyans ve entropiye sahip iken diğerlerinde OVÇBE_{BY}M(B) önde gelmektedir.

OVM(B), OVE_SM(B) ve OVE_{BY}M(B) veri seti 2'deki modeller açısından karşılaştırıldığında ikincisi ortalama ve entropi açısından en iyi iken OVE_{BY}M(B) en iyi varyans değerine sahip olup OVM(B) ile benzer çarpıklık ve basıklık değerine erişmiş ve entropi açısından daha iyi değerler elde etmiştir. Karşılaştırmalar, çarpıklık eklenmiş, OVÇM(B), OVÇEsM(B), OVÇE_{BY}M(B) modelleri arasında yapıldığında da benzer sonuçlar ortaya çıkmıştır. Basıklık eklenmiş, OVÇBM(B), OVÇBE_SM(B), OVÇBE_{BY}M(B) modellerinin karşılaştırılmasında da sonuçlar benzer yorumlanabilir durumdadır. Sonuç olarak veri seti 2 için bulanık entropili modellerin entropili ve entropisiz yüksek dereceleri momentli modeller arasındaki boşluğu doldurduğu gözlenmiştir.

Veri seti 2 için agresif model sonuçları incelendiğinde, OE_{BY}M(A) en yüksek ortalama ve çarpıklığa sahip iken, OVÇBE_SM(A) en düşük varyans, OVÇBE_{BY}M(A) ve OBVÇM(A) en iyi basıklığa, OE_SM(A) ise en iyi entropi değerine sahiptir. Veri seti 2 için muhafazakar modellerde OE_{BY}M(C) en iyi ortalama ve çarpıklığa, OVM(C) en iyi varyansa, OVÇBE_{BY}M(C) ve OVÇBM(C) en iyi basıklık değerine sahip iken OE_SM(C) en iyi entropi değerine sahiptir.

Portföy modellerini gerçek finansal performansları açısından test etmek amaçlı veri seti 1 için Ocak 2016 - Kasım 2016 tarihleri arasındaki veri seti 2 için ise Ocak 2016 – Aralık 2016 tarihleri arasındaki hisselerin aylık kapanış fiyatları kullanılmıştır. Portföy modellerine barındırdıkları hisse senedi ağırlıkları oranında ilgili fiyat değişimleri yansıtılarak her bir portföy modelinin test dönemindeki getiri serileri, getiri ortalamaları, getiri standart sapmaları elde edilmiştir. Bu değerler ile portföylerin gerçek performanslarını daha iyi kıyaslamak adına Sharpe Oranı (SO) kullanılmıştır. Portföy performanslarını değerlendirmek için sıklıkla kullanılan SO aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Caporin vd., 2014: 3);

$$SO = \frac{E(R_p)}{\sqrt{\sigma^2(R_p)}} \quad (21)$$

$E(R_p)$ ve $\sqrt{\sigma^2(R_p)}$ test periyodunda gerçekleşen ortalama portföy getirisi ve standart sapması olarak ifade edilebilir. Bir portföyün test periyodunda elde ettiği ortalama getiri ve getirinin standart sapması ile hesaplanan SO değeri ne kadar yüksek olursa ilgili portföyün performansı o kadar iyidir. Bu durumda portföy, piyasa değeri olarak ele alınan EAM karşılaştırma portföyünden daha iyi SO değerine sahip ise finansal açıdan başarılıdır denebilir (Küçükbay ve Araz, 2016: 127; Usta ve Kantar, 2011: 124).

Tablo 6: Veri Seti 2 Portföy Model Sonuçları

Portföyler	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık	SHANNON	YAGER	B. YAGER
EAM	0.011045	0.003249	-5.2E-05	6.7E-05	2.833213	0	17
OVM(B)	0.010927	0.001259	-2.4E-06	1.05E-05	0.52177	-1.76471	16.13333
OVÇM(B)	0.010847	0.001291	2.73E-06	1.05E-05	0.352849	-1.75602	16.11839
OVÇBM(B)	0.010856	0.00128	1.47E-06	1.01E-05	0.281904	-1.76471	16.09212
OE _S M(B)	0.011488	0.003256	-5.7E-05	6.47E-05	2.789603	-0.21537	16.99621
OVE _S M(B)	0.011098	0.001501	-1.3E-05	1.58E-05	1.677952	-1.21691	16.48682
OVÇE _S M(B)	0.011	0.001382	-5.9E-06	1.35E-05	1.322887	-1.36653	16.37177
OVÇBE _S M(B)	0.010907	0.001276	-1.2E-06	1.06E-05	0.711391	-1.61383	16.21371
OE _{BY} M(B)	0.015098	0.004515	3.33E-06	0.000106	3.55E-06	-1.88235	16
OVE _{BY} M(B)	0.010925	0.00126	-2.2E-06	1.05E-05	0.590197	-1.72798	16.15414
OVÇE _{BY} M(B)	0.010858	0.001286	2.22E-06	1.06E-05	0.434868	-1.72721	16.1445
OVÇBE _{BY} M(B)	0.010861	0.001277	1.22E-06	1.01E-05	0.304652	-1.76471	16.10303
OVM(A)	0.011064	0.001279	-3E-06	1.09E-05	0.633605	-1.69488	16.1729
OVÇM(A)	0.010878	0.001298	2.89E-06	1.05E-05	0.31401	-1.7453	16.09319
OVÇBM(A)	0.010838	0.001294	2.28E-06	1.01E-05	0.193258	-1.7859	16.05466
OE _S M(A)	0.012069	0.003332	-6.2E-05	6.45E-05	2.623707	-0.45923	16.87712
OVE _S M(A)	0.011231	0.00152	-1.4E-05	1.62E-05	1.683165	-1.19292	16.49983
OVÇE _S M(A)	0.011023	0.00134	-2.4E-06	1.24E-05	1.064718	-1.44775	16.29476
OVÇBE _S M(A)	0.010909	0.001277	1.68E-07	1.06E-05	0.625261	-1.61647	16.18107
OE _{BY} M(A)	0.015098	0.004515	3.33E-06	0.000106	2.07E-06	-1.88235	16
OVE _{BY} M(A)	0.011164	0.001297	-3E-06	1.12E-05	0.665352	-1.64706	16.20352
OVÇE _{BY} M(A)	0.010876	0.001295	2.77E-06	1.05E-05	0.348405	-1.7488	16.11113
OVÇBE _{BY} M(A)	0.010843	0.00129	2.08E-06	1.01E-05	0.218469	-1.76847	16.06453
OVM(C)	0.010923	0.001258	-2.2E-06	1.04E-05	0.51215	-1.76471	16.13333
OVÇM(C)	0.010885	0.001265	6.4E-08	1.02E-05	0.465079	-1.73033	16.15281
OVÇBM(C)	0.010866	0.001274	9.75E-07	1.01E-05	0.325705	-1.76471	16.11365
OE _S M(C)	0.01125	0.003245	-5.5E-05	6.56E-05	2.823343	-0.10413	17
OVE _S M(C)	0.011042	0.001496	-1.3E-05	1.58E-05	1.673044	-1.22471	16.48268
OVÇE _S M(C)	0.010993	0.001424	-8.7E-06	1.44E-05	1.484646	-1.30993	16.42438
OVÇBE _S M(C)	0.010906	0.001278	-2E-06	1.07E-05	0.76423	-1.60467	16.22402
OE _{BY} M(C)	0.015098	0.004515	3.33E-06	0.000106	2.76E-06	-1.88235	16
OVE _{BY} M(C)	0.010921	0.00126	-2E-06	1.05E-05	0.588419	-1.72156	16.15778
OVÇE _{BY} M(C)	0.010891	0.001266	-4.5E-08	1.04E-05	0.550205	-1.6676	16.18835
OVÇBE _{BY} M(C)	0.010871	0.001271	7.05E-07	1.01E-05	0.34723	-1.76471	16.12505

Veri seti 1 için elde edilen tüm modellerin realize edilmiş Ocak 2016 - Kasım 2016 arasındaki aylık getiri performanslarının getiri ortalamaları, standart sapmaları ve SO değerleri ile Ek 1'dedir. Dengeli modeller kıyaslandığında OE_{BY}M(B) en iyi ortalama getiriye en kötü standart sapma ile sahip olmuştur. EAM, OVM(B), OVÇM(B) ve OVÇBM(B) realize edilmiş getiriler için kıyaslandığında OVM(B) en iyi ortalama getiriye ve en iyi 2. standart sapmaya sahiptir. OVE_{BY}M(B) daha kötü ortalama getiriye daha iyi standart sapma ile sahip iken, OVE_SM(B) en kötü sonuçlara sahiptir. Çarpıklık eklendiğinde, OVÇM(B) çarpıklıklı modellerde en iyi değerlere sahiptir. Basıklık eklendiğinde genel olarak performanslar artmıştır.

SO sonuçlarına bakıldığında veri seti 1 için tüm dengeli modeller EAM'a göre daha iyi sonuç vermişler, tek istisna ise OVÇE_{BY}M(B) olmuştur. Genel olarak dengeli modellerde bulanık Yager entropili modeller Shannon entropili modellere göre daha iyi SO değeri elde etmiştir. Agresif modellerde OE_{BY}M(A) en yüksek ortalama getiriye sahip iken OVE_SM(A) en düşük standart sapmaya

sahiptir. Muhafazakar modellerde ise $OE_{BYM}(C)$ en iyi ortalama getiriye sahip iken $OE_S(M)(C)$ en düşük standart sapmaya sahip olmuştur.

Veri seti 2 için elde edilen tüm modellerin realize edilmiş Ocak 2016 - Aralık 2016 arasındaki aylık getiri performanslarının getiri ortalamaları, standart sapmaları ve SO değerleri ile Ek 2'dedir. Dengeli modeller kıyaslandığında $OVÇM(B)$ en iyi ortalama getiriye sahip olmuştur. $OVE_{BYM}(B)$ ikinci en iyi ortalama getiriye daha iyi standart sapma ile sahip olmuştur. EAM, $OVM(B)$, $OVÇM(B)$ ve $OVÇBM(B)$ realize edilmiş getiriler için kıyaslandığında $OVÇM(B)$ en iyi ortalama getiriye ve standart sapmaya sahiptir. Basıklık eklendiğinde $OVÇBM(B)$ en iyi ortalama getiriye sahip iken, $OVÇBE_{BYM}(B)$ ikinci en iyi ortalama getiriye daha iyi standart sapma ile sahip olmuştur. Sonuçlardan görüleceği gibi çarpıklık içeren modeller daha iyi performans göstermişlerdir.

SO sonuçlarına bakıldığında veri seti 2 için tüm dengeli modeller EAM'a göre daha iyi sonuç vermişler, istisnalar ise $OE_{BYM}(B)$ ve $OE_S(M)(B)$ olmuştur. Agresif modellerde dört tanesi en yüksek ortalama getiriye sahip iken aralarından en düşük standart sapmaya sahip olanı bir başka tanımla en büyük SO değerine sahip olanı $OVÇE_{BYM}(A)$ olmuştur. $OVE_S(M)(A)$ en düşük standart sapmaya sahiptir. Muhafazakar modellerde ise $OVÇBE_S(M)(C)$ en iyi SO değerine sahip iken $OVÇE_S(M)(C)$ en düşük standart sapmaya sahip olmuştur. Yüksek dereceden momentler ve bulanık entropili modellerin kullanımı ile genel olarak daha iyi SO değerleri elde edilmiştir.

5. Sonuç

Portföy optimizasyon sürecinin, çelişen hedefler ve gelecekteki piyasa fiyatlarının belirsizliği gibi birçok dezavantajı ve riski vardır. Bu problemleri çözmek için, portföy modelleri esnekliğe sahip olmalı, model amaçları bulanıklık içerebilmeli ve aynı zamanda amaçlar aralarında bir uyum olacak şekilde tasarlanmalıdır. Yüksek dereceden moment içeren portföy modelleri bulanık entropi ile esneklik ve bulanık bir yapı kazanmıştır. Önerilen bulanık Yager entropisi, Shannon entropisi gibi diğer amaç değerlerini dramatik bir şekilde düşürmemekle birlikte OVM , $OVÇM$ ve $OVÇBM$ 'ye çeşitlilik sağlamaktadır. İki farklı veri kümesinin kullanılması ile, bulanık Yager entropi fonksiyonunun yüksek dereceli momentler içeren portföy seçim konseptinde Shannon entropisine göre daha tutarlı olduğunu fakat daha az çeşitlilik sağladığı belirlenmiştir. Test performansından görülebileceği üzere, yüksek dereceden momentleri içeren modeller oturmuş piyasalara sahip veri seti 2'de, veri seti 1'e göre daha iyi performans göstermiştir. İki veri kümesinin sonuçlarında görüldüğü gibi bulanık Yager entropisi, modellere esneklik, bulanıklık ve çeşitlilik kazandırmada başarılı olmuştur. Gelecekteki çalışmalarda, karar vericiler tarafından belirlenebilen, çeşitli kısıtlamalar altında farklı seçim yöntemleri ile portföy seçimini iyileştirmek için farklı bulanık entropiler tanımlanabilir ve portföy seçiminde yeni yaklaşımlar geliştirilebilir.

Kaynakça

- Aracioglu, B., Demircan, F. ve Soyuer, H. (2011). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in Istanbul Stock Exchange. *Ege Akademik Bakis*, 11, 9-17.
- Arditti, F. D., ve Levy, H. (1975). Portfolio Efficiency Analysis in Three Moments: The Multiperiod Case. *The Journal of Finance*, 30(3), 797-809.
- Bera, A. K., ve Park, S. Y. (2008). Optimal Portfolio Diversification Using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484-512.
- BIST web site. Available online: <https://datastore.borsaistanbul.com/> (accessed on 17 March 2016)
- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., ve Prakash, A. J. (1997). Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets. *Journal of Banking & Finance*, 21(2), 143-167.
- De Luca, A., ve Termini, S. (1972). A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. *Information and control*, 20(4), 301-312.

- DeMiguel, V., Garlappi, L., ve Uppal, R. (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915-1953.
- Harvey, C. R., Liechty, J. C., Liechty, M. W., ve Müller, P. (2010). Portfolio Selection with Higher Moments. *Quantitative Finance*, 10(5), 469-485.
- Huang, X. (2012). An Entropy Method for Diversified Fuzzy Portfolio Selection. *International Journal of Fuzzy Systems*, 14(1), 160-165.
- Jana, P., Roy, T. K., ve Mazumder, S. K. (2007). Multi-Objective Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Optimization. *Advanced Modeling and Optimization*, 9(1), 181-193.
- Joshi, D., ve Kumar, S. (2014). Intuitionistic Fuzzy Entropy and Distance Measure Based TOPSIS Method for Multi-Criteria Decision Making. *Egyptian informatics journal*, 15(2), 97-104.
- Jurczenko, E., Maillat, B. B., ve Merlin, P. (2005). Hedge Funds Portfolio Selection with Higher-Order Moments: A Non-Parametric Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Efficient Frontier. Available at SSRN 676904.
- Kemalbay, G., Özkut, C. M., ve Franko, C. (2011). Portfolio Selection with Higher Moments: A Polynomial Goal Programming Approach to ISE-30 index. *Ekonometri ve İstatistik Dergisi*, (13), 41-61.
- Kenneth French's website. Available online: <http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/index.html> (accessed on 1 August 2016)
- Konno, H., ve Suzuki, K. I. (1995). A Mean-Variance-Skewness Portfolio Optimization Model. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 38(2), 173-187.
- Kosko, B. (1986). Fuzzy Entropy and Conditioning. *Information Sciences*, 40(2), 165-174.
- Lai, K. K., Yu, L., ve Wang, S. (2006, June). Mean-Variance-Skewness-Kurtosis-Based Portfolio Optimization. In *Computer and Computational Sciences, 2006. IMSCCS'06. First International Multi-Symposiums on* (Vol. 2, pp. 292-297). IEEE.
- Levy, H. (1974). The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment. *The American Economic Review*, 64(3), 434-441.
- Liu, S. Y. W. S., Wang, S. Y., ve Qiu, W. 2. (2003). Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs. *International Journal of Systems Science*, 34(4), 255-262.
- Maringer, D., ve Parpas, P. (2009). Global Optimization of Higher Order Moments in Portfolio Selection. *Journal of Global Optimization*, 43(2-3), 219-230.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. M. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *The Journal of Finance*, 46(2), 469-477.
- Mhiri, M., ve Prigent, J. L. (2010). International Portfolio Optimization with Higher Moments. *International Journal of Economics and Finance*, 2(5), 157.
- Qin, Z., Li, X., ve Ji, X. (2009). Portfolio Selection based on Fuzzy Cross-Entropy. *Journal of Computational and Applied mathematics*, 228(1), 139-149.
- Pala, O., ve Aksaraylı, M. (2016). Bulanik Hedef Programlama Tabanlı Yüksek Dereceden Momentlerle Bist 30 Endeksinde Portföy Seçimi. *Sosyal Bilimler Metinleri Dergisi*. (ICOME16, Özel Sayı) 98-113.
- Samuelson, P. A. (1970). The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments. *The Review of Economic Studies*, 37(4), 537-542.

- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System. Technical. Journal.* 27, 379-423.
- Simkowitz, M. A., ve Beedles, W. L. (1978). Diversification in a Three-Moment World. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(05), 927-941.
- Singleton, J. C., ve Wingender, J. (1986). Skewness Persistence in Common Stock Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(03), 335-341.
- Steinbach, M. C. (2001). Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. *SIAM Review*, 43(1), 31-85.
- Usta, I., ve Kantar, Y. M. (2011). Mean-Variance-Skewness-Entropy Measures: A Multi-Objective Approach for Portfolio Selection. *Entropy*, 13(1), 117-133.
- Wang, S., ve Xia, Y. (2012). *Portfolio Selection and Asset Pricing* (Vol. 514). Springer Science & Business Media.
- Yager, R. R. (1995). Measures of Entropy and Fuzziness Related to Aggregation Operators. *Information Sciences*, 82(3-4), 147-166.
- Yu, J. R., Lee, W. Y., ve Chiou, W. J. P. (2014). Diversified Portfolios with Different Entropy Measures. *Applied Mathematics and Computation*, 241, 47-63.
- Zhou, R., Cai, R., ve Tong, G. (2013). Applications of Entropy in Finance: A Review. *Entropy*, 15(11), 4909-4931.
- Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy Programming and Linear Programming with several Objective Functions. *Fuzzy sets and systems*, 1(1), 45-55.

EKLER

Ek 1: Veri Seti 1 Modelleri İçin Realize Edilmiş Aylık Getiri Oranları

Portföyler	Ortalama	Standart Sapma	SO
EWM	0.007	0.051	0.138
MVM(B)	0.014	0.054	0.256
MVSM(B)	0.011	0.060	0.182
MVSKM(B)	0.009	0.058	0.157
MESM(B)	0.014	0.047	0.290
MVESM(B)	0.010	0.049	0.210
MVSESM(B)	0.007	0.051	0.143
MVSKESM(B)	0.008	0.055	0.154
MEFYM(B)	0.039	0.092	0.421
MVEFYM(B)	0.013	0.052	0.254
MVSEFYM(B)	0.007	0.062	0.113
MVSKEFYM(B)	0.009	0.057	0.150
MVM(A)	0.020	0.055	0.366
MVSM(A)	-0.004	0.071	-0.058
MVSKM(A)	0.010	0.056	0.174
ME _s M(A)	0.026	0.063	0.416
MVE _s M(A)	0.014	0.049	0.277
MVSE _s M(A)	-0.013	0.094	-0.143
MVSKES _s M(A)	0.008	0.054	0.149
ME _F Y _M (A)	0.039	0.092	0.421
MVE _F Y _M (A)	0.019	0.055	0.347
MVSE _F Y _M (A)	-0.004	0.071	-0.058
MVSKE _F Y _M (A)	0.009	0.055	0.158
MVM(C)	0.011	0.055	0.210
MVSM(C)	0.011	0.056	0.197

MVSKM(C)	0.009	0.058	0.148
ME _S M(C)	0.009	0.047	0.184
MVE _S M(C)	0.009	0.051	0.184
MVSE _S M(C)	0.009	0.052	0.166
MVSKE _S M(C)	0.009	0.056	0.154
ME _{FY} M(C)	0.039	0.092	0.421
MVE _{FY} M(C)	0.011	0.052	0.210
MVSE _{FY} M(C)	0.009	0.057	0.155
MVSKE _{FY} M(C)	0.008	0.058	0.143

Ek 2: Veri Seti 2 Modelleri İçin Realize Edilmiş Aylık Getiri Oranları

Portföyler	Ortalama	Standart Sapma	SO
EWM	0.0140	0.0373	0.376
MVM(B)	0.0151	0.0339	0.445
MVSM(B)	0.0173	0.0310	0.557
MVSKM(B)	0.0165	0.0358	0.462
MESM(B)	0.0130	0.0351	0.371
MVESM(B)	0.0151	0.0246	0.612
MVSESM(B)	0.0153	0.0261	0.588
MVSKE _S M(B)	0.0162	0.0315	0.515
ME _{FY} M(B)	-0.0007	0.0289	-0.024
MVE _{FY} M(B)	0.0152	0.0330	0.461
MVSE _{FY} M(B)	0.0171	0.0304	0.564
MVSKE _{FY} M(B)	0.0164	0.0356	0.461
MVM(A)	0.015	0.033	0.441
MVSM(A)	0.017	0.032	0.531
MVSKM(A)	0.017	0.036	0.465
ME _S M(A)	0.011	0.033	0.349
MVE _S M(A)	0.015	0.024	0.601
MVSE _S M(A)	0.016	0.027	0.574
MVSKE _S M(A)	0.016	0.032	0.514
ME _{FY} M(A)	-0.001	0.029	-0.024
MVE _{FY} M(A)	0.015	0.033	0.439
MVSE _{FY} M(A)	0.017	0.031	0.547
MVSKE _{FY} M(A)	0.017	0.036	0.465
MVM(C)	0.015	0.034	0.446
MVSM(C)	0.016	0.034	0.470
MVSKM(C)	0.016	0.036	0.460
ME _S M(C)	0.014	0.036	0.375
MVE _S M(C)	0.015	0.025	0.616
MVSE _S M(C)	0.015	0.025	0.601
MVSKE _S M(C)	0.016	0.031	0.518
ME _{FY} M(C)	-0.001	0.029	-0.024
MVE _{FY} M(C)	0.015	0.033	0.465
MVSE _{FY} M(C)	0.016	0.032	0.498
MVSKE _{FY} M(C)	0.016	0.035	0.459

PORTFOLIO OPTIMIZATION BASED ON HIGHER ORDER MOMENTS AND FUZZY ENTROPY

Extended Abstract

Aim: The problem of portfolio selection is an important issue in finance and can be defined as the selection of an optimal portfolio from a range of risky assets, within the constraints and targets set by the investors' strategies. Markowitz has introduced a new model called the mean variance model for stock diversification with the Modern Portfolio Theory, which focuses mainly on the portfolio mean and variance. The effectiveness of the mean variance model, which is based on the assumption that historical returns are normally distributed, falls when the return series of stock are not normally distributed. To increase the efficiency of the model and transfer the distribution of the return series to the models, higher moments can be added. Another problem that the mean variance model and its variants face is the corner solutions that the models often produce. Entropy function is used to prevent accumulation in certain stocks and to increase natural diversity. Entropy functions can produce results that dominate other objectives. In the study, a new mean variance skewness kurtosis fuzzy entropy portfolio selection model with a new fuzzy entropy is proposed to overcome the problems mentioned and experiments were conducted on the two actual data sets to present the effectiveness of the proposed model with using various portfolio objectives and the preferences of decision. Entropy and fuzzy entropy were compared in terms of portfolio models with higher moments as the objective function in the test periods.

Method(s): In the study, a new fuzzy entropy is defined to obtain effective results, and a new mean variance skewness fuzzy entropy portfolio selection model is proposed. With the weighted additive approach for portfolio optimization, nonlinear programming method was used, mean variance skewness kurtosis entropy models and mean variance skewness kurtosis and fuzzy entropy models for different investment types were solved and the results were compared in terms of performance measures in the test period for both of them and all models are coded in the MATLAB.

Findings: For both data sets used in the study, the objective function values obtained in the fuzzy entropy models are similar to the non entropy models, but the entropy values are higher. In the Shannon entropy models, higher entropy values were achieved, but the other objective function values were provided by dramatic losses. Models were created for different types of investors, and similar results were obtained, resulting in fuzzy entropy flexibility. The proposed fuzzy Yager entropy provides diversity in the models, while not dramatically reducing other objective values such as Shannon entropy. Using two different sets of data, it was determined that the fuzzy Yager entropy function is more consistent but yielded less diversified portfolios than the Shannon entropy in the portfolio selection concept with higher order moments models. In the test performance, models with higher order moments have performed better in the data set 2 than the data set 1.

Conclusion: Process of portfolio optimization has many risks such as uncertainty of future market prices of the stocks. To solve the problems, the portfolio models should have flexibility and the objectives of the model should be fuzzy, and at the same time the goals should be designed to be a fit between them. Portfolio models with higher order of moments have acquired flexibility and fuzzy structure with adding to them the fuzzy Yager entropy. When the results of two sets of data are evaluated, fuzzy Yager entropy has succeeded in achieving flexibility, fuzziness and diversity in the models in combination with the other objective functions such as higher order moments. In future works there are plenty of room for examining the entropies in the portfolio selection.

