BAZI CENTRO-POLYHEDRAL GRUPLARIN PELL UZUNLUKLARI

Ömür DEVECİ[1], Hasan ÖZTÜRK[1]

[1]Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi-36100/Kars

e-mail: odeveci36@hotmail.com

Abstract

In [13], Deveci and Karaduman defined the Pell orbit $P_A(G)$ of the group $G=\langle A\rangle$ by generated the set $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. In this paper, we examined the Pell orbits of the centro-polyhedral groups $\langle n,-2,2\rangle$, $\langle -n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,-2\rangle$, $\langle 2,-n,2\rangle$, $\langle -2,n,2\rangle$, $\langle 2,2,-n\rangle$, $\langle 2,-2,n\rangle$ for $n\geq 3$ and the centro-polyhedral groups $\langle -2,2,3\rangle$ $\langle -2,2,4\rangle$, $\langle -2,2,5\rangle$, $\langle -2,2,6\rangle$, $\langle 3,2,-2\rangle$, $\langle 4,2,-2\rangle$, $\langle 5,2,-2\rangle$, $\langle 6,2,-2\rangle$ with respect to the generating set $\{x,y,z\}$ and the order x,y,z of generators.

2000 Mathematics Subject Classification: 11K31, 20F05, 20D60

Keywords: Pell Series, Group, Lenght

Giriş

Bilindiği gibi lineer indirgemeli dizilere, matematik, fizik, bilgisayar bilimleri sanat ve doğa bilimleri gibi modern bilimin bir çok alanında rastlanmaktadır. Bunlara örnek olarak [5,6,15-23,26,28-35,37] çalışmaları verilebilir. Gruplarda indirgemeli diziler, ilk olarak 1960 da Wall [36] tarafından çalışılmıştır. Wall bu çalışmasında, devirli gruplarda standart Fibonacci dizilerinin periyotlarını incelemiştir. Sonraki süreçte, bir çok bilim adamı teoriyi çeşitli indirmeli dizilere taşımıştır. Bunlara örnek olarak [1-3,7-12,14,24,25,27] çalışmaları verilebilir.

$\{P_n\}$ Pell dizisi, $P_0=0, P_1=1$ başlangıç elemanları ile $n\geq 1$ için

$$P_{n+1}=2P_n+P_{n-1} \tag{1}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Pell dizisi

$$1,2,5,12,29,70,169,\cdots$$

şeklinde meydana gelir.

Kılıç ve Taşçı [34]'de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell sayılarının k dizilerini,

$1-k\leq n\leq 0$ için

This Project was supported by the Commission for the Scientific Research Projects of Kafkas University. The Project number. 2013-FEF-72

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 1\text{-}i, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

Başlangıç elemanları ile, $n > 0$ ve $1 \leq \mathrm{i} \leq k$ için

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + ... + P_{n-k}^i, \tag{2}$$

bağıntısı ile tanımlamışlardır. Burada P_n^i, *i*. dizinin *n*. terimidir. (2) de $i = k$ olarak alınırsa P_n^k ifadesi genelleştirilmiş k-mertebeden Pell sayısı olarak adlandırılır. $k = 2$ olarak alınırsa $\left\{P_n^k\right\}$ dizisi standart $\left\{P_n\right\}$ Pell dizisine indirgenir.

Tanım 1.1. Eğer bir dizi belli bir noktadan sonra bir alt dizinin tekrarı şeklinde meydana geliyorsa bu diziye periyodiktir denir. Örneğin; $a,b,c,d,e,c,d,e,c,d,e,\cdots$ dizisi periyodiktir ve peryodu 3 tür.

Deveci ve Karaduman [11]'de $\left\{P_n^k\right\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisini *m* modulüne göre indirgeyerek, $P_i^{k,m} = P_n^k \left(\mathrm{mod}\, m\right)$ olmak üzere

$$\left\{P^{k,m}\right\} = \left\{P_1^{k,m}, P_2^{k,m}, \cdots, P_n^{k,m}, \cdots\right\}$$

dizisini elde etmiş ve bu dizinin periyodik olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmada $\left\{P^{k,m}\right\}$ dizisinin periyodu $hP_k\left(m\right)$ ile gösterilmiştir.

Deveci ve Karaduman aynı çalışmada, sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

Sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ grubun üreteçleri olmak üzere, bu üreteçler dizinin başlangıç elemanları olarak kabul edilerek $n \geq j$ için dizinin elemanları,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots \left(x_{n-1}\right)^2; \; j \leq n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots \left(x_{n-1}\right)^2; \; n \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanır.

Ayrıca, dizinin $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubun üreteçleri olması gerekir ve bundan dolayı sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ tarafından üretilen sonlu bir gruptaki bir genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi $Q_k\left(G; x_0, \cdots, x_{j-1}\right)$ ile gösterilir.

Theorem 1.1 (Deveci ve Karaduman [13]). Sonlu bir gruptaki bir genelleştirilmiş *k*-mertebeden Pell dizisi periyodiktir.

Bu çalışmada, $Q_k\left(G;x_0,\cdots,x_{j-1}\right)$ dizisinin peirodu $PQ_k\left(G;x_0,\cdots,x_{j-1}\right)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 1.2. $l,m,n>1$ için (l,m,n) polyhedral grubu aşağıdaki gibi taktim edlir

$$\left\langle x,y,z : x^l = y^m = z^n = xyz = 1\right\rangle.$$

(l,m,n) polyhedral grubunun sonlu olması için gerek ve yeter şart $\mu = lmn\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right) = mn+nl+lm-lmn$ olmak üzere $\mu>0$ olmasıdır. (l,m,n) polyhedral grubunun mertebesi $2lmn/\mu$ dir.

Tanım 1.3. $l,m,n\in\mathbb{Z}$ için $\langle l,m,n\rangle$ centro-polyhedral grubu aşağıdaki gibi taktim edlir

$$\left\langle x,y,z : x^l = y^m = z^n = xyz\right\rangle.$$

Bu gruplar için detaylı bilgi [2,4] çalışmalarında bulunabilir.

Tanım 1.3 (Deveci ve Karaduman [13]). $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ olmak üzere A kümesi tarafından üretilen $G=\langle A\rangle$ grubunun $P_A^{(\alpha)}(G)$ genelleştirilmiş Pell orbiti G nin elemanlarının aşağıdaki gibi tanımlanan $\{x_i\}$ dizisidir:

$0\le i\le n-1$ için $x_i=a_{i+1}$ başlangıç eleman ile $i\ge 0$ için $x_{i+n}=(x_i)^{\beta_{n-1}}(x_{i+1})^{\beta_{n-2}}\cdots(x_{i+n-2})^{\beta_1}(x_{i+n-1})^{(\alpha+1)}$ olup burada $1\le j\le n-1$ olacak şekilde $\beta_j=\binom{\alpha+j}{j+1}$ dir.

$P_A^{(\alpha)}(G)$ dizisi periyodik olup bu dizinin periyodunun uzunluğu $LEN_A P^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilmiştir.

Burada $\alpha=1$ olarak alınırsa $P_A^{(\alpha)}(G)$ dizisi $P_A(G)$ dizisine indirgenir ve $P_A(G)$ dizisine G grubunun A geren kümesine göre Pell orbiti denir. $LEN_A P(G)$ ifadesine ise G grubunun A geren kümesine göre Pell uzunluğu denir.

Dikkat edilirse bir grubun Pell orbiti, geren sayısı basamak sayısı olarak alınan genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisidir. Dolayısıyla Pell orbiti periyodiktir ve bu peryot $PQ_n\left(G;a_1,\cdots,a_n\right)$ değerine eşittir.

Yukarıdaki tanımlardan açıkca görülür ki; sonlu bir grubun gerek Pell orbitinin uzunluğu gerekse bu gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu seçilen geren kümesine ve bunun üzerinden seçilecek başlangıç elemanlarının dizilişine bağlı olarak değişir.

Temel Sonuçlar ve İspatlar

Teorem 2.1. G, $\langle -n,2,2\rangle, \langle -2,n,2\rangle, \langle 2,2,-n\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu

$$LEN_{(x,y,z)}P(G)=\begin{cases} 7n, & n \text{ çift ise,} \\ 14n, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. İspatı $\langle -n,2,2\rangle$ grubu için yapacağız. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^{-n}=y^2=z^2=xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|x|=2n$ ve $|y|=|z|=4$ dür.

n nin durumuna göre $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti için aşağıdaki iki durum söz konusudur:

Eğer n sayısının tek çarpanı var ise, $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti

$$\begin{aligned}
&x_0=x,\ x_1=y,\ x_2=z,\cdots,\\
&x_{14}=x^5,\ x_{15}=x^{\alpha_1}z,\ x_{16}=x^{\alpha_2}z,\cdots,\\
&x_{28}=x^9,\ x_{29}=x^{\alpha_1+2\lambda_1}z,\ x_{30}=x^{\alpha_2+2\lambda_2}z,\cdots,\\
&x_{14+14i}=x^{5+4i},\ x_{15+14i}=x^{\alpha_1+2i\lambda_1}z,\ x_{16+14i}=x^{\alpha_2+2i\lambda_2}z,\cdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\alpha_1,\alpha_2\in N$ ve λ_1 ve λ_2 ya 1 yada 2 dir. Bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{14+14i}=x_{14},\ x_{15+14i}=x_{15},\ x_{16+14i}=x_{16}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olcaktır. Dolayısıyla $2nk=4i$ $(k\in N)$ yani $nk=2i$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir.

Eğer n çift ise $i=\frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle)=14\frac{n}{2}=7n$ olur.

Eğer n tek ise $i=n$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle)=14n$ olur.

Eğer $n=2^u, (u\in N)$ şeklinde ise, $P_{(x,y,z)}(\langle -n,2,2\rangle)$ orbiti

$$x_0 = x,\, x_1 = y,\, x_2 = z, \cdots,$$
$$x_{14} = x^5,\, x_{15} = y,\, x_{16} = z, \cdots,$$
$$x_{28} = x^9,\, x_{29} = y,\, x_{30} = z, \cdots,$$
$$x_{14i} = x^{1+4i},\, x_{14i+1} = y,\, x_{14i+2} = z, \cdots$$

şeklinde olup bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{14i} = x_0 = x,\, x_{14i+1} = x_1 = y,\, x_{14i+2} = x_2 = z$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belilemek yeterli olcaktır. Dolayısıyla $2nk = 4i$ $(k \in N)$ yani $nk = 2i$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir. n çift olduğundan $i = \frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal olup $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -n,2,2\rangle) = 14\frac{n}{2} = 7n$ olur.

$\langle -2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,-n\rangle$ grupları için ispat benzer şekildedir.

Teorem 2.2. G**,** $\langle 2,-n,2\rangle$ gurubu olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu 14 dür yani

$$LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-n,2\rangle) = 14$$

şeklindedir.

İspat. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^2 = y^{-n} = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|y| = 2n$ ve $|x| = |z| = 4$ dür .

n'nin tüm değerleri için grubun oluşturduğu Pell dizisi

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = x^3, x_5 = x^2, x_6 = y, x_7 = x^3, x_8 = y, x_9 = z^3, x_{10} = z, x_{11} = x, x_{12} = x^2,$$
$$x_{13} = y, x_{14} = x, x_{15} = y, x_{16} = z, \cdots$$

şeklinde olup bu dizinin periyodunun uzunluğu 14 olur.

Teorem 2.3. G**,** $\langle 2,-2,n\rangle$, veya $\langle n,-2,2\rangle$ centro-polyhedral gruplarından herhangi birisi olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x, y, z sıralamasına göre Pell uzunluğu

$$LEN_{(x,y,z)}P(G) = \begin{cases} \frac{n}{2} hP_3(4(n-1)), & n \text{ çift ise,} \\ nhP_3(4(n-1)), & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspatı $\langle 2,-2,n\rangle$ grubu için yapacağız. Hemen belirtelim ki, bu grup $\langle x,y,z : x^2 = y^{-2} = z^n = xyz\rangle$ şeklinde takdim edilir ve $|x| = |y| = 4(n-1)$ ve $|z| = 2n(n-1)$ dir. n nin durumuna göre $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti için aşağıdaki iki durum söz konusudur:

Eğer n sayısının tek çarpanı var ise, $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z, \cdots,\\
&x_{hP_3(4(n-1))} = xz^8,\ x_{hP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha},\ x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,\\
&x_{2hP_3(4(n-1))} = xz^{16},\ x_{2hP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha+(n+1)\lambda},\ x_{2hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,\\
&x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))} = xz^{8i+8},\ x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+1} = xz^{\alpha+(n+1)i\lambda},\ x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olup burada $\alpha, \lambda \in N$ dir. Bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirmek için $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))} = x_{hP_3(4(n-1))}$, $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+1} = x_{hP_3(4(n-1))+1}$, $x_{hP_3(4(n-1))+ihP_3(4(n-1))+2} = x_{hP_3(4(n-1))+2}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olcaktır. Dolayısıyla $2n(n-1)k_1 = (n+1)i$ ve $n(n-1)k_2 = 4i$ $(k \in N)$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir.

Eğer n çift ise $i = \frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından

$LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle) = \frac{n}{2}hP_3(4(n-1))$ olur.

Eğer n tek ise $i = n$ bu şartı sağlayan en küçük doğal sayı olacağından $LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle) = nhP_3(4(n-1))$ olur.

Eğer $n = 2^u, (u \in N)$ şeklinde ise, $P_{(x,y,z)}(\langle 2,-2,n\rangle)$ orbiti

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z, \cdots,\\
&x_{hP_3(4(n-1))} = x,\ x_{hP_3(4(n-1))+1} = yz^{4(n-1)},\ x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,\\
&x_{2hP_3(4(n-1))} = x,\ x_{hP_3(4(n-1))+1} = yz^{8(n-1)},\ x_{hP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots,\\
&x_{ihP_3(4(n-1))} = x,\ x_{ihP_3(4(n-1))+1} = yz^{4(n-1)i},\ x_{ihP_3(4(n-1))+2} = z, \cdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olup bu dizinin periyodunun uzunluğunu belirlemek için $x_{hP_3(4(n-1))i} = x_0 = x$, $x_{hP_3(4(n-1))i+1} = x_1 = y$, $x_{hP_3(4(n-1))i+2} = x_2 = z$ olacak şekilde en küçük i doğal sayını belirlemek yeterli olcaktır. Dolayısıyla $2n(n-1)k = 4(n-1)i$ $(k \in N)$ yani $nk = 2i$

olacak şekilde en küçük i doğal sayını bulmamız gerekmektedir. n çift olduğundan $i=\frac{n}{2}$ bu şartı sağlayan en küçük doğal olup $LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,-2,n\rangle)=\frac{n}{2}hP_3(4(n-1))$ olur.

Varsayım 2.1. G**,** $\langle 2,n,-2\rangle$ gurubu olsun. Bu durumda G grubunun $\{x,y,z\}$ geren kümesine ve geren elemanların x,y,z sıralamasına göre Pell uzunluğu $hP_3(4(n-1))$ dir yani

$$LEN_{(x,y,z)}P(\langle 2,n,-2\rangle)=hP_3(4(n-1))$$

şeklindedir.

Lemma 2.1.i. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,3\rangle)=LEN_{(x,y,z)}P(\langle 3,2,-2\rangle)=84$**.**

ii. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,4\rangle)=LEN_{(x,y,z)}P(\langle 4,2,-2\rangle)=28$**.**

iii. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,5\rangle)=LEN_{(x,y,z)}P(\langle 5,2,-2\rangle)=280$**.**

iv. $LEN_{(x,y,z)}P(\langle -2,2,6\rangle)=LEN_{(x,y,z)}P(\langle 6,2,-2\rangle)=168$**.**

İspat. İspat Teorem 2.2 nin ispatına benzer olarak direk hesaplama ile yapılır.

Kaynaklar

1. Aydın, H. and Dikici, R., *The Fibonacci Quart.*, 36(3), 1998, 216-221.

2. Campbell, C. M., Campbell, P. P., *J. Appl. Math. Comput.*, 19, 2005, 231-240.

3. Campbell, C. M., Doostie, H. and Robertson, E. F., *Kluwer Academic Publishers,* 1990, 27-35.

4. Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J., Generator and relations for discrete groups, 3 rd edition, Springer, Berlin, 1972.

5. Becker, P. G., *J. Number Theory,* 49(3), 1994, 269-286.

6. Bosma W. and Kraaikamp, C., *J. Number Theory,* 34(3), 1990, 251-270.

7. Deveci O. and Karaduman, E., *J. Appl. Math.,* 464580-1-464580-15, 2012.

8. Deveci, O., *Chiang Mai J. Sci.,* 40(1), 2013, 89-98.

9. Deveci O. and Karaduman, E., *Discrete Dyn. Nat. Soc.,* 2011, 639476-1-639476-13.

10. Deveci O. and Karaduman, E., *Linear Algebra and its Appl.,* 437, 2012, 2538-2545.

11. Deveci O. and Karaduman, E., The Pell sequences in finite groups, Util. Math., to appear.

12. Deveci, O., The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups, Util. Math., to appear.

13. Deveci O. and Karaduman, E., Requrrence Sequence İn Groups, LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2013

14. Doostie H. and Hashemi, M., *J. Appl. Math. Comput.* 20, 2006, 171-180.

15. El Naschie, M.S., *Solitons & Fractals*, 26, 2005, 1-6.

16. El Naschie, M.S., *Solitons & Fractals*, 24, 2005, 941-946.

17. Falcon S. and Plaza, A., *Solitons and Fractals,* 41, 2009, 497-504.

18. Fraenkel A.S. and Klein, S. T., *Discrete Appl. Math.*, 64, 1996, 31-55.

19. Gogin N.D. and Myllari, A.A., *published in Programmirovanie,* 33(2), 2007, 74-79.

20. Kalman, D., *The Fibonacci Quart.,* 20(1), 1982, 73-76.

21. Kaluge, G. R., *Makalah IF 3058 Kriptografi-Sem*. II Tahun 2010/2011.

22. Kılıç E. and Stakhov, A.P., *Solitons and Fractals,* 40, 2009, 2210-2221.

23. Kirchoof, B.K., Rutishauser, R., *Bot Gazette*, 151(1), 1990, 88-105.

24. Knox, S.W., *The Fibonacci Quart.,* 30(2), 1992, 116-120.

25. Lü K. and Wang, J., *Util. Math.*, 71, 2007, 169-178.

26. Mandelbaum, D. M., *IEEE Transactions on Information Theory,* 1972, 281-285.

27. Ozkan, E., Aydin H. and Dikici, R., *Appl. Math. and Compt.,* 143, 2003, 165-172.

28. Pinch, R.E.G., Recurrent sequences modulo prime Powers, In M. Ganley (ed.) Crptography and Coding III, IMA Conference Series (ns.) vol.45, Inst. Math. And Its Appl., Oxford university Press 1993, Procedings, 3rd IMA, Conference Crptography and Coding, Cirencester December 1991.

29. Spinadel, V.W.,The family of metallic means, Vis Math., 1(3), 1999.

30. Spinadel, V.W., *Int. Math. J.*, 2(3), 2002, 279-288.

31. Stakhov, A.P., *Rep. Natl. Acad. Sci.,* Ukraine, 9, 1999, 46-49.

32. Stakhov A.P. and Rozin, B., *Chaos, Solitons and Fractals*, 27, 2006, 1162-1167.

33. Syein, W., *Int. J. Plant Sci*., 154(2), 1993, 229-263.

34. Taşçı D. and Kılıç, E., *Appl. Math. Comput*. 20, 2006, 171-180.

35. Tuğlu, N., Kocer E.G. and Stakhov, A.P., *Appl. Math. and Compt.*, 155, 2004, 637-641.

36. Wall, D.D., *Amer. Math. Monthly*, 67, 1960, 525-532.

37. Yılmaz, F. and Bozkurt, D., *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4(34), 2009, 1685-1694.