Black Sea Journal of Engineering and Science
doi: 10.34248/bsengineering.1569433

Open Access Journal
e-ISSN: 2619 – 8991

Araştırma Makalesi (Research Article)
Cilt 8 - Sayı 1: 128-131 / Ocak 2025
(Volume 8 - Issue 1: 128-131 / January 2025)

OYUN TEORİSİNDE DENETİM AMAÇLI BİR DEĞERİN AKSİYOMATİK KARAKTERİZASYONU

Mahmut Sami ÖZTÜRK[1]*

[1]Süleyman Demirel University, Faculty of Economics and Administrative Sciences, Department of Business Administration, 32200, Isparta, Türkiye

Özet: Bu çalışmanın amacı adalet aksiyomunun kullanılması neticesinde işbirlikçi oyun teorisindeki etkili çözümlerden biri olan Shapley değerinin yeni bir karakterizasyonun elde edilmesidir. Adalet aksiyomu, iki oyuncunun kazançlarının aynı oranda değişmesini gerektirmektedir. Adalet aksiyomu kaynakların dağıtılması konusunda ve karar alma aşamalarında eşitlik, hakkaniyet ve adalet prensiplerini dikkate aldığı için denetim açısından önem taşımaktadır. Oyun teorisi bünyesinde denetim ise oyun teorisinin kontrol mekanizmasını oluşturmakta ve sistemlerin etkinliğini artırılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Çalışmada adalet aksiyomlarının yanı sıra kazanç-kayıp aksiyomu ve null oyuncu özelliği ile Shapley değeri yeniden tanımlanmaktadır. Shapley değerini aksiyomatik karakterize etmek için çeşitli önermeler kullanılmakta ve ana teorem ispatları yapılarak aksiyomatik karakterizasyon neticelendirilmektedir.

Anahtar kelimeler: Shapley değeri, İşbirlikçi oyunlar, Aksiyomatik karakterizasyon, Adalet aksiyomu, Kazanç-kayıp aksiyomu, Denetim

The Axiomatic Characterization of a Value for Audit Purpose in Game Theory

Abstract: The aim of this study is to obtain a new characterization of the Shapley value, one of the effective solutions in cooperative game theory, using the fairness axiom. The axiom of fairness requires that the payoffs of two players change at the same rate. The axiom of justice is important in terms of auditing as it considers the principles of equality, fairness and justice in the distribution of resources and decision-making stages. Audit within game theory constitutes the control mechanism of game theory and plays an important role in increasing the effectiveness of systems. In the study, in addition to the justice axioms, the gain-loss axiom and the Shapley value with the null player property are redefined. Various propositions are used to axiomatically characterize the Shapley value, and the axiomatic characterization is concluded by proving the main theorem.

Keywords: Shapley value, Cooperative games, Axiomatic characterization, Fairness axiom, Gain-loss axiom, Audit

***Sorumlu yazar (Corresponding author):** Süleyman Demirel University, Faculty of Economics and Administrative Sciences, Department of Business Administration, 32200, Isparta, Türkiye
E mail: samiozturk@sdu.edu.tr (M.S. ÖZTÜRK)
Mahmut Sami ÖZTÜRK https://orcid.org/0000-0002-7657-3150

Gönderi: 17 Ekim 2024 **Received:** October 17, 2024
Kabul: 28 Kasım 2024 **Accepted:** November 28, 2024
Yayınlanma: 15 Ocak 2025 **Published:** January 15, 2025

Cite as: Öztürk MS. 2025. The axiomatic characterization of a value for audit purpose in game theory. BSJ Eng Sci, 8(1): 128-131.

1. Giriş

Oyun teorisi, iş birliği ve çatışma modelleriyle ilgilenen matematiksel bir teori olarak tanımlanır (Ergüneş Berkin vd., 2022). Bilindiği üzere matematik biliminin mühendislik, ekonomi, işletme, muhasebe, denetim ve sosyal bilimler başta olmak üzere birçok alanda uygulaması bulunmaktadır. Oyun teorisi başlıca işbirlikçi olmayan ve işbirlikçi olmak üzere iki kısma ayrılmaktadır. Bu çalışmada işbirlikçi oyun teorisi ele alınmaktadır.

İşbirlikçi oyunlar oyuncuların oluşturdukları koalisyonlarla ilgilenmektedir. İşbirlikçi oyun teorisi koalisyonlar oluşturulduğunda, kazanç ve kaybın oyuncular arasında paylaştırılması problemini çözmeye çalışmaktadır. Bu sorunun cevabı işbirlikçi oyun teorisindeki çözüm kavramları ile yanıtlanmıştır. İşbirlikçi oyun teorisindeki çözüm kavramlarından bazıları tek nokta çözümleri olup bunların en kullanışlı olanı Shapley değeridir (Shapley, 1953).

Shapley değeri, işbirlikçi oyun teorisinin en önemli tek nokta çözümlerinden biridir. Bu değeri, (Shapley, 1953) verimlilik, toplamsallık, simetri ve null oyuncu aksiyomlarını kullanılarak karakterize etmiştir. Aksiyomatik karakterizasyon, bir çözümü farklı aksiyomlar kullanarak yeniden tanımlamak anlamına gelmektedir.

Literatürde konu ile ilgili aksiyomatik karakterizasyon üzerine çeşitli çalışmalar bulunmaktadır (Ekici vd., 2018; Palancı vd., 2021; Ekici, 2023, Ekici, 2024).

Young (1985), verimlilik, simetri ve güçlü monotonluk özelliğini kullanarak; Chun (1991), stratejik denklik adını verdiği farklı bir aksiyom kullanarak; van den Brink (2001), adalet özelliğini kullanarak; Casajus (2011), diferansiyel marjinaliti özelliğini kullanarak; Casajus (2014), verimlilik ve toplamsallık şartını kullanmadan Shapley değerini karakterize etmişlerdir.

Verimlilik aksiyomu, oyuncuların ödemelerinin toplamının büyük koalisyonun ödemesine eşit olması

This work is licensed (CC BY-NC 4.0) under Creative Commons Attribution 4.0 International License

olarak tanımlanmaktadır. Null oyuncu aksiyomu, null oyuncunun girdiği oyunda oyuna herhangi bir katkı vermediği anlamına gelmektedir. Diferansiyel marjinaliti aksiyomu, iki oyuncunun ödeme farkının yalnızca onların marjinal katkılarının farkı ile belirlendiğini göstermektedir. Bu makalede, oyun teorisinde denetimin uygulanması amacıyla bu aksiyomları kullanarak Shapley değerini aksiyomatik olarak karakterize edilmiştir.

Bu çalışmada, Kısım 2'de işbirlikçi oyun teorisindeki önemli kavramlar ve Shapley değerini aksiyomatik olarak karakterize etmek için kullanılan aksiyomlar verilmiştir. Kısım 3'te Shapley değerini aksiyomatik karakterize etmek için kullanılan önermeler ve ana teorem ispatları yer almaktadır. Son kısımda, makalenin sonuçları yeniden hatırlatılmış ve gelecek çalışmalarda ne yapılacağına yer verilmiştir.

2. Materyal ve Yöntem

Bu bölümde işbirlikçi oyun teorisindeki bazı önemli kavramlarından bahsedeceğiz (Tijs, 2003).

$N = \{1, 2, \ldots, n$ oyuncuların kümesi ve $w: 2^N \to \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyon olmak üzere, işbirlikçi bir oyun $\langle N, w \rangle$ ifadesi ile gösterilmektedir. N nin alt kümelerin oluşan 2^N kümesi her alt kümesi koalisyon olarak isimlendirilmektedir. Tüm işbirlikçi oyuncuların kümesi G^N ile gösterilmektedir. Bu çalışmada, S koalisyonunun eleman sayısı $|S|$ yerine $|s|$ ifadesi kullanılacaktır.

Şimdi, tek nokta çözümlerinden biri olan Shapley değerinin tanımı yeniden hatırlatılacaktır. İşbirlikçi oyun teorisinde tek nokta çözümleri $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ dönüşümü ile gösterilmektedir.

Tanım: $v \in G^N$ oyununun Shapley değeri,

$$\Phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

olmak üzere (eşitlik 1)

$$\Phi_i(w) = \sum_{i \in S} \frac{\Delta_w(S)}{s} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, $S \subset N$ için

$$\Delta_w(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t}\, w(T)$$

kar payı olarak isimlendirilir ve (Harsanyi, 1959) tarafından bulunmuştur.

G^N kümesi bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı olup bu vektör uzayının bir tabanı olan $T \subset N$ için u_T oybirliği oyunu

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & , \quad T \subset S \; ise \\ 0 & , \quad aksi \; halde \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $\forall w \in G^N$ oyunu

$$w = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \Delta_w\,(S) u_T$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, tek nokta çözümleri için bilinen bazı temel aksiyomlardan bahsedilecektir.

Aksiyom 1 (Verimlilik): Her $w \in G^N$ için

$$\sum_{i \in N} g_i\,(w) = w(N)$$

dir.

Her $S \subset N$ için

$$w(S) = w(S \backslash \{i\})$$

ise $i \in N$ oyuncusuna $w \in G^N$ oyununda bir null oyuncu denir.

Aksiyom 2 (Kazanç-kayıp)

$$w(N) = v(N)$$

ve

$$g_i(w) > g_i(v)$$

olacak şekilde, her $w, v \in G^N$ için

$$g_j(w) < g_j(v)$$

olmasını sağlayan en az bir $j \in N$ vardır.

Aksiyom 3 (Toplamsallık): $\forall w, v \in G^N$ için,

$$g_i(w + v) = g_i(w) + g_i(v)$$

dur.

Aksiyom 4 (Null oyuncu özelliği): Eğer $i \in N$, $w \in G^N$ oyununda bir null oyuncu ise

$$g_i(w) = 0$$

dır.

Her $S \subset N \backslash \{i, j\}$ için

$$w(S \cup \{i\}) = w(S \cup \{i\})$$

ise $i, j \in N$ oyuncularına simetrik oyuncular denir.

Aksiyom 5 (Simetri): Eğer, $i, j \in N$, $w \in G^N$ oyununda simetrik oyuncular ise

$$g_i(w) = g_j(w)$$

Aksiyom 6 (Adalet): Eğer, $i, j \in N$, $v \in G^N$ oyununda simetrik oyuncular ise

$$g_i(w + v) - g_i(w) = g_j(w + v) - g_j(w)$$

dir (van den Brink, 2001).

3. Bulgular

Bu bölümde, ilk olarak Shapley değerinin aksiyomatik karakterizasyonunda kullanılacak olan önermeler ispatları ile birlikte verilmiştir.

Önerme 1: $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağlarsa, adalet aksiyomunu da sağlar.

İspat: $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağlasın.

Eğer $i, j \in N$ oyuncuları $v \in G^N$ de simetrik oyuncular ise, $\forall w \in G^N$ için (eşitlik 2)

$$\begin{aligned} g_i(w + v) - g_i(w) &= g_i(w) + g_i(v) - g_i(w) \\ &= g_i(v) = g_j(v) \\ &= g_j(v) + g_j(w) - g_j(w) \\ &= g_i(w + v) - g_j(w) \end{aligned} \tag{2}$$

olup adalet aksiyomu sağlanır.

Önerme 2: $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağlarsa, simetri aksiyomunu da sağlar.

İspat: $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağlasın. Her $S \subset N$ olmak üzere $w_0(S) = 0$ olarak verilen $w_0 \in G^N$ null oyunu için, null oyuncu özelliği her $i \in N$ için $g_i(v_0) = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $i, j \in N$ oyuncuları $w \in G^N$ de simetrik oyuncular ise adalet aksiyomu ve w_0 durumu dikkate alındığında,

$$g_i(w) = g_i(w_0 + w) - g_i(w_0) = g_j(w_0 + w) - g_j(w_0) = g_j(w)$$

olup g çözümü simetri özelliğini sağlar.

Adalet aksiyomu ile diferansiyel marjinaliti aksiyomunun eşit olduğu ve birbiri yerine kullanılabildiğini (Casajus, 2011) göstermiştir. Bundan dolayı, Shapley değeri için aksiyomatik karakterizasyonda diferansiyel marjinaliti aksiyomu yerine adalet aksiyomu kullanılacaktır. Şimdi, bu çalışmanın ana teoremini ifade edelim.

Teorem: $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümünün kazanç-kayıp aksiyomu, null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağlaması için gerek ve yeter şart g çözümünün Shapley değerine eşit olmasıdır.

İspat: Shapley değerinin kazanç-kayıp aksiyomu ve null oyuncu özelliğini sağladığı iyi bilinmektedir. Önerme 1'den, Shapley değeri simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağladığı için adalet aksiyomunu da sağlar.

Şimdi $g : G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümünün kazanç-kayıp aksiyomu, null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağladığını varsayalım.

Eğer $|N| = 1$ ise, null oyuncu özelliğinden $g = \Phi$ dir.

Şimdi $|N| > 1$ olsun. $v \in G^N$ için

$$S_1(v) := \{S \subseteq N \,|\, |S| > 1 \; ve \; \Delta_v(T) \neq 0\} \tag{3}$$

kümesini tanımlayalım.

Her $v \in G^N$ ve $S \in S_1(v)$ için,

$$v^S = v - \Delta_v(T) \cdot \left(u_S - |S|^{-1} \cdot \sum_{i \in S} u_{\{i\}}\right) \tag{4}$$

biçiminde veriliyor.

Bu denklem, her $i, j \in S$ ve her $i, j \in N \backslash S$ için adalet aksiyomunun sağlandığını yani

$$g_i(v + v^S) - g_i(v) = g_j(v + v^S) - g_j(w) \tag{5}$$

olmasını gerektirir.

Şimdi $|S_1(v)|$ üzerinden tümevarım yaparak $g = \Phi$ olduğunu göstereceğiz.

Tümevarım Esası: Eğer $|S_1(v)| = 0$ ise null oyuncu özelliğinden $g = \Phi$ dir.

$|S_1(v)| = 1$ yani $|S_1(v)| = \{S\}$ olması $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ve $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in N$ için

$$v = \lambda \cdot u_S + \sum_{k \in N} \lambda_k \cdot u_{\{k\}}$$

olmasını sağlar. Böylece null oyuncu özelliği ve (2) den her $i \in N \backslash S$ için

$$g_i(v) = g_i(v^S) = \Phi_i(v) \tag{6}$$

olur.

Bazı $i \in S$ için $g_i(v) > \Phi_i(v)$ olsun. Böylece null oyuncu özelliği ve (2) den

$$g_i(v) > \Phi_i(v) = \Phi_i(v^S) = g_i(v^S)$$

olur. $v^S(N) = v(N)$, kazanç-kayıp aksiyomu ve (6) dan bazı $j \in S$ için

$$g_j(v) < g_j(v^S)$$

olup (5) nolu eşitlik ile çelişir. Benzer şekilde $i \in S$ için $g_i(v) < \Phi_i(v)$ olması da (5) nolu eşitlik ile çelişir. Böylece her $i \in S$ için $g_i(v) = \Phi_i(v)$ olup (6) dan $g(v) = \Phi(v)$ olur.

Tümevarım Hipotezi: $|S_1(v)| = k + 1 > 1$ olacak şekilde $v \in G^N$ için $g(v) = \Phi(v)$ olduğunu göstermektedir.

Tümevarım Adımı: $|S_1(v)| = k + 1 > 1$ olacak şekilde $v \in G^N$ olsun. (3) ve (4) den, $|S_1(v^S)| = |S_1(v)| - 1$ olur. Tümevarım hipotezi ve (2) den her $S \in S_1(v)$ için

$$g(v^S) = \Phi(v^S) = \Phi(v) \tag{7}$$

elde edilir.

(5) ve (7) den, $i, j \in S$ veya $i, j \in N \backslash S$ olmak üzere herhangi bir $S \in S_1(v)$ olacak şekilde her $i, j \in N$ için

$$g_i(v) - \Phi_i(v) = g_j(v) - \Phi_j(v) \tag{8}$$

olur. Şimdi, $S \in S_1(v)$ nin olmadığı $i, j \in N$ oyuncuları ile ilgilenilecektir.

Durum 1: Her $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, $N \backslash S \neq \emptyset$ için $S_1(v) \neq \{S, N \backslash S\}$ olsun. Aşağıda verilen durumlardan biri sağlanır.

(i) $S \cap T = \emptyset$ olacak şekilde birbirine eşit olmayan $S, T \in S_1(v)$ vardır.

(ii) $S \cup T \neq N$ olacak şekilde birbirine eşit olmayan $S, T \in S_1(v)$ vardır.

Durum 1 (i): $S \neq T$ olduğu için $S \backslash T \neq \emptyset$ dir. $i \in S \cap T$, $j \in T \backslash S$, $k \in T$ ve $l \in N \backslash (S \cup T)$ olsun. (8) den,

$$g_i(v) - \Phi_i(v) = g_j(v) - \Phi_j(v) = g_i(v) - \Phi_i(v) = g_k(v) - \Phi_k(v) \tag{9}$$

olur.

Durum 1 (ii): $S \neq T$ olduğu için $S \backslash T \neq \emptyset$ dir. $l \in S \cap T$, $j \in T \backslash S$, $k \in S \backslash T$ ve $i \in N \backslash (S \cup T)$ olsun. (8) den,

$$g_i(v) - \Phi_l(v) = g_j(v) - \Phi_j(v) = g_i(v) - \Phi_i(v) = g_k(v) - \Phi_k(v) \tag{10}$$

olur.

Durum 2: $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, $N \backslash S \neq \emptyset$ için $S_1(v) = \{S, N \backslash S\}$ olsun. $i \in S$ ve $j \in N \backslash S$ yi sabitleyelim. λ_S, $\lambda_{N \backslash S} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in N$ için

$$v = \lambda_S \cdot u_S + \lambda_{N \backslash S} \cdot u_{N \backslash S} + \sum_{k \in N} \lambda_k \cdot u_{\{k\}}$$

$$w = \lambda_S \cdot u_S - \lambda_{N \backslash S} \cdot u_{N \backslash S} + \sum_{k \in N} \lambda_k \cdot u_{\{k\}}$$

olacak şekilde $w \in G^N$ oyunu verilsin.

$$S_1(w) = \left\{S, \left((N \backslash S) \backslash \{j\}\right) \cup \{i\}\right\}$$

ve

$T \cap ((N\backslash T)\backslash\{j\}) \cup \{i\} = \{i\}$

olduğuna dikkat edelim.

Adalet aksiyomunu kullanarak

$$\begin{aligned} g_i(v) - g_j(v) &= g_i(w) - g_j(w) \\ &= \Phi_i(w) - \Phi_j(w) \\ &= \Phi_i(v) - \Phi_j(v) \end{aligned} \quad (11)$$

olduğunu elde ederiz.

(8), (9), (10) ve (11) den her $i, j \in N$ için

$$g_i(v) - \Phi_i(v) = g_j(v) - \Phi_j(v) \quad (12)$$

olur.

$i \in N$ için $g_i(v) > \Phi_i(v)$ olduğunu varsayalım. Buradan,

$$g_i(v) > \Phi_i(v) = g_i(v^S)$$

olur. $v^S(N) = v(N)$ ve kazanç-kayıp aksiyomundan,

$$g_j(v) < g_i(v^S) = \Phi_j(v)$$

olması (12) ile çelişir. Benzer şekilde $i \in N$ için $g_i(v) < \Phi_i(v)$ olup (12) ile çelişir. Sonuç olarak, $g(v) = \Phi(v)$ olur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. Sonuç

Bu makalede işbirlikçi oyun teorisinin en etkili çözümlerinden bir olan Shapley değeri, bazı aksiyomlar kullanılarak karakterize edilmiştir. Bu aksiyomlar; kazanç-kayıp aksiyomu, null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomudur. Bu aksiyomlar ile kaynakların dağıtımında ve karar alma aşamalarında eşitlik, hakkaniyet ve adalet prensipleri dikkate alınmakta ve denetimin amacına ulaşması sağlanmaktadır. Oyun teorisi kapsamındaki etkin bir denetim sayesinde ise oyun teorisinin kontrol mekanizması oluşturulmakta ve sistemlerin etkinliği artmaktadır. Gelecekteki çalışmalarda ise, işbirlikçi oyun teorisindeki diğer çözüm kavramları da aksiyomatik olarak karakterize edilebilir.

Katkı Oranı Beyanı

Yazarın katkı yüzdesi aşağıda verilmiştir. Yazar makaleyi incelemiş ve onaylamıştır.

	M.S.Ö.
K	100
T	100
Y	100
VTI	100
VAY	100
KT	100
YZ	100
KI	100
GR	100

K= kavram, T= tasarım, Y= yönetim, VTI= veri toplama ve/veya işleme, VAY= veri analizi ve/veya yorumlama, KT= kaynak tarama, YZ= Yazım, KI= kritik inceleme, GR= gönderim ve revizyon.

Çatışma Beyanı

Yazar bu çalışmada hiçbir çıkar ilişkisi olmadığını beyan etmektedir.

Etik Onay Beyanı

Bu araştırmada hayvanlar ve insanlar üzerinde herhangi bir çalışma yapılmadığı için etik kurul onayı alınmamıştır.

Kaynaklar

Casajus A. 2011. Differential marginality, van den Brink fairness, and the Shapley value. Theory Decis, 71(2): 163-174.

Casajus A. 2014. The Shapley value without efficiency and additivity. Math Soc Sci, 68: 1-4.

Chun Y. 1991. On the symmetric and weighted Shapley values. Int J Game Theory, 20: 183-190.

Ekici M, Palanci O, Gök SZA. 2018. The grey Shapley value: an axiomatization. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, August 21-23, Medan, Indonesia, 300: 012082. https://doi.org/10.1088/1757-899X/300/1/012082

Ekici M. 2023. On an axiomatization of the grey Banzhaf value. AIMS Math, 8(12): 30405-30418.

Ekici M. 2024. An alternative approach to the axiomatic characterization of the ınterval shapley value. J New Theory, 46: 1-10.

Ergüneş Berkin E, Önder H, Aydoğmu ÖH. 2022. A game theoretic approach to design mating programs for livestock. Turkish J Vet Anim Sci, 46: 124-129.

Harsanyi JC. 1959. A Bargaining model for cooperative n-person games. In Contributions to the Theory of Games IV, vol. 40, Tucker AW, Luce RD (editors). Princeton University Press, Princeton, US, pp: 325-355.

Palanci O, Ekici M, Gök SZA. 2021. On the equal surplus sharing interval solutions and an application. J Dynam Games, 8(2): 139-150.

Shapley LS. 1953. A value for n-person games. Annals Math Stud, 28: 307-317.

Tijs S. 2003. Introduction to game theory. Springer, Hindustan Book Agency, India.

van den Brink R. 2001. An axiomatization of the Shapley value using a fairness property. Int J Game Theory, 30: 309-319.

Young HP. 1985. Monotonic solutions of cooperative games. Int J Game Theory, 14(2): 65-72.