BEYKENT ÜNİVERSİTESİ FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ

Sayı 7(1) 2014, 25 – 36

İKİ İDEMPOTENT MATRİSİN BAZI KOMBİNASYONLARININ GRUP TERSİNİ BULAN BİR ALGORİTMA

Tuğba PİŞTOFOĞLU *(tugbapistofoglu@gmail.com)*
Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksel Lisans öğrencisi

Murat SARDUVAN *(msarduvan@sakarya.edu.tr)*
Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü

ÖZET

$\mathbf{X}_g$, **X** matrisinin grup tersini göstersin. Çalışmada, $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $a,\ b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $c,\ d,\ e,\ f,$ $g \in \mathbb{C}$ olmak üzere; $\mathbf{A} = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g(\mathbf{PQ})^{\mathbf{2}}$ biçimli kombinasyon matrisinin, bazı koşullar altında, grup tersi için sayısal örnek oluşturan bir algoritma verilmektedir. Ayrıca, verilen algoritmayı kullanarak elde edilen bazı örnekler de çalışmanın sonuna eklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Genelleştirilmiş involutif matris, Grup Ters, EP matris, Tripotent matris*

BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

Volume 7(1) 2014, 25 – 36

AN ALGORİTHM FİNDİNG THE GROUP INVERSE OF SOME COMBİNATİONS OF TWO IDEMPOTENT MATRİCES

Tuğba PİŞTOFOĞLU *(tugbapistofoglu@gmail.com)*
Sakarya University, Institute of Science, MSc students

Murat SARDUVAN *(msarduvan@sakarya.edu.tr)*
Sakarya University, Department of Mathematics

ABSTRACT

Let $\mathbf{X}_g$ denotes the group inverse of the matrix $\mathbf{X}$. In this paper, an algorithm creating numerical examples for group inverse of the linear combination matrix of the form $\mathbf{A} = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g(\mathbf{PQ})^2$ is given under some conditions, where $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n} \backslash \{\mathbf{0}\}$ are matrices different from each other and $a,\ b \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ c,\ d,\ e,\ f,\ g \in \mathbb{C}$. Moreover, some examples obtained by running the algorithm are added at the end of the study.

Keywords: *Generalized involutive matrix, Group Inverse, EP matrix, Tripotent matrix*

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}_{m,n}$, $m \times n$ boyutlu kompleks matrislerin kümesini göstermek üzere eğer $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi $\mathbf{P^2} = \mathbf{P}$ koşulunu sağlıyorsa idempotent matris adını alır. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi için, eğer aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_{n,n}$, matrisi varsa, $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine grup tersinir matristir denir:

$$\mathbf{PXP} = \mathbf{P}, \qquad \mathbf{XPX} = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{PX} = \mathbf{XP}.$$

Eğer böyle bir $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi varsa bu matris tektir ve $\mathbf{P}$'nin grup tersi adını alıp $\mathbf{P}_g$ ile gösterilir. Bu tanıma göre açık olarak her matris grup tersinir değildir, fakat her idempotent matris grup tersinirdir ve grup tersi kendine eşittir.

Daha önceden iki idempotent matrisin lineer kombinasyonlarının özel tipli matris olması ile ilgili literatürde çalışmalar mevcuttur (örneğin, bkz. [1, 2, 3, 5, 6, 7]). Liu ve diğerleri de bu makalelerden esinlenerek iki idempotent matrisin bazı kombinasyonlarının grup tersinirliği problemini ele almış ve bazı koşullar altında grup tersler vermiştir[4]. Şöyle ki, $(\mathbf{PQ})^2 = (\mathbf{QP})^2$ ve $(\mathbf{PQ})^2 = \mathbf{0}$ veya $(\mathbf{QP})^2 = \mathbf{0}$ koşulları altında iki idempotent $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ matrisinin

$$\mathbf{A} = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g(\mathbf{PQ})^2 \tag{1}$$

biçimindeki kombinasyonunun grup tersinin açık bir ifadesi [4] çalışmasında verildi. Yine aynı makalede daha alt kombinasyonlar ile ilgili sonuçlar da bulunmaktadır. Bu makalede ise; bu sonuçlarda elde edilen durumlarla alakalı, sayısal örnekler oluşturan bir algoritma verilmektedir. Ayrıca, bu algoritma kullanılarak elde edilen bazı örnekler de makalenin sonuna eklenmiştir.

Aşağıdaki dört teorem ve sonuçları [4] çalışmasında bulunabilir.

Teorem 1. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris olsun. $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\theta = a + b + c \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$\theta \neq \pm a, \pm b$ ve $a \neq \pm b$ iken,

$$(a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{b}\mathbf{Q} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\mathbf{PQ} \qquad (2)$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$ olmasıdır.

$a + b = 0$ ve $a \neq \pm c$ iken,

$$(a\mathbf{P} - a\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} - \frac{1}{a}\mathbf{Q} + \frac{1}{c}\mathbf{PQ}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{PQP} = \mathbf{QPQ} = \mathbf{PQ}$ olmasıdır.

Uyarı 1. Aslında, $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$ ise $\theta \neq \pm a, \pm b$ ve $a \neq \pm b$ ek kısıtlamaları olmadan da (2) sağlanır.

$a = b$ olduğunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris olsun. $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere,

$$(a\mathbf{P} + a\mathbf{Q})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{a}\mathbf{Q} - \frac{2}{a}\mathbf{PQ} - \frac{2}{a}\mathbf{QP} + \frac{5}{2a}\mathbf{PQP}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{PQP} = \mathbf{QPQ}$ olmasıdır.

Teorem 2. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris olsun. $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$, $a + b + c = 0$ şartını sağlayan skalerler olsun. $a \neq \pm b$ olduğunda,

$$(a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{b}\mathbf{Q} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\mathbf{PQ} \qquad (3)$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$ olmasıdır.

Uyarı 2. Aslında, eğer $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP}$ ise (3) ifadesi $a = \pm b$ için de sağlanır.

$a = -b$ olduğunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris olsun. $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ için

$$(a\boldsymbol{P} - a\boldsymbol{Q})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} - \frac{1}{a}\mathbf{Q}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{PQP} = \mathbf{QPQ}$ olmasıdır.

Dikkat edilirse buraya kadar $(\mathbf{PQ})^2 = (\mathbf{QP})^2$ olması durumuyla ilgili sonuçlar verildi. Şimdi $(\mathbf{QP})^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$ veya $(\mathbf{PQ})^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$ durumları incelenecektir.

Teorem 4. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $(\mathbf{QP})^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ ve $c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbf{A} = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g(\mathbf{PQ})^{\mathbf{2}}$ matrisi grup tersinirdir ve grup tersi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{b}\mathbf{Q} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c}{ab}\right)\mathbf{PQ} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab}\right)\mathbf{QP} \\ + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd - be}{a^2 b}\right)\mathbf{PQP} \\ + \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd - af}{ab^2}\right)\mathbf{QPQ} \\ - \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2c + d + g}{ab} + \frac{cd - be - ce}{a^2 b}\right. \\ \left. + \frac{cd - af - cf}{ab^2} + \frac{c^2 d}{a^2 b^2}\right)(\mathbf{PQ})^2\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 2. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $\mathbf{QP} = \mathbf{0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbf{A} = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ}$ matrisi grup tersinirdir ve grup tersi

$$(a\mathbf{P}+b\mathbf{Q}+c\mathbf{PQ})_{g}=\frac{1}{a}\mathbf{P}+\frac{1}{b}\mathbf{Q}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{c}{ab}\right)\mathbf{PQ}$$

dir.

2. ANA SONUÇ VE ALGORİTMA

Bu kısımda [4] çalışmasında ortaya koyulan iki önemli teoremi hatırlatacağız. Bu teoremler için sayısal örnekler oluşturan bir algoritma da bu kısımda verilmektedir. Bu algoritma yardımı ile sadece boyut ve matrislerin elemanlarının alt ve üst sınırları girilmek sureti ile teoremlere konu olan iki idempotent matris, onların (1) tipli kombinasyonları ve bu kombinasyon matrislerinin grup tersleri ile ilgili sayısal örnekler elde edilebilmektedir.

Teorem 5. $\mathbf{P},\mathbf{Q}\in\mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $(\mathbf{PQ})^2=(\mathbf{QP})^2$ olsun. $a,b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $c,d,e,f,g\in\mathbb{C}$, $\theta=a+b+c+d+e+f+g\neq 0$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}=a\mathbf{P}+b\mathbf{Q}+c\mathbf{PQ}+d\mathbf{QP}+e\mathbf{PQP}+f\mathbf{QPQ}+g(\mathbf{PQ})^2$ ifadesi grup tersinirdir ve grup tersi

$$\mathbf{A}_g=\frac{1}{a}\mathbf{P}+\frac{1}{b}\mathbf{Q}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{c}{ab}\right)\mathbf{PQ}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{d}{ab}\right)\mathbf{QP}+\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-be}{a^2b}\right)\mathbf{PQP}+\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-af}{ab^2}\right)\mathbf{QPQ}-\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-be}{a^2b}+\frac{cd-af}{ab^2}\right)(\mathbf{PQ})^2. \tag{4}$$

dir.

İspat. $\mathbf{N}=\mathbf{N_1}+\mathbf{N_2}+\mathbf{N_3}$ olsun. Burada

$$\mathbf{N_1}=\frac{1}{a}\mathbf{P}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{c}{ab}\right)\mathbf{PQ}+\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-be}{a^2b}\right)\mathbf{PQP},$$

$$\mathbf{N_2}=\frac{1}{b}\mathbf{Q}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{d}{ab}\right)\mathbf{QP}+\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-af}{ab^2}\right)\mathbf{QPQ},$$

$$\mathbf{N_3}=-\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c+d}{ab}+\frac{cd-be}{a^2b}+\frac{cd-af}{ab^2}\right)(\mathbf{PQ})^2 \text{ dir.}$$

$$\mathbf{AN}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}-\mathbf{PQ}-\mathbf{QP}+\mathbf{PQP}+\mathbf{QPQ}-2(\mathbf{PQ})^2$$

olarak bulunur ve $\theta = 0$ olduğundan

$\mathbf{N_1A} = \mathbf{P} - \mathbf{PQ} + \mathbf{PQP} - (\mathbf{PQ})^2$, $\quad \mathbf{N_2A} = \mathbf{Q} - \mathbf{QP} + \mathbf{QPQ} - (\mathbf{PQ})^2$ olarak bulunur. $\mathbf{N_3A} = \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{AN} = \mathbf{NA}$ olduğu görülür.

Ayrıca,

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{PQ} - \mathbf{QP} + \mathbf{PQP} + \mathbf{QPQ} - \mathbf{2}(\mathbf{PQ})^2\right) = \mathbf{P} - (\mathbf{PQ})^2,$$

$$\mathbf{Q}\left(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{PQ} - \mathbf{QP} + \mathbf{PQP} + \mathbf{QPQ} - \mathbf{2}(\mathbf{PQ})^2\right) = \mathbf{Q} - (\mathbf{PQ})^2 \text{ ve}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{PQ})^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c}{ab}\right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab}\right) + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd-be}{a^2b}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd-af}{ab^2}\right) - \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd-be}{a^2b} + \frac{cd-af}{ab^2}\right)\right)(\mathbf{PQ})^2 = 0$$

olduğundan

$$\mathbf{ANA} = \mathbf{A} - (a + b + c + d + e + f + g)(\mathbf{PQ})^2 = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{NAN} = \mathbf{N} - \mathbf{N}(\mathbf{PQ})^2 = \mathbf{N}$$

bulunur. Dolayısıyla **A** matrisi grup tersinirdir ve (4) sağlanır.

Aşağıdaki teoremin ispatı da benzer olduğu için hatırlatılmamıştır.

Teorem 6. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $(\mathbf{QP})^2 = \mathbf{0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbf{A}_g = a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g(\mathbf{PQ})^2$ matrisi grup tersinirdir ve grup tersi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{b}\mathbf{Q} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c}{ab}\right)\mathbf{PQ} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab}\right)\mathbf{QP} \\ + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd-be}{a^2b}\right)\mathbf{PQP} \\ + \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c+d}{ab} + \frac{cd-af}{ab^2}\right)\mathbf{QPQ} \\ - \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{c+2d+h}{ab} + \frac{cd-be-de}{a^2b} \right. \\ \left. + \frac{cd-af-df}{ab^2} + \frac{cd^2}{a^2b^2}\right)(\mathbf{PQ})^2\end{aligned} \tag{5}$$

dir.

Sonuç 3. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki idempotent matris ve $\mathbf{PQ} = \mathbf{0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $d \in \mathbb{C}$ olmak üzere $a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + d\mathbf{QP}$ matrisi grup tersinirdir ve grup tersi

$$(a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + d\mathbf{QP})_g = \frac{1}{a}\mathbf{P} + \frac{1}{b}\mathbf{Q} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{ab}\right)\mathbf{QP}$$

dir.

Uyarı 3. Bu sonuçları kullanarak, sıfırdan ve birbirinden farklı idempotent $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ matrislerinin $a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g\mathbf{PQPQ}$ şeklindeki kombinasyonunun grup tersinir olmasıyla beraber grup involutif olduğunu da söyleyebiliriz. Örneğin, $(\mathbf{PQ})^2 \neq \mathbf{0}$ ve $(\mathbf{PQ})^2 = \mathbf{0}$ olsun. Bu durumda, $a = 1, b = -1, 2e + c + d + cd = 1$ ve $2f + c + d - cd = -1$ olduğunda $a\mathbf{P} + b\mathbf{Q} + c\mathbf{PQ} + d\mathbf{QP} + e\mathbf{PQP} + f\mathbf{QPQ} + g\mathbf{PQPQ}$ matrisi grup involutiftir.

Aşağıdaki Algoritma kullanılarak Teorem 5 için sayısal örnekler üretilebilir.

Algoritma.

Girdiler: $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ matrisleri için ortak bir mertebe (n), bu matrislerin elemanları için $(x < y)$ olmak üzere bir en küçük (x) ve bir en büyük (y) tamsayı ve (1) tipli kombinasyonu oluşturacak katsayılar için bir en küçük (t) ve bir en büyük (z) skaleri.

Çıktılar: Elemanları; x ve y tamsayıları (kendileri de dahil olabilir) arasındaki tam sayılardan oluşan n boyutlu değişmeli $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı idempotent matrisleri, bu matrisler için (1) tipli $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ lineer kombinasyon matrisi ve bu kombinasyon matrisinin (4) veya (5) ile verilen grup tersi.

Adım 1) Sayac=0 sayacını kur.

Adım 2) Girilen x ve y skalerlerine göre $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrislerinin oluşturulması için onların tüm elemanlarını değişken kabul edip bu değişkenlerin x'den y'ye kadar birer artacak şekilde döngüsünü kur. Sonraki adımlar, bu döngülerin içinde kalsın.

Adım 3) Bu elemanlar ile $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrislerini oluştur.

Adım 4) Oluşturulan $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisleri için idempotent olma, birbirinden farklı olma ve $(\mathbf{PQ})^2 = (\mathbf{QP})^2$ koşullarını kontrol et. Eğer bu koşullar sağlanıyorsa Adım 5' e git, aksi takdirde Adım 2' ye gidip sonraki döngüye geç.

Adım 5) $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$ skalerlerini rasgele üret. Eğer $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $a + b + c + d + e + f + g \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa Adım 6' ya git. Aksi takdirde bu adımı tekrarla.

Adım 7) sayac değişkenini 1 artır.

Adım 8) (1) tipli lineer kombinasyon matrisini oluştur.

Adım 9) (1) tipli lineer kombinasyon matrisinin (4) tipli grup tersini oluştur.

Adım 10) Sırasıyla sayac değişkeninin değerini, $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$ skalerlerini, (1) tipli lineer kombinasyon matrisini ve onun (4) tipli grup tersini yazdır.

Not: Yukarıdaki algoritmada; (4) ifadesi yerine (5) ifadesi alınır, Adım 4)' de bulunan $(\mathbf{PQ})^2 = (\mathbf{QP})^2$ koşulu $(\mathbf{QP})^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$ koşulu ile değiştirilir ve Adım5) de $a + b + c + d + e + f + g \neq 0$ koşulu kontrol ettirilmez ise Teorem 6 için sayısal örnekler elde edilir.

Örnek. Teorem 5 için yukarıdaki algoritma yardımıyla üretilmiş $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan ve birbirinden farklı idempotent matrisleri, $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$, skalerleri ve bunlar tarafından üretilmiş (1) tipli lineer kombinasyon matrisi ile onun grup tersi

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 3, b = 2, c = 2, d = 0, e = 4, f = 1, g = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -13 \\ -15 & 0 & -15 \\ 26 & 0 & 28 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}_{\text{g}} = \begin{bmatrix} 14/15 & 0 & 13/30 \\ -1/15 & 0 & -1/15 \\ -3/15 & 0 & -11/30 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilebilir. Benzer şekilde Teorem 6 için yine yukarıdaki algoritma yardımıyla

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 3, b = 2, c = 2, d = 0, e = 4, f = 1, g = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -13 \\ -15 & 0 & -15 \\ 26 & 0 & 28 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{A}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} 14/15 & 0 & 13/30 \\ -1/15 & 0 & -1/15 \\ -3/15 & 0 & -11/30 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. SONUÇ

Moore-Penrose ters ve grup ters birçok uygulamalı problemde çözüm bulma amacı ile kullanılabilen genelleştirilmiş ters çeşitleridir. Her iki ters de her matris için tek olmakla birlikte grup tersin Moore-Penrose terse göre avantajı daha az şart içermesi, dezavantajı her matris için Moore-Penrose ters var olmasına rağmen grup tersin olmayabilişidir. Bununla birlikte idempotent matrislerin istatistikteki önemi ki-kare dağılımı düşünüldüğünde çok büyüktür. Dolayısı ile [4] çalışmasında bulunan ve yukarıda hatırlatılan sonuçların ileride uygulamalı bilimlerde kullanılması olası bir durumdur. Bu makalede bu olası uygulamalara ışık tutabilecek sayısal örneklerin elde edilmesi probleminin üstesinden gelinmiştir

KAYNAKLAR

[1] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321, 3–7, 2000.

[2] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., and Styan, G.P.H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354, 21–34, 2002.

[3] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., When is a linear combination of two idempotent matrices is the group involutory matrix?, Linear Multilinear Algebra, 54(6), 429–435, 2006.

[4] Liu, X., Wu, L. & Yu, Y. "The group inverse of the combinations of two idempotent matrices", Linear Multilinear Algebra 59, (1), 2011, 101–115.

[5] Özdemir, H., Özban, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159, 439–448, 2004.

[6] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A.Y., & Demirtaş, N., “On idempotency and tripotency of linear combinations of tripotent matrices”, Appl. Math. Comput., 207, 2009, 197–201.

[7] Sarduvan, M. & Özdemir, H., “On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices”, Appl. Math. Comput., 200, 2008, 401–406.