



TEK BOYUTLU FOTONİK KRİSTALDE DAĞILIM ÖZELLİĞİNDEN YARARLANARAK ETKİN KIRILMA İNDİSİNİN HESAPLANMASI

Çiğdem HARMANKUYU, Ali ÇETİN*, M. Selami KILIÇKAYA

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü,
26480, Eskişehir, acetin@ogu.edu.tr

Geliş Tarihi: 31.07.2009

Kabul Tarihi: 12.11.2009

ÖZET

Bu çalışmada, dielektrik sabiti periyodik olarak değişen tek boyutlu bir fotonik kristalde belli frekansların iletimine izin veren yasaklı band yapısı ve periyodiklik koşuluna bağlı olarak iletim özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, belirlenen kristale ait kırılma indislerine bağlı olarak incelenen dağılım özellikleri, kılavuzlanan modların n_{eff} etkin indislerinin hesaplanmasında kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Fotonik kristal, Periyodik yapı, Etkin indis, Dağılım*

THE CALCULATION OF EFFECTIVE REFRACTIVE INDEX BY USING DISPERSION PROPERTY IN PHOTONIC CRYSTAL WITH ONE DIMENSION

ABSTRACT

In this paper, the forbidden band structure in which able to propagate certain frequencies and transmission properties with respect to periodicity condition are investigated in one dimension photonic crystal has a dielectric constant which change periodic. However, the dispersion properties with respect to refractive indexes belong to certain crystal are used in calculation of n_{eff} refractive indexes of guided modes.

Key words: *Photonic Crystal, Periodic structure, Effective index, Dispersion*

1.GİRİŞ

Enine periyodik mikro yapılu fotonik kristal fiberler 1996'dan beri düşük kayıplı dalga kılavuzları olarak kullanılmaktadır [1]. İndis kılavuzlayıcı ve fotonik band aralıklı olmak üzere iki sınıfa ayrılan fotonik kristal fiberler tek mod işlemi, yüksek çift kırınım, yüksek/düşük nonlineerlik, dağılım ve boş çekirdek içinde kılavuzlama gibi özellikleri nedeniyle tercih edilir.

Fotonik kristaller, dielektrik sabitinin periyodik olduğu yapılardır [2, 3]. Bir kristaldeki elektronların hareketine benzer şekilde periyodik dielektrik yapılarda elektromanyetik dalgaların ilerlemesi belirli yönlerde ve belirli frekans aralığında yasaklanabilir [4-7]. Bu benzerlik nedeniyle fotonik kristalin güçlü yansıma sergilediği dalga boyları bölgesi (yasaklı frekans bölgesi), “fotonik bant aralığı” olarak adlandırılır. Böylece, fotonik kristaller yarı iletkenlerin optik benzeri olarak değerlendirilebilir. Bant aralığı, belli ışık frekanslarının yayını sınırlar. Bu, fotonik kristallerin klasik optiğin yapamadığı şekilde ışığın kontrolünde kullanılabileceğini ifade eder [8]. Bunun sonucu olarak, değişik maddeler ve farklı geometrik parametreler kullanılarak fotonik kristaller yardımıyla ışığın ilerlemesi kontrol edilebilir [9]. Kristalin enerji band yapısında elektronların belirli doğrultuda belirli enerjiyle yayılmalarını engelleyen aralıklar olabilir [10].

2. TEORİ

2.1. Periyodik Tabakalı Ortamlar

Periyodik bir potansiyel içinde elektron dalgalarının hareketi göz önüne alındığında izinli ve yasak bantların varlığı beklenebilir. Elektron dalgaları yerine optik dalgalar, örgünün yapısı yerine de kırılma indis değişimi alınarak aynı düşünce optik ışınım durumuna da uygulanabilir. Bu durumda, enerji bantlarının yerine dalga boylarının ya da frekansların izinli ve yasak bantları elde edilebilir. Tabakalı bir ortamda, doğrusal olarak periyodik bir indis profili seçilerek, bu yapıda geçirilen veya yansıtılan dalga boyu bölgeleri grubu elde edilir. En basit periyodik ortam, farklı kırılma indisli saydam tabakaların birbiri ardı sıra gelmesiyle oluşan ortamdır. Bu durumda, dalga denkleminin tam çözümleri elde edilebilir. En basit periyodik tabakalı ortam,

$$n(z) = \begin{cases} n_2 & 0 < z < b \\ n_1 & b < z < \Lambda \end{cases} \quad (1)$$

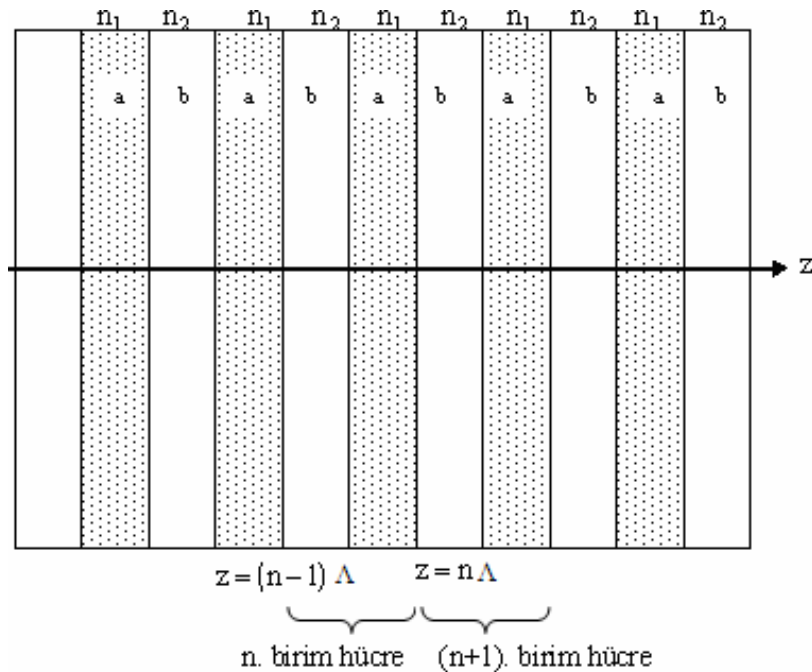
ile verilen bir kırılma indisi profiline sahip iki farklı maddeden oluşur. Burada,

$$n(z) = n(z + \Lambda) \quad (2)$$

ilişkisi vardır [11]. z-ekseni, tabaka ara yüzeyine diktir, Λ periyot olup $a+b=\Lambda$ eşitliğini sağlamaktadır. Yapının geometrisi, Şekil 1'de gösterilmektedir. Dalga denkleminin bir genel çözümünün elektrik alan vektörü

$$\vec{E}(y, z) = \vec{E}(z) e^{i(\omega t - k_y y)} \quad (3)$$

biçiminde olabilir. Burada, yayılma düzleminin yz-düzlemi olduğu kabul edilmiştir. k_y , dalga yayılma vektörünün y bileşenidir ve ortam boyunca sabit kalır.



Şekil 1. Tabaka kalınlıkları sırasıyla a ile b, kırılma indisleri n_1 ve n_2 olan periyodik bir fotonik kristal yapısı.

2.2. Bloch Dalgaları ve Bant Yapıları

Kristalin konumsal her özelliği (yük yoğunluğu, elektron sayı yoğunluğu ve magnetik moment yoğunluğu gibi) \vec{T} örgü öteleme vektörü altında değişmez kalır. Böylece $n(\vec{z} + \vec{T}) = n(\vec{z})$ yazılabilir. $n(z)$, sinüs ve kosinüslü Fourier serisine açılırsa $n(z + \Lambda) = n(z)$ olur ve $2\pi/\Lambda$, $n(z)$ 'nin periyodik olmasını sağlar [12, 13]. Bloch teoremine uygun olarak, periyodik tabakalı ortamdaki normal bir modun elektrik alan vektörü

$$\vec{E}(y, z) = \vec{E}_K(z) e^{-iKz} e^{i(\omega t - k_y y)} \quad (4)$$

şekindedir [14]. Burada $\vec{E}_K(z)$, Λ periyodu ile periyodiktir; yani,

$$\vec{E}_K(z) = \vec{E}_K(z + \Lambda) \quad (5)$$

eşitliği yazılabilir [15]. K indisi, $\vec{E}_K(z)$ fonksiyonunun K 'ya bağlılığını gösterir. K sabiti, Bloch dalga sayısı olarak bilinir. Bu önemli parametre yasaklı frekans bölgesini gösteren fotonik bant aralıklarında imajuner diğer geçirgen bantlarda gerçeldir [16]. Böylece K ve $\vec{E}_K(z)$, ω ve k_y 'nin fonksiyonları olarak belirlenebilir. Elektrik alan her bir homojen tabaka içinde sağa (+z) ve sola (-z) hareket eden düzlem dalgaların toplamı şeklinde

$$k_{1z} = \sqrt{\left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 - k_y^2} \quad \text{ve} \quad k_{2z} = \sqrt{\left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 - k_y^2}$$

olmak üzere [17]

$$E(z) = \begin{cases} a_n e^{-ik_{1z}(z-n\Lambda)} + b_n e^{+ik_{1z}(z-n\Lambda)} & n\Lambda - a < z < n\Lambda \\ c_n e^{-ik_{2z}(z-n\Lambda+a)} + d_n e^{+ik_{2z}(z-n\Lambda+a)} & (n-1)\Lambda < z < n\Lambda - a \end{cases} \quad (6)$$

bağıntısıyla ifade edilir [18, 19] ve böylece Bloch dalgası için periyodiklik koşulu Eş.(5) basit şekilde

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = e^{iK\Lambda} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

olur [20]. Burada a_n , b_n , c_n ve d_n sabitlerdir.

n . birim hücrenin birinci tabakasındaki Bloch dalgası

$$E_K(z) e^{-iKz} = \left[(a_0 e^{-ik_{1z}(z-n\Lambda)} + b_0 e^{+ik_{1z}(z-n\Lambda)}) e^{iK(z-n\Lambda)} \right] e^{-iKz} \quad (8)$$

şekindedir [21]. Burada a_0 ve b_0 sabitlerdir. Köşeli parantez içinde kalan fonksiyonun Λ periyodu ile periyodik olduğuna dikkat edilmelidir. Bu, Bloch dalgalarının çözümünü tamamlar [22, 23]:

$$\cos(K\Lambda) = \begin{cases} \cos(k_{1z}a)\cos(k_{2z}b) - \frac{1}{2}\left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \frac{k_{1z}}{k_{2z}}\right)\sin(k_{1z}a)\sin(k_{2z}b) \\ \cos(k_{1z}a)\cos(k_{2z}b) - \frac{1}{2}\left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} + \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}}\right)\sin(k_{1z}a)\sin(k_{2z}b) \end{cases} \quad (9)$$

$\bar{E}_k(z)$ bir Fourier serisine açılırsa,

$$\bar{E}_k(z) = \sum_{\ell} \bar{e}_K^{(\ell)} e^{-i(2\pi/\Lambda)z} \quad (10)$$

bağıntısı elde edilir [24]. Bloch dalgası, “uzay harmonikleri” denilen üst üste gelen sonsuz sayıda kısmi düzlem dalğanın toplamı şeklinde yazılabilir. Böylece Eş.(8) ve Eş.(10)’dan

$$\bar{E}_k(z) = \sum_{\ell} \bar{e}_K^{(\ell)} e^{-i(K+(2\pi/\Lambda))z} e^{i(\omega t - k_y y)} \quad (11)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\bar{e}_K^{(\ell)}$ ’ler sabit vektörlerdir. Periyodiklik kaldırılırsa (yani, $n_1 = n_2$) Bloch modu düzenli bir düzlem dalga haline gelir ve K yayılma vektörünün z bileşeni k_z ’ye eşit olur. K ’nın temel değeri, tüm ℓ değerleri için

$$\left| \bar{e}_K^{(0)} \right| \geq \left| \bar{e}_K^{(\ell)} \right| \quad (12)$$

olacak şekilde ya da eşdeğer olarak,

$$\frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \bar{E}_K(z) dz = \langle \bar{E}_K(z) \rangle \quad (13)$$

integrali bir maksimuma sahip olacak şekilde K seçilerek belirlenir. Bu, periyodiklik yok edildiğinde, geride kalan harmoniğin $\bar{e}_K^{(0)}$ ve $K = k_z$ olmasını sağlar.

2.2. Faz ve Grup Hızı

Periyodik tabakalı ortamlarda, faz hızı ve grup hızı kavramları da enerji hızı gibi önemli kavramlardır. Bloch dalga sayısı K ’nın uygun bir seçimi yapılarak bir Bloch dalgasının faz hızı

$$v_p = \frac{\omega}{(K^2 + k_y^2)^{1/2}} \quad (14)$$

ile verilir [21]. K kompleks ise sadece reel kısmı kullanılır. Yukarıda tanımlanan faz hızı,

$$\bar{E} = \langle \bar{E}_K \rangle e^{i(\omega t - k_y y - Kz)} \quad (15)$$

biçiminde bir düzlem dalga olan temel uzay harmoniğinin ($\ell = 0$) faz hızıdır. Tüm yapının homojen gibi davrandığı uzun dalga boyu bölgesinde, temel uzay harmoniği Bloch dalgasının baskın kısmıdır ve tüm dalga için çok iyi bir yaklaşım olarak alınabilir.

Grup hızı \vec{v}_g , $\vec{v}_g \equiv \vec{\nabla}_k \omega$ ile tanımlanır ve y-z düzleminde yayılan bir Bloch dalga paketi için,

$$\vec{V}_g \equiv \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right)_K \hat{y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial K} \right)_{k_y} \hat{z} \quad (16)$$

ile verilir [21]. Bağlıdaki \vec{y} ve \vec{z} sırasıyla y ve z eksenlerindeki birim vektörlerdir. Homojen bir ortamda grup hızı, yarı-tekrenkli (tek renkli gibi) bir dalganın enerji akış hızını temsil etmekte olup homojen ve kayıpsız ortamda sabit bir vektör olan Poynting vektörüne paraleldir. Poynting vektörü ve enerji yoğunluğu konumun periyodik fonksiyonudur.

Yapıyı oluşturan farklı maddelerin dielektrik sabitleri oranı yeterince büyük olduğunda güçlü girişim ve kırınım etkileri nedeniyle dalganın dağılım spektrumu, alışılmamış ve ilginç özelliklere sahip olabilir [25]. Şimdi,

$n = \frac{c}{v_p}$ tanımını kullanarak normal ve kusurlu yapılar için dağılım bağıntıları yardımıyla, $k_y = 0$ (normal geliş)

özel durumu için etkin kırılma indisi ifadeleri elde edilebilir. Burada v_p faz hızıdır. Böylece, Eş.(9) kullanılarak etkin kırılma indisi

$$n_{\text{eff}} = \frac{c}{\omega \Lambda} \cos^{-1} \left[\cos \left(\frac{n_1 \omega a}{c} \right) \cos \left(\frac{n_2 \omega b}{c} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin \left(\frac{n_1 \omega a}{c} \right) \sin \left(\frac{n_1 \omega b}{c} \right) \right] \quad (17)$$

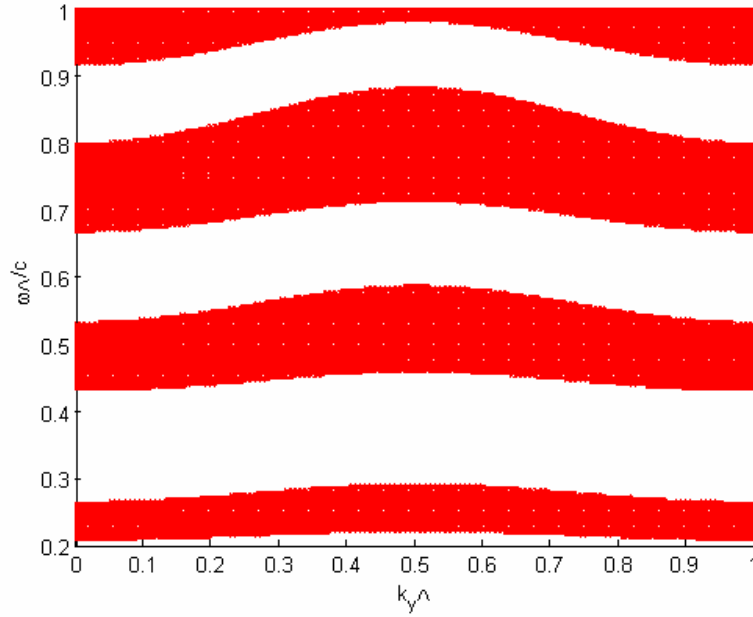
şeklinde elde edilir.

3. MODELLEME VE SAYISAL ANALİZ

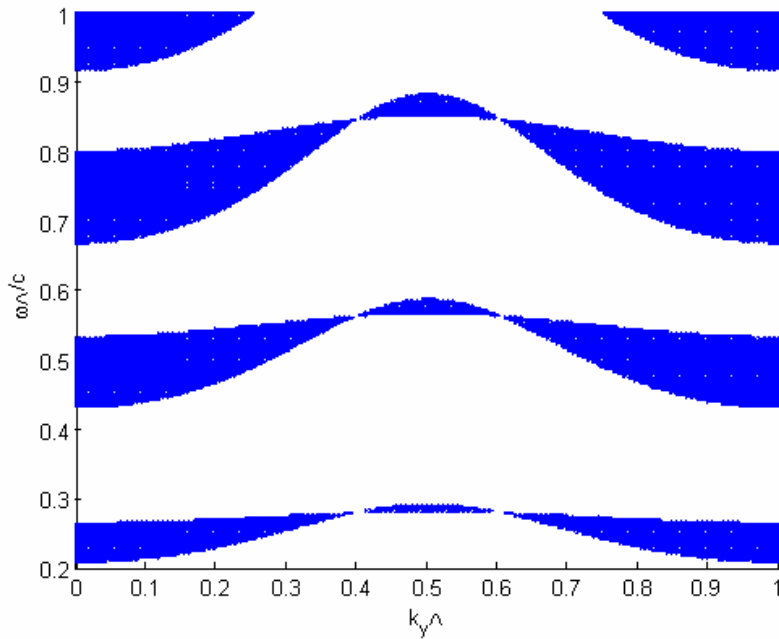
$n_2 = 1$, $n_1 = 3$, gelme açısı 0 ile π arasında değişen, $a=0.2\Lambda$, $b=0.6\Lambda$ değerlerine sahip olan tek boyutlu fotonik kristal yapıyı ele alalım. Eş.(9), frekansı ω ve dalga vektörünün y bileşeni k_y olan Bloch dalgası için z eksenini boyunca Bloch dalga sayısı K 'yı vermektedir. Tasarladığımız periyodik tabakalı ortam için Eş.(9)'dan elde edilen fotonik bant yapısı TE ve TM dalgaları için sırasıyla Şekil 2 ve Şekil 3'de gösterilmektedir.

Taralı bölgeler, K 'nın reel bir sayı olduğu izinli bantlardır. θ_B Brewster açısı olmak üzere, bu açıda ara yüzeylerdeki Fresnel yansımaları yok olduğu, gelen ve yansıyan dalgalar çiftlenmemiş olduğu için, $k_y = (\omega/c)n_2 \sin \theta_B$ olduğu zaman TM "yasak" bantlarının sifıra doğru küçülmesi ilginçtir. Taralı olmayan

bölgeler ise $m=1,2,3,\dots$ olmak üzere $K = m \frac{\pi}{\Lambda}$ olduğunda meydana gelen fotonik bant aralığı denilen yasak aralıklardır.

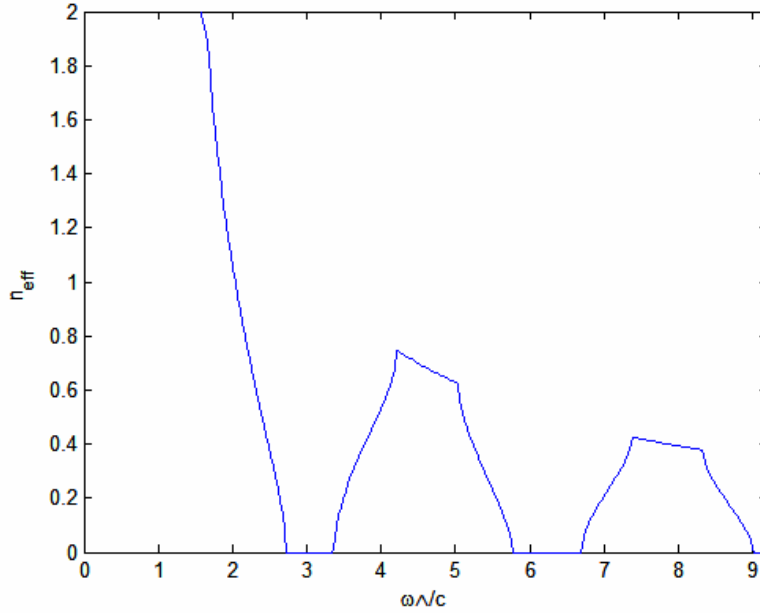


Şekil 2. TE dalgaları için \bar{E} için, ω - k_y düzleminde bant yapısı. Taralı bölgeler izinli bantlardır.



Şekil 3. TM dalgaları için, ω - k_y düzleminde bant yapısı. Taralı bölgeler izinli bantlardır.

Eş.(17) ve Eş.(18) kullanılarak $n_2 = 1$, $n_1 = 3$, gelme açısı 0 ile π arasında değişen $a=0.2\Lambda$, $b=0.6\Lambda$ olacak şekilde tasarlanan tek boyutlu fotonik bir kristal için Şekil 4'de n_{eff} 'in $\omega\Lambda/c$ 'ye karşılık değişimi gösterilmektedir. Kırılma indisi, bant kenarlarında çok küçük olmakta ve $\omega\Lambda/c$ 'nin belli bir değeri için yasak bant kenarlarında sıfıra yaklaşmaktadır.



Şekil 4. $n_2 = 1$, $n_1 = 3$ ve $a=0.2\Lambda$ $b=0.6\Lambda$ için n 'nin $\omega\Lambda/c$ ye karşılık değişimi.

4. SONUÇLAR

Çalışmada, fotonik kristalin yapısını net olarak değerlendirebilmek için nümerik analizler yaptık. Periyodik yapıya sahip fotonik kristalin etkin mod indislerini hesaplayarak yapının indis kılavuzlama ve fotonik band etkilerini inceledik. Etkin kırılma indisi, bant kenarlarında azalır ve $\omega\Lambda/c$ 'nin belli değerleri için yasak bant kenarlarında sıfıra yaklaşır. Yani fotonik kristallerde etkin kırılma indisi anormal davranış sergiler. Bu frekanslarda dalga sayısı kompleks değerler alır ve kaybolur. Bunun sonucu olarak, fotonik kristallerde iletim bandlarının gelme açısına ve konumsal periyodikliğe bağlı olarak değiştiği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Russell, P. St. J., "Photonic-Crystal Fibers", Journal of Lightwave Technology, Vol. 24, No.12, 4729-4749 (2006).
- [2] Özbay, E., Bulu, İ., Çağlayan, H., Aydın, K., Güven, K., "Physics and Applications of Photonic Crystal", Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications 2, 87–95, (2004).
- [3] Arriaga, J., Knight, J. C., Russell, P. St. J., "Modeling the Propagation of Light in Photonic Crystal Fibers", Physica D, 189, 100–106, (2004).
- [4] Richardson, D. J., Poletti, F., Leong, J. Y. Y., Feng, X., Ebendorff Heidepreim, H., Finazzi, V., Frampton, K. E., Asimakis, S., Moore, R. C., Baggett, J. C., Hayes, J. R., Petrovich, M. N., Tse, M. L., Amezcua, R., Price, J. H. V., Broderick, N. G. R., Petropoulos, P., Monro, T. M., "Advances in Microstructured Fiber Technology", IEEE. Reprinted from IEEE/LEOS Workshop: Fibres and Optical Passive Components, Palermo, Italy, (2005).
- [5] Buczynski, R., "Photonic Crystal Fibers", Acta Physica Polonica A, Vol. 106, N0:2, 141-167, (2004).

- [6] Sinha, R. K., Varshney, S. K., “Dispersion Properties of Photonic Crystal Fibers”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 37, No:2, 130-132, (2003).
- [7] Knight, J. C., Broeng, J., Birks, T. A., Russell, P. St. J., “Photonic Band Gap Guidance in Optical Fibers”, *Science*, Vol. 282, (1998).
- [8] Cazo, R. M., Barbosa, C. L., Hattori H. T., Schneider, V. M., “Steady-State Analysis of a Directional Square Lattice Band Edge Photonic Crystal Lasers”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 46, No:3, 210-214, (2005).
- [9] Saleh, B. E. A., “Fundamentals of Photonics”, John Wiley & Sons, 737-739, (1991).
- [10] Joannopoulos, J. D., Jhonsen, S. G., Winn, J. N., Meade, R. D., “Photonic Crystal Molding the Flow of Light”, Princeton University Press, 3-8, (2008).
- [11] Zheng, J., Ye, Z., Wang, X., Liu, D., “Analytical Solution for Band-Gap Structures in Photonic Crystal with Sinusoidal Period”, *Physics Letters A*, 321, 120–126, (2004).
- [12] Kittel, C., “Introduction to Solid State Physics”, New York, J. Wiley, 43-66, (1996).
- [13] Singh, J., “Semiconductor Optoelectronics”, McGraw-Hill Inc., 53-55, (1995).
- [14] Pendry, J. B., “Photonic Band Structures”, *Journal of Modern Optics*, Vol. 41, No. 2, 209-229, (1994).
- [15] Khorasani, S., Adibi, A., “New Analytical Approach for Computation of Band Structure in One-Dimensional Periodic Media”, *Optics Communications*, 216, 439–451, (2003).
- [16] Gaspar-Armenta, J.A., Villa, F., Lopez-Rios, T., “Surface Waves in Finite One-Dimensional Photonic Crystals: Mode Coupling”, *Optics Communications* Vol. 216, 379–384, (2003).
- [17] He, J., Jin, Y., Hong, Z., He, S., “Slow Light in a Dielectric Waveguide with Negative-Index Photonics Crystal Cladding”, *Optics Express*, Vol. 16, No. 15, 11077-11082, (2008).
- [18] Weyl, J. C., Costa, A., Giarola, A. J. “Wave Propagation in Multilayer Dielectric Periodic Structure”, 1964-1967, IEEE (1993).
- [19] Hojo, H., Mase, A., “Dispersion Relation of Electromagnetic Waves in One-Dimensional Plasma Photonics Crystal”, *Journal of Plasma and Fusion Research*, Vol. 80, No. 24, 89-90, (2004).
- [20] Hussein, M. I., Hamza, K., Hulbert, G. M., Scott R. A., Saitou, K., “Design of Layered Structures with Desired Dispersion Properties Using a Multiobjective Genetic Algorithm”, MDP-8 Cairo University Conference Proceeding of MDP-8, Cairo University Conference on Mechanical Design and Production Cairo, Egypt, January 4-6, (2004).
- [21] Yariv, A., Yeh, P., “Optical Waves in Crystals”, John Wiley & Sons, 165-205, (2003).
- [22] Yariv, A., Yeh, P., “Photonics”, Oxford University Pres Inc., 539-555, (2007).
- [23] Khorasani, S., Adibi, A., “Approximate analysis and Design of Rectangular-Lattice Photonic Crystals”, *Optics Letters*, Vol. 28, No. 16, August 15, (2003).
- [24] Arfken, G. B., Weber, J. H. “Mathematical Methods for Physicists” , Elsevier Academic Press, 881-892, (2005).
- [25] Joseph W. H, “A Brief Review of Theoretical Results for Photonic Band Structures”, *Journal of Modern Optics*, Vol. 41, No. 2, 195-207, (1994).