 Doi: 10.19126/suje.356518

Makale Gönderim Tarihi / Received: 20.11.2017 Makale Kabul Tarihi / Accepted: 21.02.2018
Makale Yayımlanma Tarihi / Publication: 15.04.2018 Nisan / April 2018 • 8(1) • 177-194

Lisans Öğrencilerinin Limit Tanımını Yorumlama Becerileri*

Interpredations Skills of Undergraduate Students Towards the Definition of Limit

Muhammet DORUK** **Murat DURAN***** **Abdullah KAPLAN******

Öz. Bu çalışmanın amacı lisans öğrencilerinin limit tanımını nasıl yorumladıklarını ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla öğrencilerin limitin formel tanımına yönelik anlayışları detaylı bir şekilde irdelenmiştir. Nitel araştırma desenlerinden bütüncül çoklu durum çalışmasına göre desenlenen bu çalışma, 2014-2015 öğretim yılı bahar döneminin başında gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın katılımcıları, Doğu Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören ikinci (n=31) ve dördüncü (n=29) sınıf öğrencileridir (n=60). Çalışmanın veri toplama aracı, öğrencilerin limit tanımını nasıl yorumladıklarını ortaya çıkarmak amacıyla araştırmacılar tarafından geliştirilen Limit Tanımına Yönelik Anlayış Formudur (LTYAF). Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin büyük çoğunluğunun limitin formel tanımını yorumlamakta güçlük çektikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin çoğunun limitin formel tanımının altında yatan sezgisel anlamaların farkında olmadıklarını söylemek mümkündür. Bu durumun öğrencilerin limit tanımında bulunan topolojik kavramları ve sembolleri (epsilon-delta) yorumlama ve anlamlandırmadaki güçlüklerinden kaynaklandığı düşünülmüştür. Ayrıca öğrencilerin limiti aranan noktanın yığılma noktası olmasını göz ardı ettikleri belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Limit, limit tanımı, lisans öğrencileri, matematik eğitimi.

Abstract. The purpose of this study was to find out how undergraduate students interpret the definition of limit. For this purpose, understanding of students related to the formal definition of limit was examined in detail. This study was designed according to the holistic multiple case study of qualitative research designs and carried out at the beginning of spring semester of 2014-2015 academic year. The participants of the study (n=60) were sophomore (n=31) and senior (n=29) students studying in the department of primary mathematics teacher training in a state university in the province of Eastern Anatolia of Turkey. Data collection tool of the study was Understanding Protocol for Limit Definition (UPLD) developed by the researchers to reveal how students interpret the definition of limit. The content analysis was used in the analysis of data obtained from the views of the students. As a result of the study, it was determined that most of the students had difficulty in comprehending the formal definition of limit. It was possible to suggest that most of the students were not aware of the intuitive meanings underlying the formal definition of limit. It was reckoned that this case was the result of the difficulties in the process of interpreting and comprehending the meaning of the topological concepts and symbols (epsilon-delta) in the definition of limit. It was also determined that the students ignored the fact that the point where limit was searched was the accumulation point.

Keywords: Limit, the definition of limit, undergraduate students, mathematics education.

Toplumsal Mesaj.

Çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 60 öğrencinin limit tanımını nasıl yorumladıklarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma sonunda öğrencilerin, limitin bilinen sembolik tanımını yorumlamada zorluk yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Buna göre öğrenciler limit tanımında bulunan sembolleri ve kavramları anlamlandırırken güçlük yaşamaktadır.

Public Interest Statement.

The purpose of the study is to reveal how 60 learners studying in the department of primary mathematics teacher training interpret the definition of limit. At the end of the study, students were found to have difficulty in interpreting the known symbolic of the definition of limit. Accordingly, students have difficulty in understanding the symbols and concepts in the definition of limit.

---

* Bu çalışmanın bir bölümü, Uluslararası Matematik ve Matematik Eğitimi Konferansında sözlü bildiri olarak sunulmuştur (Fırat Üniversitesi, 12-14 Mayıs 2016, Elazığ, Türkiye)

** Yrd. Doç. Dr., Hakkari Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, mdoruk20@gmail.com
*** Dr., Milli Eğitim Bakanlığı, Plevne Ortaokulu, Amasya, denizyildizi2805@hotmail.com
**** Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, akaplan@atauni.edu.tr

Doruk, M., Duran, M. ve Kaplan, A. (2018). Lisans Öğrencilerinin Limit Tanımını Yorumlama Becerileri. *Sakarya University Journal of Education, 8*(1), 177-194.

1. GİRİŞ

Günümüzde matematik ağırlıklı lisans programlarının önemli dersleri arasında analiz dersleri yer almaktadır. Üniversitelerdeki geleneksel analiz derslerinde yoğun olan içerik bir düzene göre kategorilere ayrılır ve bu dersler belli bir sıra gözetilerek işlenir (Barak, 2007). Matematiğin ardışık ve yığılmalı bir bilim dalı olmasından dolayı izlenen bu sırada limit, analiz derslerinin temelini teşkil eden kavramlardan biridir. Çünkü analiz derslerinde süreklilik, türev, diferansiyel ve integral gibi temel kavramlar ile devamındaki diziler, seriler, yakınsama-ıraksama gibi kavramlar limit kavramı yardımıyla açıklanır ve anlam kazanır (Bukova, 2006). Bu yüzden limit, tek başına önemli bir kavram olmasının yanında analizin diğer temel kavramlarını anlayabilmek için de bir ön şart olma değeri taşır. Türkiye'de öğrenciler limit kavramı ile lise son sınıfta tanışmaktadırlar. Ortaöğretim matematik dersi öğretim programında (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013) limit, türev başlığı altında yer almaktadır. Söz konusu programda öğrencilerden bir fonksiyonun bir noktadaki limitini, soldan limitini ve sağdan limitini tablo ve grafik kullanarak açıklamaları istenmektedir. Programda ayrıca temel seviyede limit alma işlemlerine yer verilmektedir. Limit kavramı da bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasından yola çıkarak açıklanmaktadır (MEB, 2013). Bu kazanımlardan yola çıkarak öğrencilerden öğretim süreci sonunda limit kavramını sezgisel olarak anlamaları ve limitle ilgili işlemleri yapabilir seviyede olmaları beklenmektedir. MEB'in 12. sınıf matematik dersi için önerdiği kaynak kitaplarda (Çakımcı ve Kabasakal, 2016; Keskin, 2017) limit kavramına sağdan ve soldan yaklaşma kavramları açıklanarak giriş yapılmaktadır. Fonksiyonun bir noktadaki limiti tanımı, noktaya sağdan ve soldan yaklaşıldığında fonksiyonun aldığı değerlerin bir sayıya yaklaşması şeklinde açıklanmaktadır. Kaynak kitaplarda ayrıca bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olmasının gerekmediği vurgulanmaktadır. Lise düzeyindeki limit öğretiminin; limitin özellikleri, parçalı ve mutlak değerli fonksiyonların limitleri, genişletilmiş gerçek sayılar kümesinde limit ve belirsizlikler ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$) konuları ile sınırlı olduğu tespit edilmiştir (Çakımcı ve Kabasakal, 2016). Öğrenciler liselerden mezun olduktan sonra üniversite öğrenimleri boyunca, öğrenim gördükleri bölümlere göre limit kavramı ile tekrar karşılaşabilmektedirler. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarına limit kavramının öğretimi Analiz I dersi kapsamında yapılmaktadır. Yüksek Öğretim Kurumu tarafından sunulan Analiz-I dersi içeriği (Yüksek Öğretim Kurumu [YÖK], 2014) ve ilgili derste kullanılan popüler ders kitapları incelendiğinde (Balcı, 2008; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Musayev, Alp ve Mustafayev, 2007) üniversite düzeyindeki limit öğretiminin lise öğretimine göre içerik açısından benzerlik gösterdiği ancak öğretim yöntemi bakımından bazı farklılıklar taşıdığı görülmüştür. Limit kavramına limitin formel tanımı verilerek giriş yapılmaktadır. Öğretim limit tanımının uygulamaları ile devam etmektedir. Lise düzeyinde ispatsız olarak verilen limite ait özellikler ve teoremler formel tanım kullanılarak ispatlanmaktadır. Öğrencilerin limite yönelik daha önce informel olarak öğrendikleri kavramlar matematiksel olarak tanımlanmaktadır. Öğrenciler Analiz-I dersi ile limitin formel tanımıyla ilk defa karşılaşmakta ve bu tanım sayesinde ispatlar yapabilmektedirler. Bu bağlamda öğretmen adaylarının matematiğin sistematik ve dedüktif yapısını daha yakından keşfetme fırsatını yakaladıkları söylenebilir.

Limitin epsilon-delta tanımı olarak bilinen formel tanımında, limit kavramı matematiksel olarak kesin bir şekilde tarif edilmektedir. Balcı (2008: 82) tarafından yapılan limit tanımı şu şekildedir:

"*$A \subset R$, $f: A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir*"

Tanım incelendiğinde öncelikle limiti aranacak noktanın fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerektiği vurgulanmaktadır. Limitin formel tanımında bulunan topolojik ifadeler de matematiksel anlam taşırlar. Örneğin "$0 < |x - a| < \delta$" ifadesi *a*'nın δ delik komşuluğunu ifade etmektedir. Diğer bir deyişle bu ifade *a* noktasının dâhil olmadığı, *a* merkezli δ yarıçaplı açık yuvarı temsil etmektedir. δ nın sıfıra çok yakın bir pozitif sayı olacağı düşünülerek x bağımsız değişkeninin *a* noktasına yaklaşacağını söylemek mümkündür. Bu kümedeki x değerleri arasında *a* sayısının olmadığını da dikkate almak gerekmektedir. Formel tanımda yer alan $|f(x) - L| < \varepsilon$ ifadesi de benzer bir toplolojik anlam taşır. Bu tanımdaki kilit nokta sembollerde ve varlıksal niceleyicilerde gizlidir. Tanımda, verilen her pozitif küçük ε sayısına karşılık epsilona bağlı en az bir pozitif δ sayısının bulunabilmesi istenir. Yani potansiyel limit değerimiz olan L sayısının her komşuluğunun ters görüntüsünün, limiti araştırılan *a* noktasının en az bir delik komşuluğuna düşmesi gerekir. Diğer bir ifade ile matematiksel limitte esas olan limit değerinin istendiği kadar küçük seçilen bir komşuluğunda, limiti aranan noktanın fonksiyon altında resmedilecek bir delik komşuluğunun bulunmasıdır (Özmantar ve Yeşildere, 2013; Tall ve Vinner, 1981). En azından, öğrencilerin bu tanımın altındaki sezgisel anlamanın x değişkenlerinin *a* gibi bir sayıya sağdan ve soldan yaklaştığında, bu değerlere karşılık gelen görüntülerin de bir reel sayıya yaklaşması (Arslan ve Çelik, 2013) olduğunu kavramaları istenmektedir.

Öğrencilerin limit kavramı gibi matematiksel kavramları formel ya da informel (sezgisel) olarak zihinlerinde nasıl oluşturduklarını ortaya çıkarmak için alanyazında çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde ortaya çıkan Bloom taksonomisi ve onunla ilişkili kavramsal-işlemsel bilgi teorileri ortaya atılmış, sonraki çalışmalarda bu teoriler sıklıkla kullanılmıştır. Benjamin Bloom tarafından 1956 yılında Chicago Üniversitesi'nde ortaya atılan ve öğrencilerin bir kavram ile ilgili sahip oldukları bilişsel düzeylerin basitten karmaşığa doğru "bilgi-kavrama-uygulama-analiz-sentez-değerlendirme" şeklinde sıralandığı sınıflandırma alanyazında "*Bloom Taksonomisi*" olarak bilinmektedir. Bu sınıflandırma, eksikliklerinin giderilmesi ve daha modern hale dönüştürmesi amacıyla revize edilmiştir (Anderson ve Krathwohl, 2001). Revize edilen yeni taksonomi ile birlikte öğrenmeleri veya hedefleri, sadece bilgi açısından değil aynı zamanda süreç açısından da değerlendirme imkânı ortaya çıkmıştır (Bekdemir ve Selim, 2008). Bazı araştırmacılar da matematiksel bilgiyi kavramsal ve işlemsel olarak iki gruba ayırmışlardır.

İşlemsel bilgi; matematik sembollerini ve gösterimlerini tanıma, kural ve formülleri bilme, verilen bir algoritmayı işlem basamaklarına uygun biçimde yürütebilme gibi becerileri gerektiren ve kavramaya dayanmayan tamamen mekanik bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009). İşlemsel öğrenmeye alışık bir öğrenci, neyin nereden geldiğine bakmaksızın tanımı, kuralı veya ilişkiyi kendisine sunulduğu gibi aklında tutmaya çalışır (Baki, 2014). Kavramsal bilgi ise matematiksel kavramları sembolleştirebilme, onları farklı bir biçimde sunabilme, onlar arasında ilişki kurabilme ve gerekli işlemleri yapabilme gibi becerilerin oluşturduğu kavramaya dayalı bir bilgidir (Birgin ve Gürbüz, 2009). Kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir (Baki, 2014). Matematikte işlemsel ve kavramsal bilgi birbirinden ayrı gibi düşünülse de temelde birbirini tamamlayan bağımlı iki bileşendir (Birgin ve Gürbüz, 2009).

Matematikte herhangi bir konunun öğretimi sürecinde, öğrencilerin karşılaşabilecekleri güçlüklerin veya kavram yanılgılarının farkında olarak yapılacak öğretimin mevcut öğretime göre daha faydalı olacağı açıktır. Çünkü kavram yanılgısına sahip olan bir öğrenciye dersin tekrar tekrar anlatılmasının bir yararı yoktur (Resnick, 1983'den akt. Barak, 2007). Özellikle limit konusunda yaşanılan zorluklar türev ve integral gibi onunla bağlantılı diğer kavramlarda da zorluklar yaşanmasına sebebiyet vermektedir (Orton, 1983; Tall, 1992). Bu düşüncede olan araştırmacılar, analizin en zor kavramlarından biri olan limit kavramının (Cornu, 1991; Orton, 1983) öğretiminde yararlı olacağı düşüncesiyle öğrencilerin sahip oldukları imajlara ve güçlüklere yönelik çalışmalar yapmışlardır.

Öğrencilerin limit konusunda karşılaştıkları güçlükleri inceleyen çalışmalarda öğrencilerin limiti konusunda birçok kavram yanılgısına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas ve Vidakovic (1996), limit kavramının çoğu öğrenci için büyük zorluklar barındırdığını ve öğrencilerin bu önemli matematiksel düşüncenin anlaşılmasında çok az başarı elde edebildiklerini belirtmişlerdir. Yapılan araştırmalarda analiz öğrencilerinin bir kısmının limiti geçilemeyen bir sınır (Akbulut ve Işık, 2005; Cottrill vd., 1996; Davis ve Vinner, 1986; Jordaan, 2005; Williams, 1991), uç değer (Davis ve Vinner, 1986; Orton, 1983), sonsuzluk işlemi (Orton, 1983;

Williams, 1991) ve yaklaşma (Williams, 1991) olarak algıladıkları ortaya çıkmıştır. Bazı öğrenciler limit değerine asla ulaşılamayacağını düşünmüşlerdir (Akbulut ve Işık, 2005; Davis ve Vinner, 1986; Jordaan, 2005). Öğrencilerde görülen en yaygın kavram yanılgılarından biri limit hesaplama işlemine yöneliktir. Öğrenciler bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin, fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğuna inanmışlardır (Barak, 2007; Bezuidenhout, 2001; Davis ve Vinner, 1986; Jordaan, 2005). Bazı araştırmalarda da öğrenciler, limit kavramı ile tanımlılık, süreklilik ve türev kavramlarını birbiri yerine kullanmışlardır (Akbulut ve Işık, 2005; Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2001; Jordaan, 2005). Öğrencilerin limit konusunda karşılaştıkları bu güçlüklerin sebepleri arasında kullanılan günlük konuşma dilinin öğrencilerdeki limit imajını olumsuz yönde etkilemesi yer almaktadır (Davis ve Vinner, 1986). Ayrıca öğrencilerin diğer matematiksel kavramların gelişiminde limitin ne kadar önemli olduğunun farkında olmamaları önemli bir etkendir (Sanchez, 1996'dan akt. Bukova, 2006).

Limit kavramının öğretiminde analiz öğrencilerinin en çok zorlandıkları konulardan birisi de limitin formel tanımını anlama ve uygulama olmuştur (Akbulut ve Işık, 2005; Baki ve Çekmez, 2012; Barak, 2007; Jordaan, 2005; Juter, 2006; Kabael, Barak ve Özdaş, 2015). Esasında limitin formel tanımı, dinamik ve sayısal yaklaşımlarla birlikte limit kavramının öğretiminde bir yöntemdir ve öğrencilerin yorumlamakta dahi zorlandıkları bir yaklaşımdır (Bukova, 2006; Doruk, 2016; Ervynck, 1981; Quesada, Richard ve Wiggins, 2008). Ayrıca öğrencilerin informel ve dinamik limit imajları onların formel tanımı yapılandırmalarının önünde bir engel teşkil etmektedir (Cottrill vd., 1996). Yapılan literatür incelemesinde analiz öğrencilerinin limit konusunda karşılaştıkları güçlükler veya sahip oldukları kavram yanılgılarına yönelik çalışmalar yapılmasına karşın formel limit tanımına odaklanan çalışmaların sayıca az olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Baki ve Çekmez, 2012; Güçler, 2013, 2014). Swinyard (2011) araştırmaların çoğunlukla öğrencilerin limit tanımıyla ilgili informel anlayışları ve sahip oldukları kavram yanılgıları üzerine odaklandığını belirterek öğrencilerin limitin formel tanımını anlayışlarını betimleyen çok az sayıda çalışma olduğunu vurgulamıştır.

Öğrencilerin formel limit tanımını anlayışları üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde (Baki ve Çekmez, 2012; Juter, 2006; Kabael vd., 2015), çalışma verilerinin, öğrencilerin limit tanımını yapmaları ya da limit tanımının uygulanması istenen sorulara verilen cevaplar ile elde edildiği görülmüştür. Bazı araştırmacılar formel limit tanımının anlaşılmamasının sebebinin tanımda yer alan "her" ve "en az bir" varlıksal niceleyiciler olduklarını belirtmişlerdir (Cottrill vd., 1996; Tall ve Vinner, 1981). Güçler (2014) çalışmasında sembollerin matematiksel iletişimdeki rolünü limit notasyonu üzerinden araştırmıştır. Araştırmada öğrencilere limitin formel tanımında ne anladıkları sorulmuştur. Öğrenciler, bu tanımın çoğunlukla işlemsel ve süreç odaklı olduğunu ifade etmişlerdir. Güçler (2013) çalışmasında analize giriş dersinde, limit kavramı üzerinde ortaya çıkan söylemleri incelemiştir. Çalışmada öğrencilere formel limit tanımı verilip ne anladıkları sorulduğunda ise limit tanımıyla ilgili olarak işlemsel ve süreklilik hareketi metaforu temelli sözcükler kullandıklarını belirtmiştir. "Yeterince yakınlaşma" ve "giderek yaklaşma" kelimelerini kullanmalarına rağmen fonksiyonun limite yaklaşması yerine limitin fonksiyona yaklaştığını ifade etmişlerdir. İlgili litaratürden de anlaşıldığı üzere öğrencilerin formel limit tanımını nasıl yorumladıkları üzerine detaylı bir araştırmanın yapılmadığı söylenebilir. Dolayısıyla formel limit tanımına odaklanılarak, öğrencilerin bu tanımın hangi kısımlarında zorluk yaşadıklarını ortaya koyabilecek detaylı bir çalışmaya ihtiyaç olduğu söylenebilir. Yapılacak bu yöndeki çalışmalarla öğrencilerin formel limit tanımına yönelik ne tür zorluklara sahip oldukları hakkında bilgiler elde edilebilir. Öğrencilerin tanımı yorumlamada yaşadıkları güçlükler dikkate alınarak öğretim yapılabilir. Hiç şüphesiz öğrencileri sahip oldukları zorluklar ve yanlış yorumlardan kurtarabilmek için onları yanılgıları ile yüzleştirmek gerekir. Daha iyi öğrenme için öğrencilerin sahip oldukları alternatif görüşlere yer verilmelidir (Osborne ve Freyberg, 1985). Güçler (2014) analiz dersinde limit öğretimİ sürecinde sınıftaki iletişimi güçlendirmek için sembollerin içerdiği anlamın açıklığa kavuşturulmasını önermiştir. Yapılacak bu yönde eğitimlerde öğrencilerin formel limit tanımında yer alan semboller ve toplojik kavramlar hakkındaki düşüncelerinin bilinmesi yararlı olacaktır. Bu nedenle öğrencilerin anlamakta ve yorumlamakta zorlandıkları formel limit tanımının öğrenciler tarafından nasıl yorumlandığı, ne tür güçlüklerle karşılaşıldığı noktasında bilgi sahibi olunması önemlidir. Bu çalışmanın amacı da ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin limit tanımına yönelik yorumlarını ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla öğrencilerin limitin formel tanımına yönelik anlayışları detaylı bir şekilde irdelenmiş ve aşağıdaki araştırma sorularının cevapları aranmıştır.

- Öğrenciler limit tanımını nasıl yorumlamaktadır?
- Öğrencilerin limit tanımına yönelik yorumları öğrenim gördükleri sınıf düzeylerine göre nasıl farklılaşmaktadır?

2. YÖNTEM

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Çünkü nitel araştırmalar, insanların bireysel ya da toplu olarak sosyal eylemlerini, düşüncelerini, inançlarını ve algılarını analiz eder ve betimler. Nitel araştırma yaklaşımının doğal ortama duyarlılık sağlaması, araştırmacının katılımcı rolü olması, bütüncül bir yaklaşıma sahip olması, algıların ortaya konmasını sağlaması, araştırma deseninde esnekliği olması ve tümevarımcı bir analize sahip olması önemli özellikleridir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu özellikler çerçevesinde kullanılacak en iyi araştırma deseninin özel durum çalışması (Case Study) olduğu kanısına varılmıştır. Bu çalışma için en uygun durum çalışması deseninin bütüncül çoklu durum çalışması olduğu sonucuna varılmıştır. Çünkü bu desende, birden fazla kendi başına bütüncül olarak algılanabilecek durum söz konusudur. Her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınır ve daha sonra birbiriyle karşılaştırılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu çalışmada da öğrencilerin limit tanımını yorumlama becerileri çeşitli açılardan incelenmiştir.

2.1 Evren Örneklem

Çalışmanın katılımcılarını 2014-2015 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılın başlangıcında bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 31'i ikinci sınıf ve 29'u dördüncü sınıf olmak üzere toplam 60 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada dikkate alınan ölçüt, öğrencilerin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde limit kavramının öğretiminin yapıldığı Analiz-I dersini almış ve başarı ile geçmiş olmalarıdır. Öğrencilerin iki farklı gruptan seçilmesinin sebebi ise analiz-I dersini henüz tamamlamış öğrenciler ile mezun durumundaki öğrencilerin limit tanımına yönelik anlayışlarının nasıl farklılaştığını incelemektir. Ayrıca ilgili literatürde birinci ve son sınıfta öğrenim gören analiz öğrencileri ile çalışmak önemsenen bir durumdur (Barak, 2007). Bu çalışmada ikinci sınıf öğrencileri ile dördüncü sınıf öğrencilerini karşılaştırmak dolaylı da olsa ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde yer alan matematik ağırlıklı derslerin bir değerlendirilmesi olarak da dikkate alınabilir. Çünkü öğrenciler formel limit tanımı ile ilk defa ikinci sınıftaki Analiz I dersi ile karşılaşmaktadırlar. Öğrenciler dördüncü sınıfa kadar Analiz II, Analiz III ve Kompleks Fonksiyonlar Teorisi gibi derslerde çeşitli limit durumları ile tanışmaktadırlar. Bu nedenle ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki eğitimini tamamlamaya yakın olan öğrencilerin limit kavramına yönelik daha olgun düşüncelere sahip olması beklenir.

2.2 Veri Toplama Yöntemi

Çalışmanın verileri araştırmacılar tarafından geliştirilen Limit Tanımına Yönelik Anlayış Formu (LTYAF) yardımıyla toplanmıştır. LTYAF'de limitin epsilon-delta tanımı olarak bilinen formel tanımı ile birlikte beş adet açık uçlu soru bulunmaktadır. Formda bulunan beş soru yardımıyla öğrencilerin bu tanımı nasıl yorumladıkları ortaya çıkarılmak istenmiştir. LTYAF'nin geliştirilmesi aşamasında analiz alanında uzman bir akademisyenin yardımı alınmıştır. Tablo 1'de LTYAF'ta yer alan tanım ve sorular ile ölçülmek istenen özellikler belirtilmiştir.

Tablo 1. LTYAF'ta Yer Alan Tanım ve Sorular

Formel limit Tanımı	
$\boldsymbol{A \subset R, f: A \to R}$ bir fonksiyon, a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ için, eğer $\boldsymbol{0 < \lvert x - a \rvert < \delta}$ olduğunda $\boldsymbol{\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon}$ kalacak şekilde bir $\boldsymbol{\delta > 0}$ sayısı bulunabiliyorsa x, a noktasına yaklaştığında $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun limiti L dir denir.	
Sorular	Amaç
Soru 1: Bu tanım sizin için ne anlama geliyor? Kendi cümleleriniz ile izah ediniz.	Limit tanımını kendi cümleleri ile matematiksel olarak doğru bir şekilde ifade edip edilemediğini ortaya çıkarmak. Bu anlamda öğrencilerin tanıma yönelik kavramsal bir anlayış geliştirip geliştiremediklerini belirlemek.
Soru 2: Tanımda bulunan **"$\boldsymbol{0 < \lvert x - a \rvert < \delta}$"** ifadesinin ne anlama gelmektedir?	*a* noktasının delta delik komşuluğundaki noktaları temsil eden topolojik kavramın öğrenciler tarafından nasıl yorumlandığını ortaya çıkarmak.
Soru 3: Tanımda bulunun olan **"$\boldsymbol{\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon}$"** ifadesi ne anlama gelmektedir?	*L* noktasının epsilon komşuluğundaki fonksiyonun görüntülerini temsil eden topolojik kavramın öğrenciler tarafından nasıl yorumlandığını anlamak.
Soru 4: Tanımda yer alan ε (epsilon) ile $\boldsymbol{\delta}$ (delta) sembolleri arasında ne gibi bir ilişki vardır?	Öğrencilerin tanımda yer alan ilgili sembollerin işlevleri hakkında ne tür düşüncelere sahip olduklarını belirlemek.
Soru 5: $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x}$ biçiminde verilen bir ifadenin limiti hakkında ne söyleyebilirsiniz?	Öğrencilere alışık olmadıkları tarzda bir soru sorarak limit kavramı hakkında düşünmelerini sağlamak. Limiti aranan noktaların ne gibi özelliklere sahip olması gerektiğini düşündürmek. Bu incelemelerin sonucunda öğrencilerin limit tanımında bulunan yığılma noktası kavramını dikkate alıp almadıklarını belirlemek.

Çalışmanın verileri öğrencilerin formu yazılı olarak doldurmaları vasıtasıyla toplanmıştır. Veri toplama aracı öğrencilere sınıf ortamında uygulanmış ve süre kısıtlaması yapılmamıştır. LTYAF'nin öğrencilere yazılı olarak uygulanmasının amacı, öğrencilerin formu daha rahat ve matematiksel bilgilerini göz önüne alarak daha matematiksel açıklamalar yapmalarını sağlamaktır. Bilindiği gibi birebir görüşmeler sırasında öğrenciler araştırmacıdan çekinebilmekte ve davranışlarının kayıt altına alınacağını bildiğinden dolayı tedirgin olabilmektedir. Bu şekilde elde edilen verilere öğrencilerin günlük konuşma dilleri de yansıyabilmektedir. Ayrıca görüşmelerde öğrenciler zihinlerinde dolaşan birçok düşünceyi birleştirerek uygun bir dil ile ifade etmede güçlük yaşayabilmektedirler. Görüşlerin yazılı şekilde alınarak öğrenci düşüncelerinin daha rahat ifade edilmesi sağlanmıştır. Bununla birlikte, çalışma öğrencilerin limit tanımını yorumlamalarına odaklandığı için daha formel bir dil kullanımı gerektirmektedir. Örneğin öğrencilere tanımda yer alan topolojik bir ifadenin matematiksel olarak ne anlama geldiği sorulduğunda, o konu hakkındaki tüm bilgilerini yoklayarak elde ettiği en makul açıklamayı yazılı olarak ifade edebildikleri gözlemlenmiştir. Bu sayede çalışma verilerinin daha geçerli ve güvenirliğinin daha yüksek olacağı düşünülmüştür.

2.3 Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi yöntemlerinden de tümevarım içerik analizi tercih edilmiştir. Tümevarım içerik analizinde nitel verileri düzenlemek için kodlama, kategoriler yaratma ve özetleme yapılır (Kızıltepe, 2015). Öncelikle öğrencilerin verdikleri cevaplar birinci yazar tarafından incelenmiş ve taslak kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra yazarlar bir araya gelerek veriler ve kategoriler tekrar incelenmiş ve kategorilere son şekli verilmiştir. Elde edilen kategorilerin güvenirliğini sağlamak için iki uzmanın görüşü alınmıştır. Uzmanlardan birisi Analiz alanında, diğeri matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyendir. Uzmanlara çalışmadan elde edilen tüm kategoriler ve bu kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek öğrenci cevapları sunulmuştur. Uzmanlardan hem kategorilerin uygunluğu hakkında hem de çalışmada yapılan matematiksel yorumların doğruluğu hakkında görüş alınmıştır. Uzmanlar çalışmada kullanılan kategorilerin elde edilen verilerle çoğunlukla uyumlu olduğu konusunda görüş bildirilmiştir. Yalnızca, daha önceden "Sembolik" olarak belirtilen kategorinin bu kategorideki cevapları tam olarak yansıtmada sınırlı kaldığını belirterek ilgili kategorinin "Sembolik-Yüzeysel" olarak genişletilmesinin uygun olacağını belirtmişlerdir. Uzmanların görüşleri doğrultusunda, ilgili kategoride ve kategorilerden elde edilen sonuçların matematiksel olarak yorumlanmasında düzenlemeler yapılmıştır. Bu çalışmada birden çok bölümde içerik analizi yapılarak kategoriler elde edildiği için bu şekilde bir güvenirlik stratejisi belirlenmiştir. Öğrencilerin çoğu sadece bir kategoride yanıtlar verirken, bazı öğrenciler birden çok kategoriye girebilecek ifadeler kullanmışlardır. Çalışmada kullanılan alt kategoriler genellikle öğrencilerin ifadelerinin yansıması şeklindedir.

3. BULGULAR

Öğrencilere ilk olarak limitin "*$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ için, eğer $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\delta}$ olduğunda $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ kalacak şekilde bir $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ sayısı bulunabiliyorsa x, a noktasına yaklaştığında $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun limiti L dir denir.*" şeklindeki formel tanımı sunulmuştur. Öğrencilerden bu tanımdan ne anladıkları kendi cümleleri ile izah etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin ifadeleri analiz edildiğinde, öğrencilerin limit tanımından anladıklarını dört boyutta ve 11 farklı şekilde izah etmeye çalıştıkları ortaya çıkmıştır. Tablo 2'de öğrencilerin limit tanımını yorumlamalarına yönelik elde edilen kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 2. Öğrencilerin Limit Tanımına Yönelik Açıklamaları

Kategoriler	Alt Kategoriler	İkinci Sınıf (%)	Dördüncü Sınıf (%)	Toplam (%)
İşlemsel	Işlemsel açıklamalar	20	11	16
Yaklaşma	*a* ya sağdan ve soldan yaklaşma	11	11	11
	x, *a* ya yaklaştığında $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in $\boldsymbol{L}$ değerini alması	0	11	5
	x ler *a* ya yaklaşırken görüntülerinin de *L* ye yaklaşması	5	4	5
	Fonksiyonun bir değere yaklaşması	3	8	5
Sembolik-Yüzeysel	$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|$ $\boldsymbol{\delta}$ dan küçük iken $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}|$ nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ dan küçük olması	14	8	11
	Fonksiyon ile limit arasında $\boldsymbol{\varepsilon}$ kadar fark olması	9	0	5
	Limitin tanımı	11	4	8
Komşuluk	*x* değerlerinin *a* nın $\boldsymbol{\delta}$ komşuluğunda kalması	9	4	6
	x in *a* nın delik komşuluğunda $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ olması	11	4	8
	x ler *a* nın $\boldsymbol{\delta}$ komşuluğunda kaldığında $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in de $\mathbf{L}$ nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ komşuluğunda kalması	3	11	6
	Boş	0	23	10
	Toplam	100	100	100

Tablo 2'deki veriler genel olarak değerlendirildiğinde, öğrenciler en çok yaklaşma kelimesini kullanarak limit tanımını açıklamaya çalışmışlardır (%26). Bu kategorideki öğrencilerin bazıları sadece fonksiyonun tanım kümesine ya da değer kümesine odaklanmışlar, "*a ya sağdan ve soldan* *yaklaşmadır*" ve "*Fonksiyonun bir değere yaklaşmasıdır*" şeklinde yorumlar yapmışlardır. Bazıları da hem tanım hem değer kümesini dikkate almışlardır. Bu öğrencilerden bir kısmı limit tanımını "*x ler a ya yaklaşırken görüntülerin de L sayısına yaklaşması*" olarak açıklarken bir kısım öğrenci de bu öğrencilerden farklı olarak fonksiyonun L değerini almasının gerekli olduğunu ifade ederek "*x ler a ya yaklaşırken görüntülerinin de L ye yaklaşmasıdır*" şeklinde açıklama yapmışlardır. Öğrencilerin %24'ünün limit tanımını sembolik olarak ifade etmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu öğrenciler limit tanımında bulunan ifadeleri çoğunlukla okumaya çalışmışlardır. Limit tanımının matematiksel ve sezgisel anlamından daha çok sembolleri okumaya odaklanmışlardır. Bu kategorideki öğrenciler diğerlerinden ayıran özellik, tanımı kendi cümleleri ile açıklama yerine tanımda yer alan ifadeleri kullanarak yorumlamaya çalışmalarıdır. Söz konusu yorumlar tanımda bulunan sembolleri olduğu gibi okumaya dayalı olan yüzeysel açıklamalardır. Bu öğrencilerin bir kısmı tanımda bulunan eşitsizlikleri doğrudan okuyarak limit tanımının "$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ *$\boldsymbol{\delta}$ dan küçük iken* $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|$ *nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ dan küçük olması*" olduğunu ifade etmişlerdir. Bazı öğrenciler limit tanımını "*Fonksiyon ile limit arasında $\boldsymbol{\varepsilon}$ kadar fark olmasıdır*" ve "*Bu limitin tanımıdır*" şeklinde yorumlamışlardır. Öğrencilerin %20'si limit tanımını komşuluk kavramı ile açıklamaya çalışmıştır. Bu öğrencilerin yaklaşık üçte ikisi sadece fonksiyonun tanım kümesine odaklanarak "*x değerlerinin a nın $\boldsymbol{\delta}$ komşuluğunda kalmasıdır*" ve "*x in a nın delik komşuluğunda* $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}$ *olması*" yorumlarını yaparken üçte biri limit tanımını, "*x ler a nın $\boldsymbol{\delta}$ komşuluğunda kaldığında $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in de $\boldsymbol{L}$ nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ komşuluğunda kalmasıdır*" açıklamasını yaparak, kendi cümleleri ile doğru bir şekilde izah etmişlerdir. Öğrenciler son sırada, limit tanımını kullanarak uygulama yapmaya dayalı olan işlemsel ifadeler kullanarak açıklamaya çalışmışlardır (%16). İşlemsel açıklama yapan öğrenciler çoğunlukla daha önceki limit sorularında yaptıkları çözümlere dair özel bilgiler vermeye çalışmışlardır. Bu bilgiler $\boldsymbol{\delta}$ sayısının bulunması sürecindeki bilgilerdir. Bu yorumlardan bazıları "$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|$ *da* $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ *bulup benzetmeliyiz*", "$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\varepsilon}$ *gibi bir eşitlik elde ediliyorsa limit vardır*", "$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\boldsymbol{\delta}$ *ifadesini kullanarak f(x)-L yi $\boldsymbol{\varepsilon}$ gibi bir değerden küçük kalıp kalmadığına bakılır, delta epsilona bağlı çıkar*" şeklindedir.

İkinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin limit tanımına yönelik anlayışları karşılaştırıldığında, ikinci sınıf öğrencilerin dördüncü sınıf öğrencilerine göre daha çok oranda işlemsel, sembolik açıklamalar yaptıkları ortaya çıkmıştır. Komşuluk kavramını kullanarak açıklama yapmada birbirine yakın oranlarda açıklama yapmışlardır. İkinci sınıf öğrencileri bu soruya yanıt verirken dördüncü sınıf öğrencilerin yaklaşık beşte biri bu soruya bir açıklama getirememiştir. Bu tanımı matematiksel gerçeklerle uyumlu bir şekilde açıklayabilen öğrencilerde de dördüncü sınıf öğrencileri oransal olarak daha başarılı olmuşlardır.

Öğrencilerin limit tanımında bulunan matematiksel ifadeleri nasıl yorumladıklarını ortaya çıkarmak için tanımda bulunan "$\mathbf{0}<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\boldsymbol{\delta}$" ifadesinin ne anlama geldiği sorulmuştur. *a* noktasının $\boldsymbol{\delta}$ delik komşuluğu anlamında olan bu ifadeye yönelik öğrencilerin görüşlerinin toplam üç kategori ve 11 alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 3'te kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3. Öğrencilerin Limit Tanımında Bulunan "$\mathbf{0}<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\boldsymbol{\delta}$" İfadesini Yorumlama Şekilleri

Kategoriler	Alt Kategoriler	İkinci Sınıf (%)	Dördüncü Sınıf (%)	Toplam (%)
Komşuluk	*a* nın $\boldsymbol{\delta}$ komşuluğu	19	33	27
	a nın $\boldsymbol{\delta}$ delik komşuluğu	16	4	10
	$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{\delta}$ komşuluktadır.	3	0	2
	x in *a* komşuluğu	3	7	5
	a nın *x* komşuluğu	3	0	2
Sembolik-Yüzeysel	*x* ile *a* nın farkı çok küçük pozitif bir sayıdır	23	0	12
	sıfır küçüktür mutlak *x* eksi *a* küçüktür delta	6	15	10
	x-a, 0 ile $\boldsymbol{\delta}$ arasında	19	0	10

Yakınsama-Yaklaşma	*x a* ya yakınsar	3	3	3
	x-a nın $\boldsymbol{\delta}$ ya yaklaşması	0	15	7
Sınır	Yığılma noktasının sınırı	3	7	5
	Boş	0	15	7
	Toplam	100	100	100

Tablo 3'teki bulgular genel olarak değerlendirildiğinde, öğrencilerin bu ifadeyi açıklarken komşuluk, yaklaşma-yakınsama ve sınır kavramlarını kullandıkları ya da söz konusu ifadedeki sembollere odaklanarak tekrarladıkları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin yaklaşık yarısı komşuluk kavramını kullanarak açıklama yapmaya çalışmışlardır (%46). Bu öğrenciler bu topolojik ifade için sırasıyla "*a nın* $\boldsymbol{\delta}$ *komşuluğu*", "*a nın* $\boldsymbol{\delta}$ *delik komşuluğu*", "*x in a komşuluğu*", "$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{\delta}$ *komşuluktadır*" ve "*a nın x komşuluğu*" ifadelerini kullanmışlardır. Öğrencilerin %37'si bu ifadenin matematiksel anlamı ile örtüşebilecek doğru açıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin %32'sinin görüşleri de çoğunlukla ifadelerin tekrar edilmesine dayanan yüzeysel açıklamalardır. Bu açıklamalarda sembollerin okunuşları ön plandadır. "*x ile a nın farkı çok küçük pozitif bir sayıdır* "*x-a, 0 ile* $\boldsymbol{\delta}$ *arasında*" açıklamaları ile "*sıfır küçüktür mutlak x eksi a küçüktür delta*" gibi ifadenin doğrudan okunuşu ile ilgili olan açıklamalarbu kategori altında toplanmıştır. Öğrencilerin %10'luk bir kısmı da "*x a ya yakınsar*" ve "*x-a nın* $\boldsymbol{\delta}$ *ya yaklaşması*" yorumlarını yaparak yaklaşma-yakınsama terimlerini kullanmışlardır. Öğrencilerin %5'i söz konusu ifadenin "*Yığılma noktasının sınırını*" temsil ettiğini belirtmiştir. Öğrencilerin %7'si ise bu soruyu boş bırakmışlardır.

Sınıflar bazında bir değerlendirme yapıldığında komşuluk kategorisinde birbirine yakın oranlarda açıklamalar yapıldığı görülmüştür. İkinci sınıf öğrencilerin yaklaşık yarısı sembolik açıklama yapmışlardır (%48). Dördüncü sınıf öğrencileri ise daha çok yaklaşma-yakınsama terimlerini kullanmış ve soruyu boş bırakmışlardır.

Öğrencilerin formel limit tanımında bulunun diğer topolojik ifade olan "$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}$" ifadesinin ne anlama geldiği sorulmuştur. Buradaki topolojik ifade $\boldsymbol{L}$ nin epsilon komşuluğundaki fonksiyon görüntülerini temsil etmektedir. Öğrencilerin ifadelerinin 12 alt kategori ve dört kategoride toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4'te kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4. Öğrencilerin Limit Tanımında Bulunan "$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}$" İfadesini Yorumlama Şekilleri

Kategoriler	Alt Kategoriler	İkinci Sınıf (%)	Dördüncü Sınıf (%)	Toplam (%)
Sembolik-Yüzeysel	Fonksiyon ile limiti arasındaki fark yeterince küçük pozitif sayı	44	4	25
	$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}$ olmalıdır	24	16	20
	$\boldsymbol{a}$ noktasının $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ deki limiti	3	8	5
	$\boldsymbol{\varepsilon}$ dan küçük *L* sayısı vardır	0	4	2
Komşuluk	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, *L* nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ komşuluğundadır	10	20	14
	$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|$ nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ un komşuluğunda olması	3	0	2
	L, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in komşuluğunda	3	4	4
Yaklaşma	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in *L* ye yaklaşması	0	8	4
	Limit değerinin $\boldsymbol{\varepsilon}$ a yaklaşması	0	8	4
Yığılma noktası	*L* noktası, fonksiyonun yığılma noktası	3	12	7
Süreklilik	Sürekli fonksiyon	3	0	2

Maksimum	Fonksiyonun alacağı en büyük değer	3	0	2
	Boş	3	16	9
	Toplam	100	100	100

Tablo 4 incelendiğinde öğrencilerin yarısına yakınının sembolik açıklamalar yapmaya çalıştığı yani açıklamalarının ifadenin tekrar edilmesi şeklinde olduğu ve öğrencilerin topolojik kavramı kendi cümleleri ile ifade edemedikleri tespit edilmiştir (%52). Bu öğrenciler çoğunlukla sembolik ifadeleri okumaya çalışmışlardır. Söz konusu topolojik kavramı "*Fonksiyon ile limiti arasındaki fark yeterince küçük pozitif sayı*", "$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}$ *olmalıdır*", "$\boldsymbol{a}$ noktasının $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ deki limitidir" ve "$\boldsymbol{\varepsilon}$ *dan küçük L sayısı vardır*" şeklinde yorumlamışlardır. Sembolik-yüzeysel kategorisi dışındaki yorumlarda öğrenciler farklı kavramlarla ilişkilendirerekaçıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin beşte biri bu ifadeyi komşuluk kavramı ile açıklamaya çalışmıştır. Bu ifadenin "$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$*, L nin* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *komşuluğunda olması*", "$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}|$ *nin* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *un komşuluğunda olması* " ve "*L,* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *in komşuluğunda olması*" anlamına geldiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin %14'ü bu topolojik ifadenin matematiksel karşılığı olan L nin $\boldsymbol{\varepsilon}$ komşuluğu ifadesini kullanmıştır. Öğrencilerin %8'i yaklaşma kavramını kullanarak açıklama yapmaya çalışmışlardır. Bu kategorideki öğrenciler ifadeyi "$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *in L ye yaklaşması* " ve "*Limit değerinin* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *a yaklaşması*" olarak yorumlamışlardır. Öğrencilerin %7'si bu ifadenin "*L noktasının fonksiyonun yığılma noktası olmasını*" ifade ettiğini belirtmiştir. Çok az sayıda da olsa (%4), bu ifadenin "*Fonksiyonun sürekli olması*" ve "*Fonksiyonun alacağı en büyük değer*" anlamı taşıdığını belirten öğrenciler olmuştur. Öğrencilerin %9'u bu soruya yanıt vermemiştir.

Sınıf düzeylerine göre bir değerlendirme yapıldığında ikinci sınıf öğrencilerin dördüncü sınıf öğrencilerine göre daha çok sembolik-yüzeysel açıklamalar yapmaya çalıştıkları ortaya çıkmıştır (%71-%32). Komşuluk kavramını kullanarak açıklama yapan öğrencilerin sınıflar bazında oranları birbirine yakın seviyededir (%16-%24). Yaklaşma kelimesini kullanarak açıklama yapan öğrenciler sadece dördüncü sınıf öğrencileridir. Bu soruya cevap vermek istemeyen öğrenciler dördüncü sınıfta çoğunluktadır.

Tanımı irdelemek amacıyla sorulan son soru ise tanımda yer alan $\boldsymbol{\varepsilon}$ (epsilon) ile $\boldsymbol{\delta}$ (delta) arasında ne gibi bir ilişkinin olduğuna yöneliktir. Bilindiği gibi bu tanımda verilen her epsilon değerine karşılık epsiona bağlı en az bir pozitif delta sayısının bulunması gerekmektedir. Dolayısıyla burada beklenen cevap, tanımda bulunması istenin delta sayısının epsilona bağlı bir değer olması şeklindedir. Öğrencilerin bu soruya verdikleri yanıtların üç kategori ve bu kategoriler altında toplam dokuz alt kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 5'te kategoriler hakkında bilgiler verilmiştir.

Tablo 5. Öğrencilerin $\boldsymbol{\varepsilon}$ ile $\boldsymbol{\delta}$ Arasındaki İlişkiye Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Alt Kategoriler	İkinci Sınıf (%)	Dördüncü Sınıf (%)	Toplam (%)
Özellik	İkisi de sıfırdan büyük yeterince küçük sayılardır	32	18	25
	$\boldsymbol{\delta}$ yığılma noktasının $\boldsymbol{\varepsilon}$ fonksiyonun aralığıdır	11	7	9
	$\boldsymbol{\delta}$ sabit, $\boldsymbol{\varepsilon}$ değişkendir	0	4	2
	$\boldsymbol{\delta}$ artma, $\boldsymbol{\varepsilon}$ yaklaşmadır	0	7	4
Nicelik	$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\delta}$ olmalıdır	21	0	11
	$\boldsymbol{\varepsilon}\leq\boldsymbol{\delta}$ olmalıdır	4	15	9
Bağımlılık	$\boldsymbol{\delta}$ ile $\boldsymbol{\varepsilon}$ birbirine bağlıdır	7	0	4
	$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\delta}$ ya bağlıdır	7	15	11
	$\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ *a* bağlıdır	18	15	16

Boş	0	19	9
Toplam	100	100	100

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin epsilon ile delta sayıları arasındaki ilişkiyi; bu sayıların özellikleri, nicelikleri ve değişkenlerin birbirine bağlılıklarıaçısından değerlendirdikleri ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin %40'ı bu sayıları özellikleri bakımından değerlendirmiştir. Öğrenciler "*İkisi de sıfırdan büyük yeterince küçük sayılardır*", "*$\boldsymbol{\delta}$ yığılma noktasının $\boldsymbol{\varepsilon}$ fonksiyonun aralığıdır*", "*$\boldsymbol{\delta}$ sabit, $\boldsymbol{\varepsilon}$ değişkendir*" ve "*$\boldsymbol{\delta}$ artma, $\boldsymbol{\varepsilon}$ yaklaşmadır*" yorumlarını yapmışlardır. Öğrencilerin bu kategorinin oluşmasını sağlayan görüşlerin tanımdan çıkarılabilecek sonuçlar olmadığı görülmektedir. Öğrencilerin beşte biri ise iki sayıya niceliksel olarak yaklaşmışlardır. Bu iki sayı için büyüklük-küçüklük kıyaslaması yapmaya çalışmışlardır. Bu konuda "*$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\delta}$ olmalıdır*" ve "*$\boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\delta}$ olmalıdır*" şeklinde iki karşılaştırma ortaya çıkmıştır. Son olarak, öğrencilerin %31'i iki sayıyı birbirine bağımlılıkları açısından incelemişlerdir. Öğrenciler "$\boldsymbol{\delta}$ ile $\boldsymbol{\varepsilon}$ birbirine bağlıdır", "$\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\delta}$ ya bağlıdır" ve "$\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$'a bağlıdır" yorumlarını yapmışlardır. Öğrencilerin kendilerinden beklenen yanıt olan deltanın epsilona bağlı olması gerektiği yanıtı sadece öğrencilerin %16'sı tarafından verilmiştir.

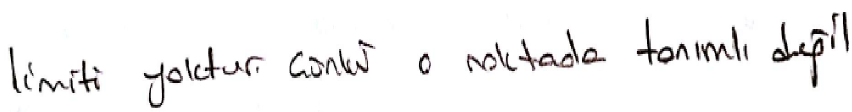
Sınıflar düzeyinde bir karşılaştırılma yapıldığında ise bu iki sayı arasındaki ilişkiyi özellik ve nicelik bakımından en çok oranda açıklama yapan öğrencilerin ikinci sınıf öğrencileri olduğu tespit edilmiştir. Bağımlılık açısından açıklama yapan öğrencilerin oranları iki sınıfta da benzer orandadır. Bu soruya yanıt vermeme oranı dördüncü sınıflarda bariz bir şekilde daha yüksektir.

Öğrencilerin limit tanımında limitin araştırıldığı noktaların özelliklerini dikkate alıp olmadıklarını ortaya çıkarmak için bir problem sorulmuştur. Öğrencilere "$\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x}$ biçiminde verilen bir ifadenin limiti hakkında ne söyleyebilirsiniz?" şeklinde problem sorulmuştur. Bu soruda öğrencilerden beklenen cevap, limit tanımında belirtildiği üzere, limiti aranacak noktanın fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olması gerektiğini ifade edip limitin -2 noktasında aranamayacağını belirtmesidir. Öğrencilerin çözümlerindeki argümanların gerekçeleri incelenmiştir. Tablo 6'da öğrencilerin buldukları limit değerleri ve gerekçeleri sunulmuştur.

Tablo 6. Öğrencilerin Fonksiyonun Limitine Yönelik Verdikleri Yanıtlar ve Gerekçeleri

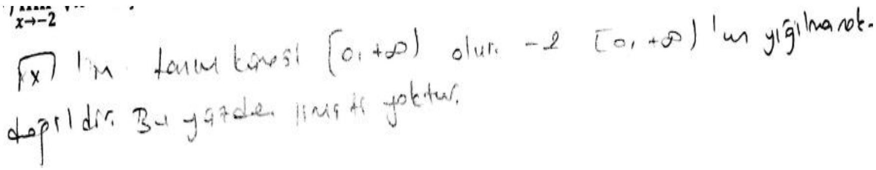
Limit	Gerekçe	İkinci Sınıf (%)	Dördüncü Sınıf (%)	Toplam (%)
Yoktur	-2 noktasında fonksiyon tanımsızdır	84	45	64
	-2 noktası tanım kümesinin yığılma noktası değildir	13	0	7
	Açıklama yok	0	21	10
Mevcuttur	Limiti aranan noktanın tanımlı olması gerekmez	0	3	2
	Açıklama yok	3	3	3
Boş		0	28	14
Toplam		100	100	100

Tablo 6 incelendiğinde öğrencilerin çoğunun net bir şekilde bu limitin olmadığını belirttikleri ortaya çıkmıştır (%81). Bu kararı vermedeki gerekçelerine bakıldığında ise, "*-2 noktasının fonksiyonda tanımsız olmasının*" düşünüldüğü açık bir şekilde görülmektedir. Bilindiği gibi asıl gerekçe bu olamaz. Çünkü limiti aranacak olan nokta fonksiyonda tanımlı olmak zorunda değildir. Şekil 1'de bu yanlış gerekçeye dayanarak karar veren örnek öğrenci ifadesi sunulmuştur.



Şekil 1. Yanlış gerekçe

Doğru gerekçeyi ifade eden öğrencilerin sadece ikinci sınıf öğrencilerinden geldiği ve toplamda sadece öğrencilerin %7'si tarafından dile getirildiği ortaya çıkmıştır. Buna göre öğrencilerin limit tanımında yer alan ve limiti aranacak olan noktanın yığılma noktası olması bilgisini göz ardı ettikleri ya da önemsemedikleri ortaya çıkmıştır. Limitin mevcut olduğu söyleyen çok az sayıdaki öğrenciler de uygun bir gerekçe üretememişlerdir. Yine dördüncü sınıf öğrencileri bu soruyu boş bırakma davranışı sergilemişlerdir. Şekil 2'de doğru gerekçe sunan örnek öğrenci ifadesi sunulmuştur.



Şekil 2. Doğru gerekçe

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Öğrencilerin limit tanımına yönelik yorumlarının irdelendiği çalışmada ilk olarak limitin epsilon-delta tanımı öğrencilere sunulmuş ve bu tanımdan ne anladıkları sorulmuştur. Öğrencilerin çoğunun limitin formel tanımını kendi cümleleri ile ifade edemedikleri tespit edilmiştir. Öğrenci ifadelerinin çoğu formel tanımın belirttiği matematiksel gerçeklerle uyuşmamıştır. Öğrencilerin limit tanımına yönelik yorumları incelendiğinde, yapılan bazı açıklamaların tanımda bulunan ifadelerin tekrar edilmesine dayanan sembolik-yüzeysel anlamaya dayalı olduğu ortaya çıkmıştır. Bazı öğrencilerin ifadelerinde yaklaşma ve komşuluk kavramları yer almıştır. Öğrencilerin bir kısmı da limit tanımını açıklarken sadece işlemsel açıklamalar yapmaya çalışmışlardır. Bu öğrenciler muhtemelen tanım kullanılarak yapılan limit bulma işlemlerinde yaptıklarını hatırlamaya çalışmışlardır. Buna göre öğrencilerin çoğunun formel limit tanımını içselleştiremedikleri söylenebilir. Güçler (2014) de çalışmasında öğrencilere limitin formel tanımında ne anladıklarını sormuştur. Öğrenciler, bu tanımın çoğunlukla işlemsel ve süreç odaklı olduğunu ifade etmişlerdir. Çalışmanın sonucunda limit kavramının öğretiminden sorumlu olan eğitmenin söylemlerinin limit notasyonunun işlem ve ürün özellikleri arasında değişkenlik gösterirken öğrencilerin ise limit notasyonunu işlemsel olarak gördükleri tespit edilmiştir.

Çok az sayıda öğrenci formel tanımın matematiksel ya da sezgisel anlamına yönelik doğru açıklamalar yapabilmiştir. Bu durum öğrencilerin çoğunun limit tanımına yönelik Bloom taksonomisine göre kavramsal bilgi düzeyinde olmadıklarını ya da kavramsal bilgilerinin yeterli olmadığı ortaya çıkarmıştır. Baki'nin (2014) de belirttiği gibi kavramsal bilgi, kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir. Fernández-Plaza, Rico ve Ruiz-Hidalgo'nun (2013) çalışmasından elde edilen sonuçlarda öğrencilerin limit tanımına yönelik kavramları açıklarken gelişmemiş ve yanlış bir matematiksel dil kullandıkları belirlenmiştir. Elde edilen bu sonuçlar öğrencilerin limit tanımın anlamakta güçlük yaşadıkları ve limit tanımına yönelik ortak görüşlerinin olmadığı çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Akbulut ve Işık, 2005, Barak, 2007; Cottrill vd., 1996; Çolak, 2002; Fernández-Plaza vd., 2013; Güçler, 2013; Jordaan, 2005; Juter, 2006; Tall ve Vinner, 1981; Wiliams, 1991).

Öğrencilerin formel limit tanımını nasıl yorumladıklarını daha detaylı incelemek ve öğrencilerin limit tanımını anlamakta neden güçlük yaşadıklarını belirleyebilmek için tanımda yer alan topolojik ifadelerin ve sembollerin ne anlama geldikleri öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin ifadeleri incelendiğinde, bu güçlüğün sebebinin öğrencilerin limit tanımında bulunan topolojik ifadeleri ve matematiksel sembollerin ne anlama geldiğini hakkında yeterince bilgi sahibi olmamaları ve anlamlandıramamaları olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrenciler özellikle tanımda yer alan epsilon ve delta sembolleri arasındaki ilişkiye yönelik çok azının bilgi sahibi olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durum daha önceki çalışmalarda tespit edilen öğrencilerin tanımda yer alan varlıksal niceleyicileri anlamadıkları yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Cottrill vd., 1996; Juter, 2006; Tall ve Vinner, 1981).

Öğrencilerin topolojik ifadelere yönelik açıklamaları ile limit tanımıyla ilgili yorumları birbiri ile paralellik göstermiştir. Öğrenciler topolojik ifadeleri yorumladıkları şekilde limit tanımını açıklamaya çalışmışlardır. Buna göre öğrencilerin tanımda yer alan topolojik ifadeleri anlayışlarının, limit tanımına yönelik anlayışlarını şekillendirdiği söylenebilir. Bu durumun, Mamona-Downs'un (2001) da belirttiği gibi limit tanımında yer alan eşitsizlik ifadelerinin öğrenciler için ilk göze çarpan bileşenler olduğundan kaynaklandığı düşünülmüştür. Bu düşünce ile paralel olarak Barak (2007), analiz öğrencilerinin tanımda yer alan topolojik ifadelerin kullanılmasında sorun yaşandığını da belirtmiştir. Baki ve Çekmez (2012) de çalışmasında, ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerinin limit tanımı içerisindeki eşitsizlikleri anlama ve yorumlama konusunda sıkıntı yaşadıklarını belirtmişlerdir. Yapılan araştırmalar öğrenciler arasında limit kavramının tam olarak anlaşılmasının çok nadir bir durum olduğunu ortaya çıkarmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991).

Öğrencilere yöneltilen problem, öğrencilerin tanımda bulunan önemli bilgiyi ne ölçüde kullanabildikleri ya da önemsediklerini anlamak için seçilmiştir. Öğrencilerin tamamına yakının çözümlerinde limit tanımında yer alan bu özelliğin göz ardı edildiği ve problem çözümlerinde kullanılmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin çoğu fonksiyonun tanımlı olmadığı noktada limitinin olamayacağı inancına sahiptir. Limit kavramını tanımlı olma kavramı ile eş tutma durumu literatürde yer alan bir kavram yanılgısı olup (Barak, 2007; Baştürk ve Dönmez, 2011) bu çalışmada da öğrencilerin problem çözümlerinde kullandıkları argümanlarda tespit edilmiştir.

Bu sonuçlara göre limitin formel tanımının öğretimi sırasında tanım içerinde yer alan topolojik ifadelerin ve sembollerin taşıdıkları matematiksel anlamlar üzerinde durulmasının önemi ortaya çıkmıştır. Özellikle limitin epsilon-delta tanımı görsel materyaller kullanılarak açıklanmalı ve tanım içerisindeki topolojik ifadeler ve semboller belirtilmelidir. Bu sayede öğrencilerin tanımda bulunan ifadelerin matematiksel anlamlarını kavramaları, dolayısıyla limit tanımını içselleştirmeleri sağlanabilir. Öğretim sırasında limit aranacak noktanın öncelikle yığılma noktası olması gerektiği vurgulanmalıdır. Ayrıca limit kavramının öğretiminde bir noktada tanımlı olmayan fakat limiti olan fonksiyon örnekleri sunularak öğrencilerin yaptıkları yanlış yorumları sorgulamaları ve kavram tanımına uygun anlayışa sahip olmaları sağlanabilir.

Üniversite seviyesinde limit kavramının öğretiminin yapıldığı Analiz I dersini henüz tamamlamış olan ikinci sınıf öğrencileri ile limit kavramına yönelik daha olgun düşünceleri olabileceği düşünülen son sınıf öğrencilerinin çalışmadaki performansları ayrıca incelenmiştir. İkinci sınıf öğrencileri limit tanımını yorumlamaları daha çok sembolik ve yüzeyseldir. Yani öğrenciler limit tanımını kendi cümleleri ile tarif etmek yerine ifadeleri okumaya çalışmışlardır. Aynı durum limit tanımı içerisinde yer alan matematiksel ifadeler için de geçerlidir. Öğrenciler bu ifadeleri yüzeysel olarak tekrar ederek açıklamaya çalışmışlardır. Diğer taraftan dördüncü sınıf öğrencilerinin ikinci sınıf öğrencilerine göre göze çarpan özellikleri ise limit tanımını kendi cümleleri ile ifade ederken yaklaşma kavramını kullanmaları olmuştur. Bu açıklamaların sebebi ise tanımda yer alan topolojik ifadeleri anlamlandırmalarından kaynaklandığı düşünülmüştür. Çünkü bu öğrenciler toplolojik ifadeleri de yaklaşma kavramı ile açıklamaya çalışmışlardır. Bu durum Güçler (2013) tarafından üniversite seviyesinde ilk defa limit öğretimini tamamlayan öğrencilerle yapılan çalışmanın sonuçlarını hatırlatmıştır. Söz konusu öğrencilerin çoğunluğunun hareket metaforuna dayanan dinamik bir limit görüşüne sahip olduklarını belirtmiştir. Buna karşın dördüncü sınıf öğrencileri ikinci sınıf öğrencilerine göre soruları boş bırakma oranı daha yüksektir.

Benzer bir çalışma Barak (2007) tarafından yapılmıştır. Barak (2007) çalışmasında ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü birinci ve beşinci sınıf öğrencilerinin limit konusundaki kavram yanılgılarını karşılaştırmıştır. Çalışmasının sonucunda her iki gruptaki öğrencilerin limit tanımı anlayışlarının ezber temeline dayandığını, fonksiyonun bir noktada limiti var ise tanımlıdır görüşünde olduklarını ve birinci sınıf öğrencilerinin son sınıf öğrencilerinden daha az kavram yanılgısı taşıdıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada da her iki gruptaki öğrencilerin çoğu limit tanımı ve içersindeki topolojik ifadeler ve sembolleri matematiksel olarak doğru yorumlama konusunda başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bu çerçeveden bakıldığında çalışmadan elde edilen bu anlamda Barak (2007) tarafından yapılan çalışma sonuçları ile paralellik göstermiştir. Bu çalışma öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarına odaklanmadığı için birinci sınıf öğrencileri ile son sınıf öğrencilerinin çalışmadaki performansları Barak'ın (2007) çalışmasıyla doğrudan karşılaştırılamamıştır. Buna rağmen öğrencilerin formel tanıma yönelik yapılan yorumlar matematiksel doğruluk anlamında incelendiğinde, ikinci ve dördüncü sınıf öğrencileri arasında oransal olarak dikkat çekici bir farklılışma göze çarpmamıştır. Her iki grubun çalışmadaki herhangi bir etkinlikte doğru yorumlarda bulunma oranı yaklaşık %13'tür. Ortaya çıkan bu durum Barak'ın (2007) çalışma sonuçlarını dolaylı da olsa desteklememiştir. Bu durum limit tanımının öğrenciler için anlaşılması zor bir durum olduğunu göstermiştir. Bu nedenle limit tanımının öğretimini olumlu anlamda etkileyecek çalışmaların yapılması önerilebilir. Bu çalışma nitel araştırma yaklaşımı esas alınarak 60 ikinci ve dördüncü sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencileri ile yapılmıştır. Çalışmada limitin formel tanımı üzerine odaklanılmıştır. Benzer çalışmalar fonksiyon, türev, integral gibi öğrenciler tarafından anlaşılmasında güçlük yaşanılan kavramların tanımlarına yönelik yapılabilir. Özellikle üniversite seviyesindeki matematik derslerinin öğrencilerin kavram tanımları ve kavram imajları üzerindeki etkisi araştırılabilir. Bu çalışmalardan elde edilecek sonuçların hem literatüre katkı hem de ilgili derslerin öğretim kalitesinin arttırılması adına yarar sağlayacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

Akbulut, K. ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *13*(2), 497-512.

Anderson L.W. ve Krathwohl, D.R. (2001). *Taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Arslan, S. ve Çelik, D. (2013). Zor sanılan iki kavram: Limit ve süreklilik. İsmail Özgür Zembat vd. (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 463-487). Ankara: Pegem Akademi.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baki, M. ve Çekmez, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 3*(2), 81-98.

Balcı, M. (2008). *Genel matematik I.* (5. Baskı). Ankara: Balcı Yayınları.

Barak, B. (2007). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Başturk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(1), 225-249.

Bekdemir, M. ve Selim, Y. (2008). Revize edilmiş bloom taksonomisi ve cebir öğrenme alanı örneğinde uygulaması. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 185-196.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500.

Birgin, O. ve Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 22*(2), 529-550.

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramlarla ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme*. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. ve Vidakovic, D. (1996). Understanding limitconcept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Çakımcı, T. ve Kabasakal, V. (2016). *Ortaöğretim ileri düzey matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık Ticaret Limited Şirketi.

Çolak, H. (2002). *Limit öğretiminde iki farklı öğretim durumunun karşılaştırılması*. Ankara: Gazi Üniversitesi.

Davis, R. ve Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281-303.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the Notion of limit of a function. *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education*, (pp. 330-333), Grenoble, France.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. ve Ruiz-Hidalgo, J. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 44*(5), 699-710.

Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: The case of limit notation. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 251-268.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on limitconcept in a beginning level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 439-453.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of limitconcept in a mathematics course for engineering students.* Unpublished Master of Science Dissertation, University of South Africa, Pretoria, The Republic of South Africa.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 407-431.

Kabael, T., Barak, B. ve Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu Journal of Educational Sciences International, 5*(1), 88-114.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2003). *Genel matematik*. (3. Baskı). Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.

Keskin, C. (2017). *Ortaöğretim matematik 12 ileri düzey ders kitabı*. Ankara: Dikey Yayıncılık.

Kızıltepe, Z. (2015). İçerik analizi. F.N. Seggie ve Y. Bayyurt (Ed.). *Nitel araştırma yöntem, teknik, analiz ve yaklaşımları* içinde (s. 253-266). Ankara: Anı Yayıncılık.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of limitof a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259-288.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı*. Ankara: MEB Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Musayev B., Alp, M. ve Mustafayev, N. (2007). *Teori ve çözümlü problemlerle Analiz II.* (2. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Osborne, R. ve Freyberg, P. (1985). *Learning in science: The implication of children's science*. Auckland: Heinemann.

Özmantar, M. F. ve Yeşildere, S. (2013). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (s. 181-221). Ankara: Pegem Akademi.

Quesada, A., Richard, L. ve Wiggins, M. (2008). The impact of the graphical approach on students' understanding of the definition of limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 15*(3), 95-102.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior, 30* (2011), 93–114.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Tall. D. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8.baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yüksek Öğretim Kurumu [YÖK] (2014). *İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programı ders içerikleri.* 02.11.2017 tarihinde http://www.yok.gov.tr sitesinden alınmıştır.

Extended Summary

Introduction

Limit is a mathematical concept that is centrally located and takes place in all calculus topics. Therefore, limit is not only an important concept by itself, but also a prerequisite feature to understand other basic concepts of calculus. It has been stated that students have difficulties in the formal defination of limit in the studies of misconceptions in limit. But there are not many studies in the literature regarding this issue. Therefore, it can be said that there is a need for a study focusing on students' understanding of the formal definition of limit. In this way, it is possible to obtain the data about what kind of interpretations students have regarding the formal definition of limit. The purpose of this study is to reveal the interpretations of preservice mathematics teachers towards the definition of limit. For this purpose, the students' interpretations of the formal definition of limit are examined in detail and the answers of the following research questions are searched.

- How do the students interpret the definition of limit?
- How do the students' interpretations to the definiton of limit differ according to the grade levels?

Method

This study designed according to the holistic multiple case study of qualitative research designs and carried out at the beginning of spring semester of 2014-2015 academic year. The participants of the study (n=60) were undergraduate second grade (n=31) and fourth grade (n=29) students studying in the department of primary mathematics teacher training in a state university in the province of Eastern Anatolia of Turkey. The data of the study was collected through the Understanding Protocol for Limit Definition (UPLD) developed by researchers. There are the formal definition of limit (epsilon-delta definition) and five open-ended questions in UPLD. It is aimed to reveal the students' interpretations to limit and the knowledge to the expressions and symbols in the definition of limit with the help of five questions in the protocol. In the development stage of UPLD, a field expert in calculus assisted. The data of the study were collected by filling out the protocol by students. The data collection tool was applied to the students in the classroom and there was no time constraint. The content analysis was used in the analysis of data obtained from the views of students. Inductive content analysis was also preferred in content analysis methods.

Findings

In the study examined students' interpretations to the definitions of limit, firstly epsilon-delta definition of limit was presented to the students and they were asked what they understood from this definition. Accordingly, it had been found that most students couldn't express the formal definition of limit with their own sentences. Most students' expressions did not match the mathematical facts meant by the formal definition of limit. When students' interpretations to the definition of limit were examined, it turned out that some of the explanations of students were based on the symbolic-superficial meanings based on the recurrence of the expressions in the definition of limit. The concepts of proximity and neighbourhood had been appeared in the expressions of some students. Some of the students had tried to make only the operational explanations when they were expressing the formal definition of limit. These students had probably tried to remember that they were doing in the processes of calculating limit value using the formal definition. Accordingly, it could be said that most students did not internalize the formal definition of limit. Very few students were able to make accurate explanations of the mathematical or intuitive meaning of formal definition of limit.

The expressions and symbols in the definition of limit were asked to students what the notations meant in the formal definition in order to determine how students interpreted and why students were having difficulty in understanding the formal definition of limit. When students' expressions were examined, it was found that the reason for this difficulty was that the students did not have enough knowledge of the notations in the definition of limit, and that they could not make sense of those symbols. Very few students had especially knowledge of the relationship between epsilon and delta symbols in the definition of limit. In addition, students' comments to the notations and interpretations related to the definition of limit were matched up with each other. Students tried to explain the definition of limit as they interpreted the notations. According to this finding, it could be said that students' understanding to the notations in the definition of limit shaped their interpretations to the definition of limit.

The performances in the study of second grade students who had completed calculus-I at university in the teaching of limit and senior students who were thought to have more mature thoughts on limit had also been examined. Interpretations to the formal definition of limit of second grade students were more symbolic and superficial. That is, students tried to read notations in the definition of limit instead of interpreting the definition of limit with their own sentences. The same issue was said to notations in the formal definition of limit. Students tried to explain these notations by superficially repeating them. Senior students used the approximation when expressing the definition of limit with their own sentences as compared to second grade students. Senior students were more focused on the intuitive interpretations underflying the formal definition of limit. The reason for these explanations was senior students did not make sense of the notations in the definition of limit. Because these students tried to explain the notations with the approximation. By contrast, senior students were more likely to leave questions blank than second grade students.

Conculusion and Discussion

According to these results, the importance of dwelling on notations and mathematical meanings of symbols emerged during the teaching of the formal definition of limit. Especially, epsilon-delta definition of limit should be explained using visual materials and specified the notations and symbols in the definition of limit. In this way, students can make sense of the mathematical meanings of the expressions in the definition of limit. Thus, it is derivable to be internalized the formal definition of limit by students. It should be emphasized that limit searched point firstly should be derived point during the teaching. Examples of functions that are not defined at a point but which have limit are presented to students. Students can develop an understanding that is appropriate to the definition of the concept when they are confronted with their mistakes and misconceptions.