



# Academic Research Journal of Technical Vocational Schools

artes@cumhuriyet.edu.tr

Founded: 2022

Available online, ISSN: 2822-5880

Publisher: Sivas Cumhuriyet University

## An Investigation on The Modal Properties of A Viscoelastically Connected Cantilever Beam Carrying Mass At Its End

Aydın Demir<sup>1,a\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Sivas Cumhuriyet University, Sivas, Türkiye

\*Corresponding author

Research Article

History

Received: 02/01/2025

Accepted: 15/01/2025

### ABSTRACT

In this study, the effects of the connection point stiffness and damping of a cantilever beams with a viscoelastic connection carrying a mass at its end on its modal properties were investigated in detail. Although viscoelastic materials used as surface damping in structures are effective for vibration and sound insulation, they cannot be applied at all times and under all conditions. In this case, the use of viscoelastic materials in connections is one of the preferred methods. The viscoelastic connection was modeled using spring elements with complex rigidity in linear and rotational directions. The problem considered was examined within the framework of simple beam theory and the differential equation and boundary conditions of the Bernoulli-Euler beam were used as starting points. The modal parameters of the cantilever beam were obtained by iteratively solving the extracted characteristic equation. The numerical results were examined as natural frequencies and modal damping ratios of the system by changing the linear and rotational properties of the viscoelastic connection.

**Keywords:** Viscoelastic connection, cantilever beam, end mass, modal properties

## Uç Kısmında Kütle Taşıyan Viskoelastik Bağlantılı Bir Ankastre Kirişin Modal Özellikleri Üzerine Bir Araştırma

Süreç

Geliş: 02/01/2025

Kabul: 15/01/2025

### Öz

Bu çalışmada, ucunda kütle taşıyan viskoelastik bağlantılı ankastre çubuğun bağlantı noktası rijitlik ve sönümünün modal özelliklerine etkisi detaylı olarak incelenmiştir. Yapılarda yüzey sönümü olarak kullanılan viskoelastik malzemeler, titreşim ve ses yalıtımları için etkili bir uygulama olmalarına rağmen, her zaman ve her koşulda uygulama imkânı bulamamaktadır. Bu durumlarda, bağlantılarda viskoelastik malzemeler kullanılması tercih edilen yöntemlerdendir. Viskoelastik bağlantı doğrusal ve dönme yönünde kompleks rijitliğe sahip yay elemanları kullanılarak modellenmiştir. Ele alınan problem basit çubuk teorisi çerçevesinde incelenmiş, Bernoulli-Euler çubuğuna ait diferansiyel denklem ve sınır şartlarından hareket edilmiştir. Ankastre çubuğun modal parametreleri çıkartılan karakteristik denklemin iteratif çözümüyle elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar, viskoelastik bağlantının doğrusal ve dönme yönündeki özellikleri değiştirilerek doğal frekans ve modal sönüm oranları olarak incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Viskoelastik bağlantı, ankastre kiriş, uç kütle, modal özellikler

Copyright



This work is licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International License

<sup>a</sup> aydindemir@cumhuriyet.edu.tr <sup>ID</sup> <https://orcid.org/0000-0002-8514-2301> |

**How to Cite:** Demir, A. (2024). An Investigation on The Modal Properties Of A Viscoelastically Connected Cantilever Beam Carrying Mass At Its End, Academic Research Journal of Technical Vocational Schools, 3(2):24-30

## Giriş

Mühendislik uygulamalarında, sönümleme malzemesiyle işlenen bileşenler esas olarak kirişler, plakalar, halkalar, kabuklar ve bunların kombinasyonları vb. şeklinde özetlenir. Sönümlü/sönümsüz kiriş yapılarının dinamik tepkisinin bilgisi, mekanik, inşaat, havacılık, nano ve diğer mühendisliğin birçok alanında gereklidir. Kirişlerin istenmeyen mekanik titreşimi, mekanik sistemlerin performansını ve mühendislik süreçlerinin gelişimini önemli ölçüde kısıtlayacaktır. Bu nedenle, kirişlerin titreşimlerinin incelenmesi büyük bir mühendislik önemine sahiptir. Özellikle uç kütle sistemlerini taşıyan çubuklar ve kirişler, çeşitli yapısal ve makine elemanları için genellikle yaklaşık modeller olarak kullanılır. Bu nedenle, bu tür sistemlerin doğal frekanslarını belirleme göreviyle sıklıkla karşı karşıya kalırız.

Viskoelastik davranış, bir malzemenin deformasyona uğradığında hem viskoz hem de elastik özellikler göstermesidir. Polimerler, plastikler, tahta, kauçuk, beton, biyolojik dokular vb. malzemeler viskoelastik özellik gösteren malzemelerdir. Sentetik malzemeler ve teknolojilerdeki artışla birlikte, mühendislik malzemeleri genellikle viskoelastik özellikler gösterir. Viskoelastik malzemeler, titreşim azaltmada, sönümleme işlemlerinde, ses azaltmada, ürün performans ve dayanıklılığının artırılmasında sıklıkla kullanılmaktadır.

Viskoelastik malzemelerle yüzey sönümleme işlemleri, özellikle kiriş ve plak benzeri yapılar için yapıların titreşimini ve gürültüsünü azaltmak amacıyla uzun yıllardır başarıyla kullanılmaktadır. Bu tür yüzey sönümleme işlemleri genel olarak titreşim ve gürültü kontrolünde etkili olsa da, verilen kısıtlamalara bağlı olarak bunları gerçek durumlarda uygulamak her zaman mümkün veya arzu edilmezdir. Bu gibi durumlarda sınır desteklerindeki sönümleme işlemleri yapıların titreşimini azaltmak için alternatif bir çözüm olabilir (Harris, 1998). Viskoelastik elemanların çubuk ve plak tipi yapılarda titreşim ve ses sönümleyici elemanlar olarak yüzeye uygulanan veya belirlenen noktalarda esas yapıya bağlantı elemanı olarak kullanılan uygulamaları mevcuttur. Rotorlarda sabit yatak bağlantılarına uygulama örnekleri vardır.

Kiriş, tek boyutlu sürekli bir sistemin basit bir modeli olduğundan, çeşitli kirişlerin dinamik problemleri büyük ilgi görmüştür. Özellikle mühendisler, çeşitli yapıların titreşim ve sönümleme karakteristiği hakkındaki bilgileri sistematik ve istikrarlı bir şekilde geliştirdiler. Son yıllarda, farklı sınır şartları ve yükleme koşullarına sahip kirişlerin dinamiği ve titreşimi birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve çok sayıda çalışmalar gerçekleştirmiştir. Kang ve Kim (1996), dönme ve ötelemeli karmaşık sertliğe sahip esnek destekler üzerindeki kiriş ve plakaların modal özellikleri hakkında çalışmalar yapmışlardır. Fan ve ark. (1998), karmaşık normal mod analizine dayalı olarak viskoelastik sınır destekli bir kirişin zorlanmış titreşimi için bir analiz yöntemi önermişlerdir. Wineman ve Min (2000) çubuklarda viskoelastik mafsallı bağlantısının formülasyonu üzerine çalışmışlardır. Sun (2002) viskoelastik zemin üzerindeki çubuklarda hareketli yüklerin etkisini Green fonksiyonlarını kullanarak analiz etmiş ve kapalı formda bir çözüm elde etmiştir.

Lei ve ark. (2013), sönümlü viskoelastik yerel olmayan kirişlerin dinamik özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada Kelvin-Voigt ve üç parametrelili standart viskoelastik modeller, hıza bağlı dış sönümleme ve yerel olmayan Euler-Bernoulli kiriş teorisi, nano kirişlerin eğilme titreşimi için yönetici hareket denklemlerini oluşturmak için kullanılmıştır. Demir ve Öz (2014), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir kirişin viskoelastik sınır koşulları altında rezonans frekans davranışı üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada kirişin boyutsuz frekans parametreleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak analiz edilmiş, hareket denklemleri Euler-Bernoulli kiriş teorisi varsayımı altında Lagrange denklemleri kullanılarak türetilmiştir. Peng ve ark. (2016), viskoelastik temeller üzerinde duran elastik kirişleri kapsamlı bir şekilde incelemiş ve üç parametrelili viskoelastik temel üzerinde duran bir Timoshenko kirişinin serbest enine titreşimine odaklanmışlardır. Zhang ve ark. (2017), viskoelastik bir temel üzerinde duran viskoelastik tek duvarlı karbon nanotüp (visko-SWCNT) için titreşim tepkilerini araştırmışlardır. Alipour (2018), viskoelastik sınır destekli bir sandviç plakanın geçici eğilme analizi üzerine çalışmalar gerçekleştirmiştir. Çalışmasında viskoelastik desteği, düzlem içi ve enine yönler boyunca paralel olarak bağlanmış iki set öteleme yayı ve sönümleyici olarak modellenmiştir. Ding ve ark. (2018), dikey yaylarla desteklenen bir viskoelastik kirişin geçirgenliğini yeni bir dikey elastik destek sınırı önerilerek tanımlamışlardır.

Viskoz etkilerden kaynaklanan mekanik enerjiyi yayma yeteneğine sahip elastik malzemeler, viskoelastik malzemeler olarak karakterize edilir. Son yıllarda viskoelastik bağlantılı kirişlerin titreşimleri üzerine çalışmaların kapsamlı bir şekilde yapıldığı da görülmüştür. Birçok araştırmacı, mühendislik endüstrisinin yüksek gereksinimlerini karşılamak için çeşitli çalışmalar gerçekleştirmiştir. Akbas ve ark. (2021) dinamik sinüs darbe yükü altında fonksiyonel olarak derecelendirilmiş gözenekli bir tabakaya sahip kompozit kalın bir kirişin dinamik tepkilerini araştırmışlardır. Kompozit kirişin sınır koşullarını viskoelastik destekler olarak kabul etmişlerdir. Guandong ve Salam (2021), hareketli bir yük altında Euler-Bernoulli kirişlerinin viskoelastik sınır koşullarını ve dinamik tepkisini belirlemek için yeni bir yöntem arayışı sunmuşlardır. Bilinmeyen viskoelastik sınır koşullarına sahip kiriş çıkış tepkilerinin geçirgenlik fonksiyonu için Voigt ve daha genelleştirilmiş dört elemanlı modellerle yeni bir ifade elde etmişlerdir. Nayak ve Dash (2021), kök kısmında viskoelastik destekler bulunan önceden bükülmüş dönen bir sandviç kirişin, periyodik olarak değişen eksenel yük etkisi altındaki kararlılığı üzerinde üst elastik tabakaya yerleştirilen yaylı bir bağlantının etkisini incelemişlerdir. Demir (2023) viskoelastik ve nokta kütle sınır koşulları için eksenel fonksiyonel dereceli (AFG) bir çubuğun frekans parametrelerini incelemiştir. Eksenel yükler altında fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelere sahip yapıları AFG çubukları olarak modellenmiştir. Patil ve ark. (2023), viskoelastik sınır destekli bir sandviç plakanın eğilme ve titreşim analizini çalışmışlardır. Çalışmalarında viskoelastik destek, düzlem içi ve enine yönler boyunca paralel olarak bağlanmış iki set öteleme yayı ve sönümleyiciden

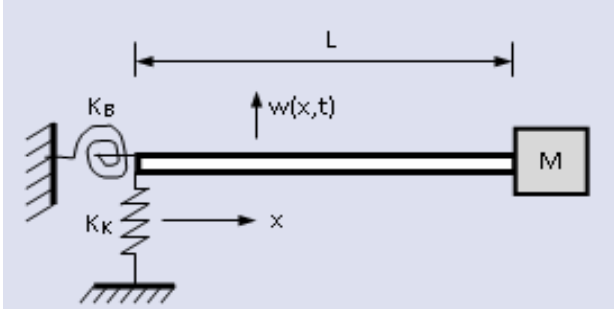
oluşmaktadır. Mohamed ve ark. (2024), burkulma pozisyonu etrafındaki doğrusal olmayan viskoelastik sınır koşullarına sahip eğrisel viskoelastik kirişin doğrusal olmayan zorlanmış titreşimini sayısal olarak incelemiş ve matematiksel bir formülasyon geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada ise doğrusal ve dönme yönlerinde rijitliğe ve sönüm etkisine sahip viskoelastik eleman üzerinden sabit noktaya bağlanan ve diğer ucunda kütle bulunan kiriş için bağlantının özellikleri değiştirilerek elde edilen sayısal çözümlerle sistemin doğal frekansları ve modal sönüm oranları bulunmuş ve etkileri tartışılmıştır. Bu çalışma, özetle viskoelastik bağlantılı uç kısmında kütle taşıyan ankastre bir kirişin titreşimlerini ve modal parametrelerini incelemektedir. Sayısal sonuçlar, boyutsal olmayan öteleme ve dönme sertliği parametrelerinin doğal frekanslar ve modal kayıp faktörleri üzerindeki etkilerini göstermek için üç boyutlu şekiller ve tablolarla sunulmuştur. Sonuçlara dayanarak, istenen modal özellikleri elde etmek için destek sertliği parametrelerini seçme ya da ayarlama işlemi gösterilmiştir. Bu sonuçların pasif titreşim kontrolü için kirişler, şaftlar, borular ve plakalar gibi sistemlerin destek sönümleme işlemlerinin tasarımına katkıda bulunabileceği anlaşılmaktadır.

#### Hareket Denklemi ve Çözümü

Şekil 1'de gösterilen ucunda kütle taşıyan viskoelastik bağlantılı bir ankastre Bernoulli-Euler kirişinin eğilme titreşimlerinin kısmi türevli diferansiyel denklemi (1)'deki gibidir.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$



Şekil 1. Uç kütle taşıyan viskoelastik bağlantılı ankastre kiriş  
Figure 1. The cantilever beam with viscoelastic connection carrying mass at its end.

(1) denkleminde, E kiriş malzemesinin elastisite modülünü, I kirişin kesit atalet momentini göstermektedir.  $w(x,t)$  kiriş eksenini üzerindeki  $x$  noktasının  $t$  anında bu eksene dik olan yer değişimini gösterir. A kesit alanı,  $\rho$  ise malzeme yoğunluğudur.

Kirişin esnek ve sönümlü viskoelastik bağlantısı  $j=\sqrt{-1}$  sanal,  $K_K$ ,  $K_B$ ,  $\eta_K$  ve  $\eta_B$  gerçel sayılar olmak üzere, (2) denkleminde verilen kompleks doğrusal ve burulma yayları kullanılarak tanımlanabilir.

$$K_K^* = K_K (1 + j \eta_K) \quad , \quad K_B^* = K_B (1 + j \eta_B) \quad (2)$$

Şekil 1'de gösterilen kiriş için L kiriş boyu, M uç kütle olmak üzere, sınır şartları (3) denkleminde verilmiştir.

$$\begin{aligned} x=0, \quad EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= K_B^* \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = -K_K^* w(x,t) \\ x=L, \quad \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= 0, \quad EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} = M \ddot{w} \end{aligned} \quad (3)$$

Denklemin çözümü olan  $w(x,t)$ , konum ve zamanın fonksiyonu olarak değişkenlerine ayrılarak birbirinden ayrı olarak yazılabilir.

$$w(x,t) = W(x) e^{j\omega t} \quad (4)$$

(4) denkleminde  $\omega$  titreşim hareketinin frekansını,  $W(x)$  ise titreşim şeklini vermektedir. (4) denkleminin (1) denkleminde yerine konulmasıyla,  $\beta$  frekans parametresi cinsinden

$$W(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (5)$$

elde edilir. Frekans parametresi  $\beta$  ise,

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır. (4) denkleminin, (3) sınır şartları ile birlikte değerlendirilmesi sonucunda (7) denklemiyle verilen matris eşitliği elde edilir.

$$[\Delta(\beta)] \{A \ B \ C \ D\}^T = \{0\} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} K_B^* & \beta EI & K_B^* & -\beta EI \\ -\beta^3 EI & K_K^* & \beta^3 EI & K_K^* \\ -\sin \beta L & -\cos \beta L & \sinh \beta L & \cosh \beta L \\ -EI \cos \beta L + M \frac{EI}{\rho A} \beta \sin \beta L & EI \sin \beta L + M \frac{EI}{\rho A} \beta \cos \beta L & EI \cosh \beta L + M \frac{EI}{\rho A} \beta \sinh \beta L & EI \sinh \beta L + M \frac{EI}{\rho A} \beta \cosh \beta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$K_K$  ve  $K_B$  doğrusal ve burulma yay katsayılarının boyutsuz değerleri  $\bar{K}_K$  ve  $\bar{K}_B$  (8) denklemiyle tanımlanabilir.

$$\bar{K}_K = \frac{K_K L^3}{EI}, \quad \bar{K}_B = \frac{K_B L}{EI} \quad (8)$$

Çubuğun doğal frekanslarını elde etmek için

$$\text{Det}[\Delta(\beta)] = 0 \quad (9)$$

karakteristik denklemi iteratif olarak çözülür. Bu denklemin çözümü ile bulunan doğal frekansların her biri

$$\omega = \omega_r (1 + j\eta_r) \quad (10)$$

formunda kompleks sayılardır. Bulunan kompleks doğal frekans ile sönümlü sistemin doğal frekansı  $\omega_r$  ve modal sönüm oranı  $\eta_r$  belirlenir.

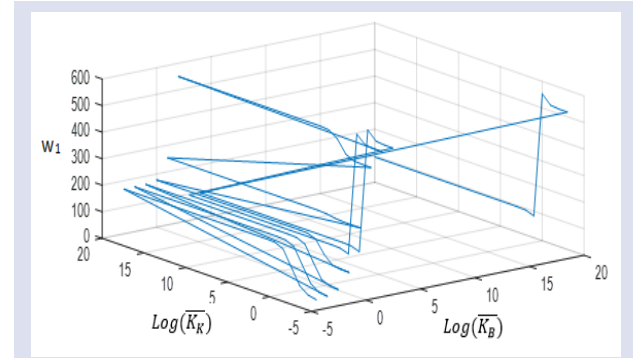
### Sayısal Uygulamalar

Elde edilen sayısal sonuçlarda çubuk uzunluğu 1 m, çubuk kesiti 0.02m x 0.03m, malzeme yoğunluğu  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>, elastisite modülü  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> ve uç kütle  $M=2$  kg olarak alınmıştır. Viskoelastik bağlantı elemanlarında malzeme sönüm oranları  $\eta_K=\eta_B=0.02$  olarak seçilmiş ve iteratif olarak bulunan doğal frekans ve modal sönüm oranları Mathematica (4.0) dilinde yazılan program çalıştırılarak elde edilmiş ve Matlab programı aracılığıyla da üç boyutlu grafikler çizdirilmiştir.

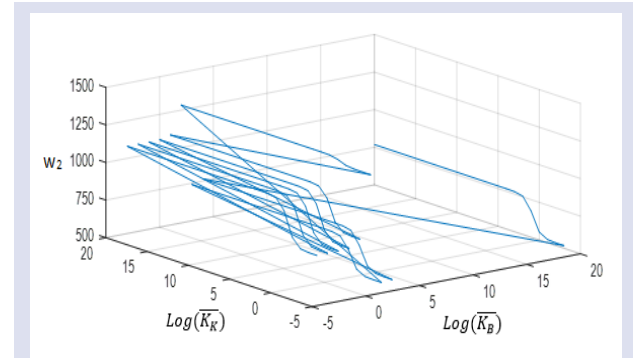
Şekil 2, 3 ve 4'te sırasıyla sistemin birinci, ikinci ve üçüncü doğal frekanslarının boyutsuz  $\bar{K}_K$  ve  $\bar{K}_B$  parametrelerine göre değişimleri gösterilmektedir. Tablo1-6'da ise boyutsuz  $\bar{K}_K$  ve  $\bar{K}_B$  parametreleri değiştirilerek, sistemin bu üç doğal frekansları ve modal sönüm oranları değerleri tablolar halinde verilmiştir. Tablo 2-4'te modal sönüm oranları 0'a çok yakın değerlerde olduğu için değişimleri daha iyi gözlemleyebilmek için  $10^6$  katı değerleri verilmiştir. Boyutsuz  $\bar{K}_K$  ve  $\bar{K}_B$  parametreleri Tablo1-6'da üstel ifadeyle belirtilirken, Şekil 2, 3 ve 4'te ise logaritmaları alınarak değerlendirilmiştir. Tablo 1-6'da azalan ya da artıp azalan değerler koyu olarak gösterilmiştir. Boyutsuz  $\bar{K}_K$  ve  $\bar{K}_B$  parametrelerinin 0'a yakın değerlerinde elde edilen doğal frekanslar, serbest-serbest sınır şartlarındaki kirişin doğal frekans değerlerini vermekte ve sınır şartları nedeniyle sisteme dâhil olan sönüm etkisiz kalarak modal sönüm oranının da 0'a yaklaştığı görülmüştür. Benzer şekilde  $\bar{K}_K$ 'nin 0'a yakın değerlerinde,  $\bar{K}_B$ 'nin artan değerleri için kirişin 1. titreşim biçimi, rijit cisim modu olmakta ve bu moda karşılık gelen doğal frekans 0 değerini almaktadır. Ters durumda,  $\bar{K}_B=0$  iken  $\bar{K}_K$ 'nin artan değerlerinde doğal frekansın yine 0 olduğu

görülmüştür.  $\bar{K}_K$ 'nin büyük değerleri için, bir ucu ankastre diğer ucu serbest sınır şartlarındaki kirişin dinamik davranışlarını gösterdiği görülmüştür. Bu davranış ve kontrollerle sistemin modellenmesinin doğru çalıştığı gözlenmiştir.

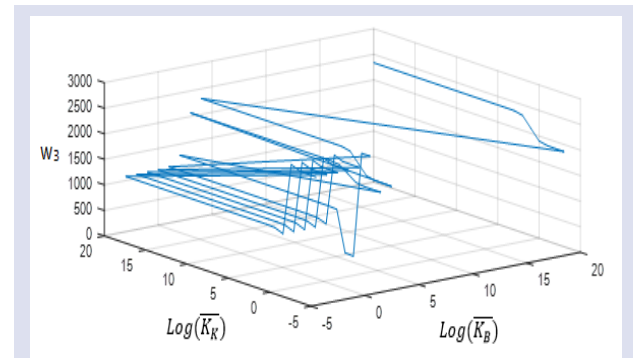
Tablo 1, 3 ve 5 ile Şekil 2, 3 ve 4 birlikte incelendiğinde  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$ 'nin artan değerlerinin, kirişin ilk üç moddaki doğal frekans değerlerinde artmaya neden olduğunu göstermektedir.



Şekil 2. Sistemin birinci doğal frekansının ( $\omega_1$ ) değişimi  
Figure 2. Change of the first natural frequency ( $\omega_1$ ) of the system



Şekil 3. Sistemin ikinci doğal frekansının ( $\omega_2$ ) değişimi  
Figure 3. Change of the second natural frequency ( $\omega_2$ ) of the system



Şekil 4. Sistemin üçüncü doğal frekansının ( $\omega_3$ ) değişimi  
Figure 4. Change of the third natural frequency ( $\omega_3$ ) of the system

Tablo 1. Sistemin birinci doğal frekansları ( $\omega_1$ )Table 1. First natural frequencies of the system ( $\omega_1$ )

$\bar{K}_K$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	4.311	11.512	35.046	94.119	152.674	166.666	168.279	168.443	168.461
$10^{-2}$	8.858	13.613	35.725	94.338	152.772	166.746	168.357	168.521	168.539
$10^{-1}$	26.256	27.970	42.369	96.529	153.754	167.548	169.140	169.302	169.320
$10^0$	81.922	82.413	87.125	117.810	163.679	175.687	177.089	177.231	177.247
$10^1$	241.785	241.823	242.189	244.844	250.505	252.465	252.710	252.735	252.738
$10^2$	460.459	460.644	462.455	477.252	523.222	546.571	549.884	550.229	550.267
$10^3$	511.359	511.709	515.148	544.678	82.348	93.641	95.036	95.179	95.195
$10^4$	516.621	516.989	520.619	551.912	82.475	93.821	95.225	95.368	95.384
$10^{20}$	517.205	517.576	521.227	552.717	82.489	93.841	95.245	95.389	95.405

Tablo 2. Sistemin birinci modunun modal sönüm oranları ( $\eta_1 \times 10^6$ )Table 2. Modal damping ratios of the first mode of the system ( $\eta_1 \times 10^6$ )

$\bar{K}_K$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	9995	9956	9578	6918	1794	213	22	3	1
$10^{-2}$	9995	9962	9587	6927	1804	222	32	12	10
$10^{-1}$	9982	9964	9651	7012	1896	315	124	105	102
$10^0$	9847	9833	9672	7649	2772	1214	1025	1006	1004
$10^1$	8476	8469	8405	7888	6512	5956	5884	5877	5876
$10^2$	2323	2337	2467	3415	5189	5524	5546	5548	5548
$10^3$	230	244	382	1343	2560	367	77	47	44
$10^4$	24	38	176	1130	2536	329	37	7	4
$10^{20}$	1	16	153	1107	2534	325	33	3	0

Tablo 3. Sistemin ikinci doğal frekansları ( $\omega_2$ )Table 3. Second natural frequencies of the system ( $\omega_2$ )

$\bar{K}_K$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	775.028	775.789	783.202	841.849	1001.560	1070.020	1079.070	1080.010	1080.110
$10^{-2}$	775.073	775.834	783.247	841.888	1001.590	1070.040	1079.090	1080.020	1080.130
$10^{-1}$	775.524	776.284	783.690	842.277	1001.820	1070.210	1079.260	1080.190	1080.290
$10^0$	780.059	780.812	788.152	846.189	1004.170	1071.940	1080.910	1081.840	1081.940
$10^1$	827.465	828.138	834.697	886.486	1028.080	1089.590	1097.780	1098.630	1098.720
$10^2$	1241.670	1241.750	1242.520	1248.920	1270.130	1281.750	1283.450	1283.620	1283.640
$10^3$	511.359	511.709	515.148	544.678	656.655	729.300	740.689	741.892	742.027
$10^4$	516.621	516.989	520.619	551.912	672.419	751.565	763.982	765.293	765.440
$10^{20}$	517.205	517.576	521.227	552.717	674.176	754.026	766.551	767.874	768.022

Tablo 1, 3 ve 5'in incelenmesinden  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$  değerlerinin her ikisinin de yüksek olduğu durumlarda, uçta kütle bulunan viskoelastik bağlantılı ankastre-serbest kirişin ilk üç doğal frekanslarının  $\omega_1=95.405$  rad/s,  $\omega_2=768.022$  rad/s ve  $\omega_3=2334.420$  rad/s olarak elde edilmiştir. Tablo 2, 4 ve 6 incelendiğinde kirişin ilk üç modunda modal sönüm oranının da gittikçe azalarak 0 değerine yaklaştığı ve boyutsuz  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$  değerlerinin

değişiminin modal sönüm oranı üzerindeki etkisinin ilk üç moda farklı şekillerde olduğu görülmektedir.

Tablo 2'de kirişin 1. modu için  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$ 'nin artan değerleri için modal sönüm oranları genellikle azalmaktadır. Ancak  $\bar{K}_K = 10^2$  değerinden daha büyük değerler aldığı anda,  $\bar{K}_B$ 'nin artan değerleri için modal sönüm oranları önce artma, sonra  $\bar{K}_B = 10^2$  değerinden sonra ise düşme eğiliminde olmaktadır.

Tablo 4. Sistemin ikinci modunun modal sönüm oranları ( $\eta_2 \times 10^6$ )Table 4. Modal damping ratios of the second mode of the system ( $\eta_2 \times 10^6$ )

$\bar{K}_K$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	6	21	205	1251	1177	182	19	1	0
$10^{-2}$	3	23	207	1252	1177	183	19	2	0
$10^{-1}$	15	34	217	1259	1181	186	22	5	3
$10^0$	132	151	328	1334	1214	216	53	36	34
$10^1$	1313	1326	1445	2079	1549	528	364	347	345
$10^2$	5331	5327	5297	5031	4001	3348	3247	3237	3235
$10^3$	230	244	382	1343	2175	1009	736	706	703
$10^4$	24	38	176	1131	1797	415	105	71	67
$10^{20}$	2	16	153	1107	1755	351	38	4	0

Tablo 4 ve 6'da ise kirişin 2. ve 3. modları için modal sönüm oranları  $\bar{K}_B$ 'nin değerine bağlı olarak  $\bar{K}_K = 10^3$  değerine kadar belirli bir değerine kadar artış göstermekte ve daha sonra azalmaktadır.  $\bar{K}_K = 10^3$  ve daha büyük değerlerinde,  $\bar{K}_B = 10^3$  değerinden küçük oluncaya kadar modal sönüm oranları artmakta,  $\bar{K}_B = 10^3$ 'ün daha büyük değerlerinde ise gittikçe azalmaktadır.

Ayrıca Tablo 1-6 detaylı bir şekilde incelendiğinde  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$ 'nin yüksek değerlerinde özellikle  $10^4$  ve  $10^{20}$  değerleri arasında elde edilen kirişin ilk üç modu için doğal frekans ve modal sönüm oranlarının çok az değiştiği de görülmektedir. Sistemden elde edilen modal sönüm oranı değerleri genellikle 0'a çok yakın mertebededir.

Tablo 5. Sistemin üçüncü doğal frekansları ( $\omega_3$ )Table 5. Third natural frequencies of the system ( $\omega_3$ )

'	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	2334.140	2334.930	2342.770	2410.920	1001.560	1070.020	1079.070	1080.010	1080.110
$10^{-2}$	2334.150	2334.950	2342.780	2410.940	1001.590	1070.040	1079.090	1080.020	1080.130
$10^{-1}$	2334.310	2335.100	2342.930	2411.080	1001.820	1070.210	1079.260	1080.190	1080.290
$10^0$	2335.840	2336.630	2344.460	2412.530	1004.170	1071.940	1080.910	1081.840	1081.940
$10^1$	2351.460	2352.240	2359.980	2427.180	1028.080	1089.590	1097.780	1098.630	1098.720
$10^2$	2529.840	2530.480	462.455	477.252	1270.130	1281.750	1283.450	1283.620	1283.640
$10^3$	1781.910	1782.170	1784.800	1808.790	1929.370	2045.700	2067.940	2070.370	2070.640
$10^4$	1853.680	1854.060	1857.870	1892.940	2079.260	2269.160	2305.700	2309.680	2310.130
$10^{20}$	1861.280	1861.670	1865.610	1901.910	2095.370	2292.210	2329.860	2333.960	2334.420

Tablo 6. Sistemin üçüncü modunun modal sönüm oranları ( $\eta_3 \times 10^6$ )Table 6. Modal damping ratios of the third mode of the system ( $\eta_3 \times 10^6$ )

$\bar{K}_K$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$\bar{K}_B$ $10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^{20}$
$10^{-3}$	0	7	73	552	1177	183	19	2	0
$10^{-2}$	0	8	73	552	1177	183	19	2	0
$10^{-1}$	2	9	74	554	1181	186	22	5	3
$10^0$	15	22	88	565	1214	217	53	36	34
$10^1$	150	157	220	676	1549	528	364	347	345
$10^2$	1699	1702	2467	3415	4002	3348	3247	3236	3235
$10^3$	924	929	970	1328	2469	2632	2571	2563	2562
$10^4$	83	87	129	477	1278	537	251	218	214
$10^{20}$	0	5	46	394	1157	338	39	4	0

Tablo 7. Viskoelastik bağlantılı ankastre-serbest kirişte ilk üç doğal frekanslar  
Table 7. First three natural frequencies in a fixed-free beam with viscoelastic connection

	$\omega_1(\text{rad/s})$	$\omega_2(\text{rad/s})$	$\omega_3(\text{rad/s})$
Ankastre-serbest kiriş	157.995	990.139	2772.430
Uçta kütleli ankastre-serbest kiriş	95.405	768.022	2334.420

Uçtaki kütleli etkisini araştırmak üzere, uçtaki sınır şartları değiştirilerek uçta kütle bulunmayan kirişe ait doğal frekanslar hesaplanmış ve Tablo 7’de bu doğal frekanslar ile uçta kütle taşıyan aynı kirişin doğal frekansları karşılaştırılmıştır. Tablo 7’den, uçtaki kütleli aynı kirişin doğal frekanslarını önemli ölçüde düşürdüğü görülmektedir. Kirişin doğal frekanslarındaki bu düşmeler birinci modda daha fazla (% 39.6), ikinci mod (% 22.4) ve üçüncü modda (%15.8) ise sırasıyla daha az düşmeler şeklindedir.

### Sonuçlar ve Değerlendirme

Bu çalışmada uç kısmında kütle taşıyan viskoelastik bağlantılı ankastre kiriş için viskoelastik bağlantıdaki rijitlik ve sönümün, kirişin doğal frekans ve modal sönüm oranları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Viskoelastik bağlantı noktasındaki kompleks yay özellikleri ve uçtaki kütle göz önüne alınarak, Bernoulli-Euler kirişine ait diferansiyel denklem sisteme ait sınır şartları kullanılarak çözülmüştür. Viskoelastik bağlantı noktasının doğrusal ve dönme rijitlikleri değiştirilerek, sisteme ait karakteristik denklemin iteratif çözümüyle sayısal sonuçlar doğal frekans ve modal sönüm oranları şeklinde elde edilmiştir. Bu rijitliklerin sıfıra yakın değerlerinde ilk modun rijit cisim modu olduğu, yüksek değerlerinde ise tam ankastre-serbest kirişin dinamik özelliklerinin elde edildiği görülmektedir. Viskoelastik bağlantıdaki doğrusal ve dönme rijitliklerinin artan değerleri ile kirişin ilk üç modundaki doğal frekans değerlerinin genel olarak arttığı, modal sönüm oranının ise gittikçe azalarak 0 değerine yaklaştığı anlaşılmaktadır. Boyutsuz  $\bar{K}_B$  ve  $\bar{K}_K$  değerlerinin değişiminin modal sönüm oranı üzerindeki etkisinin ilk üç modda farklı şekillerde olduğu söylenebilir. Sayısal sonuçlardan, uçta kütle taşıyan ankastre kirişin istenen doğal frekans ve sönüm oranı için kirişin viskoelastik bağlantı noktası rijitlik ve sönümünün ayarlanarak elde edilebileceği görülmektedir. Bu hesaplamaların bu konuya benzer konularda çalışan tasarım, modelleme, analiz ve optimizasyon işlemleri yapan mühendisler ve diğer bilim insanlarına katkı sağlayacağı şüphesizdir.

### References

- Akbas S.D, Bashiri A.H, Eltaher M.A, 2021. Dynamic analysis of thick beams with functionally graded porous layers and viscoelastic support. *Journal of Vibration and Control*, 27 (13-14):1644-1655.
- Alipour M.M, 2018. Transient forced vibration response analysis of heterogeneous sandwich circular plates under viscoelastic boundary support. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 18 (1):12-31.
- Demir C, 2023. Natural Frequencies of a Viscoelastic Supported Axially Functionally Graded Bar With Tip Masses. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 28(1): 50-64.
- Demir C, Oz FE, 2014. Free vibration analysis of a functionally graded viscoelastic supported beam. *Journal of Vibration and Control*, 20 (16): 2464-2486.
- Ding H, Zhu M.H, Chen L.Q, 2018. Nonlinear vibration isolation of a viscoelastic beam, *Nonlinear Dynamics*, 92 (2):325-349.
- Fan Z.J, Lee J.H, Kang K.H, Kim K.J, 1998. The forced vibration of a beam with viscoelastic boundary supports. *Journal of Sound and Vibration*, 210 (5): 673-682.
- Guandong Q, Salam R, 2021. Dynamics of Euler-Bernoulli beams with unknown viscoelastic boundary conditions under a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 491, 115771:1-19.
- Harris C. M, 1988. *Shock and Vibration Handbook*, New York: McGraw-Hill.
- Kang K.H., Kim K.J, 1996. Modal properties of beams and plates on resilient supports with rotational and translational complex stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2):207-220.
- Lei Y, Murmu T, Adhikari S, Friswell M.I, 2013. Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 42:125-136.
- Lei Y, Adhikari S, Friswell M.I, 2013. Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 66-67:1-13.
- Mohamed N, Mohamed S.A, Eltaher MA, 2024. Nonlinear Forced Vibration of Curved Beam with Nonlinear Viscoelastic Ends. *International Journal of Applied Mechanics*, 16 (03):2450031.
- Nayak D.K, Dash P.R, 2021. Parametric Stability Analysis of a Spring Attached, Pre-Twisted, Rotating Sandwich Beam with Tip Mass and Viscoelastic Support. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 21 (10):2150143.
- Patil R, Joladarashi S, Kadoli R, 2023. Bending and vibration studies of FG porous sandwich beam with viscoelastic boundary conditions: FE approach. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 30 (17):3588-3607.
- Peng L, Ding H, Chen L.Q, 2016. Frequencies, Modes and Orthogonality of Vibrating Timoshenko Beams on Viscoelastic Foundation. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 4 (6):527-537.
- Sun Lu, 2002. A closed-form solution of beam on viscoelastic subgrade subjected to moving loads. *Computers and Structures*, 80:1-8.
- Wineman A, Min J.H, 2000. Viscoelastic hinge formation in beams. *Acta Mechanica*, 140:183-205.
- Zhang D.P, Lei Y.J, Shen Z.B, 2017. Vibration analysis of viscoelastic single-walled carbon nanotubes resting on a viscoelastic foundation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31 (1):87-98.