BURGER DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SONLU FARK METOTLARI

B. SAKA * & D. IRK *

Özet

Parçalanmış Burger denkleminin sayısal çözümleri klasik sonlu fark metodu kullanılarak elde edildi. Burger denkleminin sayısal çözümleri, Burger denklemine doğrudan uygulanan sonlu fark metodunun sonuçlarıyla karşılaştırıldı.

1. Giriş

Bu çalışmada, sonlu farklar metodu kullanılarak Burger denkleminin ve parçalanmış Burger denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. [1] ve [4] de, Burger denklemi lineer hale getirilip, keyfi başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak denklemin tam çözümü bulunmuştur. [6] da, kübik spline kullanılarak bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır. [7] de, bir ve iki boyutlu Burger denklemleri ikiye parçalandıktan sonra kübik spline kullanılarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü elde edilmiştir. [3] de, bir ve iki boyutlu Burger denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışılmış ve bulunan sonuçlar birbirleriyle kıyaslamıştır. [2] de, sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit grub metodu kullanılarak, Burger denklemi sayısal olarak çözülmüş ve metodun kararlılığı incelenmiştir. [5] de, Burger denklemi ikiye parçalanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışılmıştır. [8] de, Burger denklemi üçe parçalandıktan sonra sonlu farklar metodu kullanılarak sayısal çözümü üzerinde çalışılmış ve yerel kesme hatası bulunarak kullandıkları metodun kararlılığını incelemişlerdir. [9] da, sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit ve exact-explicit metotları kullanılarak Burger denkleminin sayısal çözümü verilmiştir.

Üç değişik metotla Burger denkleminin sayısal çözümlerini bulmaya çalıştık. Öncelikle, klasik sonlu farklar metodunu (SF1) kullanarak bir algoritma yazdık. İkinci olarak, Burger denklemine zamana göre parçalanma uyguladık ve parçalanmış Burger denklemini yine sonlu fark metodunu (SF2) kullanarak çözdük. Son olarak, Burger denklemine konuma göre parçalama uygulayarak, denklemin bu formu içinde sonlu fark metodunu (SF3) kullanarak sayısal çözümlerini elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Sonlu Fark Metotları, Burger Denklemi

2. BURGER DENKLEMİ VE ÇÖZÜM ALGORİTMALARI

λ pozitif bir parametre olmak üzere, [a,b] aralığında tanımlı;

(1) $U_t+UU_x-\lambda U_{xx}=0$

formundaki lineer olmayan Burger denkleminin,

(2) $U(a,t)=\alpha_1$, $U(b,t)=\alpha_2$

$U_x(a,t)=U_x(b,t)=0$, $t\in(0,T]$

sınır şartları ve

(3) $U(x,0)=f(x)$, $a\leq x\leq b$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümlerini bulmaya çalışacağız. Buradaki t ve x indisleri türevleri göstermektedir. f(x) ise, daha sonra seçilecektir.

x_m ' ler bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, [a,b] çözüm bölgesinin düzenli bir bölüntüsü

$a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, $h=x_m-x_{m-1}$, $m=1,2,\ldots N$

ve zaman parametresi t olmak üzere, zaman adımı Δt olsun.

2.1. Metot I

U fonksiyonu, U_x birinci türevi ve U_{xx} ikinci türevi, x_m bölünme noktalarında sırasıyla

$U(x_m)=U_m$, $U_x(x_m)=U'_m$, $U_{xx}(x_m)=U''_m$

ile tanımlansın.

Birinci türev için

(4) $(U_x)_m\approx\dfrac{U_{m+1}-U_{m-1}}{2h}$

ile verilen fark yaklaşımı ve ikinci türev için

(5) $(U_{xx})_m\approx\dfrac{U_{m+1}-2U_m+U_{m-1}}{h^2}$

ile verilen fark yaklaşımı yardımıyla denklem (1),

$$(6)\quad \mathring{U}_m + z_m \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h} - \lambda \frac{U_{m+1} - 2U_m + U_{m-1}}{h^2}$$

$$m=1,\ldots,N-1$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\circ$ zamana göre türevi göstermektedir ve $z_m=U_m$, denklem (6) da ki lineer olmayan terimi ayırt etmek için kullanılmıştır.

U_m ve U_m in zamana göre türevi n ve n+1 adımlarındaki lineer interpolasyonla sırasıyla

$$(7)\quad U_m \approx \frac{U_m^{n+1} + U_m^n}{2}, \quad \mathring{U}_m \approx \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}$$

olarak ifade edildiğinde, (6) dan,

$$(8)\quad a_1 U_{m-1}^{n+1} + a_2 U_m^{n+1} + a_3 U_{m+1}^{n+1} = -a_1 U_{m-1}^n + a_4 U_m^n - a_3 U_{m+1}^n$$

$$m=1,\ldots,N-1$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$a_1=-2\lambda\,\Delta t - hz_m\,\Delta t$

$a_2= 4\lambda\,\Delta t + 4h^2$

$a_3=-2\lambda\,\Delta t + hz_m\,\Delta t$

$a_4=-4\lambda\,\Delta t + 4h^2$

dir.

Yukarıdaki sistem, N-1 denklem ve N+1 bilinmeyen çözüm parametresinden oluşur. $U(a,t)=U(b,t)=0$ sınır şartları kullanılarak U_0^n, U_N^n in eliminasyonu sonucunda çözülebilir $(N-1)\times(N-1)$ matris sistemine ulaşılır. Bu matris sistemi köşegenseldir ve Thomas algoritması ile kolaylıkla çözülebilir.

Bölünme noktalarındaki U_m^n çözümlerini (8) iterasyon denkleminden elde edilebilmek için U_m^0 başlangıç çözümleri

$U(x_m,0)=f(x_m)$, $m=0,\ldots,N.$

başlangıç şartından elde edilir.

2.2. Metot II

Burger denkleminin zamana göre parçalanmış formundaki denkleme sonlu fark metodu uygulayacağız. Böylece parçalanmış sonlu fark denklemi

(9) $U_t - 2\lambda U_{xx} = 0,$

(10) $U_t + 2UU_x = 0$

olarak yeniden yazılabilir.

(4,5) denklemlerindeki U_x ve U_{xx} türevleri (9,10) denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

(11) $$\dot{U}_m - 2\lambda\left(\frac{U_{m+1} - 2U_m + U_{m-1}}{h^2}\right) = 0,$$

(12) $$\dot{U}_m + 2z_m\left(\frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h}\right) = 0$$

birinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada $\circ$ zamana göre türevi göstermektedir ve $z_m = U_m$, denklem (12) de ki lineer olmayan terimi ayırt etmek için kullanılmıştır.

U_m ve U_m in zamana göre türevinin n ve n+1/2 adımlarındaki

(13) $$U_m \approx \frac{U_m^n + U_m^{n+1/2}}{4}, \qquad \dot{U}_m \approx \frac{U_m^{n+1/2} - U_m^n}{\Delta t}$$

ifadeleri (11) denkleminde yerlerine yazılırsa,

(14) $$-\lambda\Delta t\, U_{m-1}^{n+1/2} + a_1 U_m^{n+1/2} - \lambda\Delta t\, U_{m+1}^{n+1/2} = \lambda\Delta t\, U_{m-1}^{n} + a_2 U_m^{n} + \lambda\Delta t\, U_{m+1}^{n}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$a_1 = 2\lambda\Delta t + 2h^2$

$a_2 = -2\lambda\Delta t + 2h^2$

dir.

Benzer şekilde, U_m ve U_m in zamana göre türevinin n+1/2 ve n+1 adımlarındaki

(15) $$U_m \approx \frac{U_m^{n+1/2} + U_m^n}{4}, \qquad \dot{U}_m \approx \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n+1/2}}{\Delta t}$$

ifadeleri (12) denkleminde yerlerine yazılırsa,

(16) $$-z_m\Delta t\, U_{m-1}^{n+1} + 4h\, U_m^{n+1} + z_m\Delta t\, U_{m+1}^{n+1} = z_m\Delta t\, U_{m-1}^{n+1/2} + 4h\, U_m^{n+1/2} - z_m\Delta t\, U_{m+1}^{n+1/2}$$

denklem sistemi bulunur.

(14) ve (16) sistemleri, Burger denkleminin sayısal çözüm algoritmasını oluşturur. Bu sistemler, N-1 denklem ve N+1 bilinmeyenden oluşur. Bölgenin her iki ucundaki sınır şartları kullanılarak sistemlerden, U_0^n, U_N^n parametreleri elimine edilerek (N-1)×(N-1) köşegensel denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemlerde Thomas algoritması kullanılarak çözülür.

(14) ve (16) sistemlerini kullanarak U_m^n iterasyon çözümlerine başlayabilmek için U_m^0 başlangıç sayısal çözümleri,

$U(x_m,0)=f(x_m),\quad m=0,\ldots,N$

başlangıç şartı kullanılarak bulunur.

2.3. Metot III

Burada (1) denklemini farklı bir şekilde parçalayarak sayısal çözüm elde edilmiştir. Bunun için (1) denklemine $V(x,t)=U_{xx}(x,t)$ dönüşümü uygulandı. Bu işlem sonucunda Burger denklemi, sınır ve başlangıç şartları

$$(17)\qquad U_t+UU_x-\lambda V=0,$$

$$V-U_{xx}=0$$

$$(18)\qquad U(a,t)=\alpha_1,\ U(b,t)=\alpha_2,\ V(a,t)=V(b,t)=0,\quad t>0$$

$$U(x,0)=f(x),\quad V(x,0)=f''(x),\quad a\leq x\leq b$$

olarak yeniden yazılabilir. Denklem (17) de, (4,5) kullanılarak $z_m=U_m$ olmak üzere;

$$(19)\qquad \overset{\circ}{U}_m+z_m\frac{U_{m+1}-U_{m-1}}{2h}-\lambda V_m=0,$$

$$V_m-\frac{U_{m+1}-2U_m+U_{m-1}}{h^2}=0$$

$$m=1,\ldots,N-1$$

elde edilir. Burada $\circ$ zamana göre türevi göstermektedir.

(19) sisteminin düzenlenmesiyle de 2N-2 denklemden ve 2N+2 bilinmeyenden oluşan,

$$(20)\qquad -z_m\Delta t\ U_{m-1}^{n+1}+4h\,U_m^{n+1}-2\lambda h\Delta t\ V_m^{n+1}+z_m\Delta t\ U_{m+1}^{n+1}=$$

$$z_m\Delta t\ U_{m-1}^{n}+4h\,U_m^{n}+2\lambda h\Delta t\ V_m^{n}-z_m\Delta t\ U_{m+1}^{n}$$

$$-U_{m-1}^{n+1}+2U_m^{n+1}+h^2V_m^{n+1}-U_{m+1}^{n+1}=U_{m-1}^n-2U_m^n-h^2V_m^n+U_{m+1}^n$$

$m=1,\ldots,N-1$

denklem sistemine ulaşılır.

$U_0=0$, $V_0=0$, $U_N=0$ ve $V_N=0$ sınır şartları (20) sistemine adapte edildikten sonra bulunan $(2N-2)\times(2N-2)$ köşegensel denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülür.

$$U(x_m,0)=f(x_m),\quad V(x_m,0)=f''(x_m),\quad m=0,\ldots,N$$

başlangıç şartı yardımıyla t=0 zamanındaki çözümlerin kullanılmasıyla da U^n ve V^n çözümleri (20) iterasyon denklem sistemi yardımıyla elde edilir.

3. TEST PROBLEMİ

Lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümleri aşağıda verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak araştırılmıştır.

[a,b] tanım aralığında;

(21) $U(x,0)=\sin(\pi x) \quad a \le x \le b$

başlangıç şartı ve

(22) $U(a,t)=U(b,t)=0 \quad t>0$

$U'(a,t)=U'(b,t)=0 \quad t>0$

sınır şartları altındaki sayısal çözüm elde edilmiştir.

Yukarıda vermiş olduğumuz başlangıç ve sınır şartları altındaki lineer olmayan Burger denklemi için analitik çözüm, sonsuz seriler cinsinden I_j ler Bessel fonksiyonları olmak üzere;

$$(23)\quad U(x,t)=\frac{4\pi\lambda\sum_{j=1}^{\infty} jI_j\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)\sin(j\pi x)\exp(-j^2\pi^2\lambda t)}{I_0\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)+2\sum_{j=1}^{\infty} I_j\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right)\cos(j\pi x)\exp(-j^2\pi^2\lambda t)}$$

olarak verilmiştir [1].

Bu test probleminde, sayısal çözümlerin doğruluğunu kontrol edebilmek için (1) denklemiyle beraber [0,1] tanım aralığında; (21) başlangıç şartı ve (22) sınır şartları kullanıldı. Sayısal çözümde $\lambda=1$ parametresi ve zaman artımı olarak $\Delta t=0.01$ alındı. Konum artımları sırasıyla h=0.25, h=0.125 ve h=0.0625 alınarak hesaplanan sayısal çözümler farklı metotlar için Tablo 1,2,3 de verildi. Tüm sonuçlar incelendiğinde konum aralıkları küçüldükçe sayısal metotların daha iyi sonuçlar verdiği gözlendi ve h=0.0625 için yapılan hesaplamalarda en iyi sonuçlar bulundu.

Tablo 1: $\lambda = 1$ iken sayısal ve analitik sonuçların kıyaslanması (SF1).

x	t	h=0.25	h=0.125	h=0.0625	Analitik Sonuç
0.25	0.00	0.7073	0.7073	0.7073	0.7071
	0.05	0.4213	0.4141	0.4123	0.4131
	0.10	0.2642	0.2557	0.2535	0.2536
	0.15	0.1672	0.1589	0.1568	0.1566
	0.20	0.1058	0.0985	0.0967	0.0964
	0.25	0.0667	0.0609	0.0595	0.0592
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.6243	0.6124	0.6094	0.6091
	0.10	0.3904	0.3758	0.3722	0.3716
	0.15	0.2443	0.2308	0.2275	0.2268
	0.20	0.1529	0.1418	0.1390	0.1385
	0.25	0.0957	0.0871	0.0850	0.0845
0.75	0.00	0.7064	0.7064	0.7064	0.7071
	0.05	0.4638	0.4541	0.4516	0.4502
	0.10	0.2893	0.2768	0.2737	0.2726
	0.15	0.1788	0.1678	0.1651	0.1644
	0.20	0.1106	0.1020	0.1000	0.0964
	0.25	0.0687	0.0622	0.0607	0.0603

Tablo 2: $\lambda = 1$ iken sayısal ve analitik sonuçların kıyaslanması (SF2).

x	t	h=0.25	h=0.125	h=0.0625	Analitik Sonuç
0.25	0.00	0.7073	0.7073	0.7073	0.7071
	0.05	0.4212	0.4137	0.4118	0.4131
	0.10	0.2641	0.2554	0.2533	0.2536
	0.15	0.1672	0.1588	0.1567	0.1566
	0.20	0.1057	0.0985	0.0967	0.0964
	0.25	0.0667	0.0609	0.0595	0.0592
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.6243	0.6124	0.6094	0.6091
	0.10	0.3904	0.3759	0.3723	0.3716
	0.15	0.2443	0.2308	0.2275	0.2268
	0.20	0.1529	0.1418	0.1391	0.1385
	0.25	0.0957	0.0871	0.0850	0.0845
0.75	0.00	0.7064	0.7064	0.7064	0.7071
	0.05	0.4639	0.4547	0.4523	0.4502
	0.10	0.2894	0.2771	0.2741	0.2726
	0.15	0.1788	0.1679	0.1653	0.1644
	0.20	0.1106	0.1021	0.1000	0.0964
	0.25	0.0687	0.0623	0.0607	0.0603

Tablo 3: $\lambda = 1$ iken sayısal ve analitik sonuçların kıyaslanması (SF3).

x	t	h=0.25	h=0.125	h=0.0625	Analitik Sonuç
0.25	0.00	0.7073	0.7073	0.7073	0.7071
	0.05	0.4213	0.4141	0.4123	0.4131
	0.10	0.2642	0.2557	0.2535	0.2536
	0.15	0.1672	0.1589	0.1568	0.1566
	0.20	0.1058	0.0985	0.0967	0.0964
	0.25	0.0667	0.0609	0.0595	0.0592
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.6243	0.6124	0.6094	0.6091
	0.10	0.3904	0.3758	0.3722	0.3716
	0.15	0.2443	0.2308	0.2275	0.2268
	0.20	0.1529	0.1418	0.1390	0.1385
	0.25	0.0957	0.0871	0.0850	0.0845
0.75	0.00	0.7064	0.7064	0.7064	0.7071
	0.05	0.4638	0.4541	0.4516	0.4502
	0.10	0.2897	0.2768	0.2737	0.2726
	0.15	0.1788	0.1678	0.1651	0.1644
	0.20	0.1106	0.1020	0.1000	0.0964
	0.25	0.0687	0.0622	0.0607	0.0603

λ, h ve Δt için seçilen farklı durumlarda sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar Tablo 4,5,6 da verildi. λ için büyük değerler alındığında sayısal yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

Tablo 4: t=0.5 anında sayısal sonuçlarla analitik sonuçların kıyaslanması (SF1).

x	$\lambda = 0.01$ h=1/36 $\Delta t = 0.01$	$\lambda = 0.01$ Analitik Sonuç	$\lambda = 0.001$ h=1/216 $\Delta t = 0.125$	$\lambda = 0.001$ Analitik Sonuç
0.500	0.586	0.589	0.557	0.595
0.556	0.646	0.649	0.619	0.656
0.611	0.705	0.707	0.679	0.715
0.667	0.760	0.762	0.740	0.772
0.722	0.812	0.814	0.800	0.826
0.778	0.860	0.861	0.861	0.876
0.833	0.902	0.902	0.924	0.921
0.889	0.935	0.934	0.994	0.959
0.944	0.941	0.937	1.063	0.959
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tablo 5: t=0.5 anında sayısal sonuçlarla analitik sonuçların kıyaslanması (SF2).

x	$\lambda = 0.01$ h=1/36 $\Delta t = 0.01$	$\lambda = 0.01$ Analitik Sonuç	$\lambda = 0.001$ h=1/216 $\Delta t = 0.125$	$\lambda = 0.001$ Analitik Sonuç
0.500	0.586	0.589	0.557	0.595
0.556	0.646	0.649	0.619	0.656
0.611	0.704	0.707	0.679	0.715
0.667	0.760	0.762	0.740	0.772
0.722	0.812	0.814	0.800	0.826
0.778	0.860	0.861	0.861	0.876
0.833	0.902	0.902	0.924	0.921
0.889	0.935	0.934	0.993	0.959
0.944	0.941	0.937	1.060	0.959
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tablo 6: t=0.5 anında sayısal sonuçlarla analitik sonuçların kıyaslanması (SF3).

x	$\lambda = 0.01$ h=1/36 $\Delta t = 0.01$	$\lambda = 0.01$ Analitik Sonuç	$\lambda = 0.001$ h=1/216 $\Delta t = 0.125$	$\lambda = 0.001$ Analitik Sonuç
0.500	0.586	0.589	0.557	0.595
0.556	0.646	0.649	0.619	0.656
0.611	0.705	0.707	0.679	0.715
0.667	0.760	0.762	0.740	0.772
0.722	0.812	0.814	0.800	0.826
0.778	0.860	0.861	0.861	0.876
0.833	0.902	0.902	0.924	0.921
0.889	0.935	0.934	0.994	0.959
0.944	0.941	0.937	1.063	0.959
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

4. SONUÇ

Burger denklemine parçalama işlemi uyguladıktan sonra, Burger denklemi için sonlu fark metotlarını geliştirdik. Gördük ki, Burger denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için geliştirdiğimiz SF1, SF2 ve SF3 algoritmaları arasında sonuçlar bakımından fazla bir fark gözükmemektedir. Dolayısıyla bu denklem için sonlu fark yaklaşımlarını uygularken, parçalama işleminin bize getirdiği fazla bir avantaj bulunmamaktadır.

KAYNAKÇA

[1] Cole, J. D., 1951, "On a Quasi-linear Parabolic in Aerodynamics", Quarterly of Applied Math., 9, 225-236.
[2] Evans, D. J. and Abdullah, A. R., 1984, "The Group Explicit Method for the Solution of Burger Equation", Computing, 32, 239-253.

[3] Fletcher, C. A. J., 1983, "A Comparison of Finite Element and Finite Difference Solutions of the One- and Two-Dimensional Burgers' Equations", Jour. Comp. Physics, 51, 159-188.
[4] Hopf, E., 1950, "The Partial Differential Equation $U_t+UU_x=\mu U_{xx}$", Comm. Pure App. Math., 3, 201-230.
[5] Iskandar, L. and Mohsen, A, 1992, "Some Numerical Experiments on the Splitting of Burgers' Equation", Num. Meth. Par. Diff. Eq., 8, 267-276.
[6] Jain, P. C. and Holla, D. N., 1978, "Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equation", Int. J. Non-Linear Mechanics, 13, 213-222.
[7] Jain, P. C. and Lohar, B. L., 1979, "Cubic Spline Technique for Coupled Non-linear Parabolic Equations", Comp. & Maths. with Appl., 5, 179-185.
[8] Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., 1995, "Numerical Technique for Solving Convective-Reaction-Diffusion Equation", Math. Comput. Modelling, Vol. 22, No. 9, 113-125.
[9] Kutluay, S., Bahadır, A. R. and Özdeş, A., 1999, "Numerical Solution of One-dimensional Burgers Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference Methods", J. Comp. App. Maths., 103, 251-261.

FINITE DIFFERENCE METHODS FOR NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BURGER EQUATION

B. SAKA & D. IRK

Abstract. The numerical solutions of the splitted Burger equation are obtained by using the classical finite difference method. Results of numerical solutions of the Burger equation are compared with that of the direct application of the finite difference method to the Burger equation.

Keywords: Finite Difference Methods, Burger Equation.

* Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 26480, Eskişehir.

E-mail: bsaka@ogu.edu.tr - dirk@ogu.edu.tr