Matematik Eğitimi Alanındaki Ortaklaşa Argümantasyon Çalışmalarının İncelenmesi

Ayşe Tekin Dede

Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, İzmir/Türkiye

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 30 Ocak 2018; Yayına kabul tarihi: 22 Mayıs 2018; Çevrimiçi yayın tarihi: 19 Haziran 2018

Öz: Bireysel öğrenmeden sosyal bağlamda öğrenmeye doğru gelişim gösteren matematik eğitimi çalışmalarında farklı sosyo-kültürel teoriler kullanılmaya başlanmıştır. Bu teorilerden biri de Toulmin'in argümantasyon çalışmalarına dayalı olan ortaklaşa argümantasyon teorisidir. Ortaklaşa argümantasyon öğrenciler ve öğretmenin iddialarda bulundukları ve bu iddiaları kanıtlarla destekledikleri etkileşimli bir süreç olarak ele alınmaktadır. Bu çalışmada matematik eğitimi alanındaki ortaklaşa argümantasyon çalışmalarının tanıtılarak bu çalışmaların benzer ve farklı yönlerinin ortaya koyulması amaçlanmaktadır. Bu bağlamda gerçekleştirilen alanyazın taraması sonucunda on dört çalışmayla karşılaşılmıştır. Bu çalışmaların ortak yönü her birinin öğretmen veya öğrenci söylemlerine dayalı olmaları ve bu söylemleri analiz etmek için Toulmin'in argümantasyon şemasının bileşenlerinden yararlanıyor olmalarıdır. Kimi çalışmalar farklı kuramsal çerçeveleri argümantasyon ile ilişkilendirirken, kimisi kuramsal çerçeve oluşturmayı kimisi de argümantasyon bileşenlerine ilişkin kavramsal tanıtım yapmayı hedeflemektedir. Ülkemizde ortaklaşa argümantasyon alanındaki çalışmalarda eksiklikler olması sebebiyle farklı öğrenci grupları ve öğretmenlerle, farklı sınıf bağlamlarında yapılacak çalışmaların hem ulusal hem de uluslararası alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, ortaklaşa argümantasyon, Toulmin'in argümantasyon şeması

DOI: 10.16949/turkbilmat.386722

Abstract: Different socio-cultural theories have begun to be used in mathematics education studies, which have developed from individual learning to learning in its social context. One of these theories is the collective argumentation theory based on Toulmin's argumentation studies. The collective argumentation is dealt with as an interactive process in which students and teachers are claiming and supporting these claims through evidence. In this study, it is aimed to introduce similar and different aspects of the collective argumentation studies in the field of mathematics education by introducing it. As a result of the literature review carried out in this context, fourteen studies were encountered. The common feature of these studies is that each one is based on the teacher or student discourse, and that they use the components of Toulmin's argumentation schema to analyze these discourses. While some studies link different theoretical frameworks with argumentation, some aim to develop a theoretical framework and some aim to make conceptual presentations about the components of the argumentation. It is thought that the work to be done in different class contexts with different student groups and teachers will contribute to both the national and international fields because there are deficiencies in the studies in the field of the collective argumentation in our country.

Keywords: Mathematics education, collective argumentation, Toulmin's argumentation schema

See Extended Abstract

Sorumlu yazar: Ayşe Tekin Dede **e-posta:** ayse.tekin@deu.edu.tr **ORCID:** 0000-0002-8971-1970

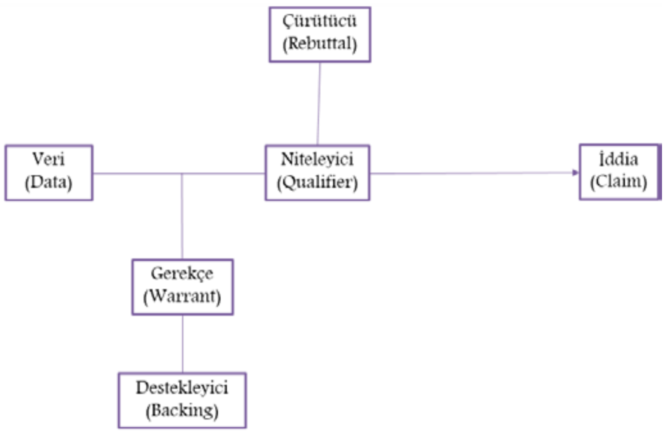
Kaynak Gösterme: Tekin-Dede, A. (2018). Matematik eğitimi alanındaki ortaklaşa argümantasyon çalışmalarının incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *9*(3), 636-661.

1. Giriş

Matematik eğitimi araştırmalarında 1980'lerin sonlarından itibaren anlamayı, düşünmeyi ve akıl yürütmeyi sosyal bir etkinliğin ürünleri olarak gören sosyo-kültürel teorilerin ortaya çıkmasıyla (Lerman, 2000, 2001) bireysel öğrenmeden sosyal bağlamda öğrenmeye doğru bir yöneliş göze çarpmaktadır. Öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin sosyal bir yapıda olmasından dolayı söz konusu etkinliklerin içinde bulunduğu sosyal ve kültürel bağlamdan bağımsız ele alındığında anlaşılamaz olacağı ifade edilmektedir (Cobb, Jaworski & Presmeg, 1996). Böylelikle matematik öğretme ve öğrenme sosyal ve iletişimsel uygulamalar olarak ele alınmakta ve Lerman (2000) bu uygulamalarda söylemlerin ön plana çıktığını belirtmektedir. Bu söylemlerde öğrenciler matematiksel olarak iletişim kurarak sınıf içi tartışmalara katılırlar (Lampert & Cobb, 2003; Sfard, 2001). Bu tartışmalar öğrencilere fikirlerini test etmelerini, başkalarının fikirlerini dinlemelerini ve birleştirmelerini, kendi düşünmelerini kelimelerle ifade etmelerini ve böylece kavramları derinlemesine bir şekilde anlamalarına olanak tanımaktadır (McCrone, 2005). Aktif tartışmalar süresince etkin matematiksel sorgulamalar gerçekleştirilmekte ve sorgulamayı içeren öğrenme süreçleri gösterimler kullanmayı, argümanlar oluşturmayı, matematiksel nesneler hakkında akıl yürütmeyi ve birinin düşünmesini açıklamayı içermektedir (Hunter & Anthony, 2011). Nitekim etkili bir matematik öğretimi için öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel sorgulamaya teşvik eden öğrenme olanakları ve etkinlikleri hazırlamaları, öğrencilerini sorgulatarak ne bildiklerini ve neye gereksinim duyduklarını anlamaları ve onları öğrenmeye daha iyi bir şekilde teşvik etmeleri gerektiği vurgulanmaktadır (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Bu sorgulamalar esnasında öğrenciler ve hatta öğretmenler kendi matematiksel düşünmelerini açıklığa kavuşturmak için matematiksel açıklamalar yapmakta ve eğer bir başkası bu açıklamalara meydan okur ya da bunları sorgularsa, yanıt olarak matematiksel gerekçeler sunmaktadırlar (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992). Açıklamaların gerekçelerle desteklendiği bu süreç argümantasyon sürecine işaret etmektedir (Schwarz & Asterhan, 2010; Yackel, 2004).

Argümantasyon kavramı Toulmin'in (2003) Argümanların Kullanımları (The Uses of Arguments) kitabı ile gündeme gelmekte ve temel anlamda bir kişinin iddiaları hakkında karşısındaki topluluğu ikna etmesi olarak açıklanmaktadır. Toulmin'in argümantasyon hakkındaki çalışmalarından sonra hukuktan sağlığa, eğitimden mühendisliğe birçok alanda argümanların ele alındığı görülmektedir. Matematik eğitimindeki argümantasyon çalışmalarının çoğu Krummheuer'in (1995) "Argümantasyonun Etnografyası" (The Ethnography of Argumentation) isimli çalışmasına dayanmaktadır. Krummheuer (1995), matematik sınıflarındaki argümantasyonu "gözlemlenen sınıfta, bir çözümün altında yatan akıl yürütmenin kasıtlı olarak açıklanması esnasında veya sonrasında ortaya çıkan etkileşimler" (s.231) olarak tanımlamaktadır. Argümantasyon, işbirliği içerisindeki bireylerin eylemlerinin gerekçelerini sözlü olarak sunarak niyetlerini ve yorumlarını değiştirmeye çalıştıkları toplumsal bir olgu olarak da açıklanmaktadır (Krummheuer, 1995, s. 229). Bu tanımlamaların Toulmin'inkinden en büyük farkı bir kişinin başkalarını ikna etmesi yerine ortak bir etkileşimin üzerinde durulmasıdır. İşte bu sebeple Krummheuer (1995) ortaklaşa argümantasyon (OA-collective argumentation) ifadesini kullanmayı tercih etmiştir. En genel anlamıyla OA birden fazla kişinin (öğrenciler/öğretmen) matematiksel bir iddiada bulundukları ve bu iddiayı desteklemek için kanıtlar sundukları bir argümantasyon süreci olarak tanımlanmaktadır (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014a).

Kimi zaman argümantasyon sürecinin bir ürünü kimi zaman da sürecin kendisi olarak ele alınabilen argüman kavramı (Douek & Pichat, 2003) argümanın oluşturulduğu alana bağımlıdır (Toulmin, 2003). Bu alana bağımlılık Krummheuer (1995) tarafından matematik sınıflarına uyarlanırken çerçeveye bağımlılık olarak ifade edilmiş ve bu çerçevenin yalnızca akademik matematiksel bilgiler değil bireylerin ortak deneyimlerine dayalı olarak içselleştirdiği bilgileri de içerdiğini vurgulamıştır. Çerçeveye bağımlılık doğrultusunda, hem matematiksel ilkelere hem de sınıfın sosyal bağlamına dayalı olan OA sürecini açıklamak için Toulmin'in (2003) argümantasyon şemasının (TAŞ) bileşenleri aşağıdaki gibi açıklanmıştır (Bkz. Şekil 1).



Şekil 1. Toulmin'in (2003) argümantasyon şeması (TAŞ)

Bir argümanın bileşenleri iddia (claim), veriler (data), gerekçe (warrant), çürütücü (rebuttal), niteleyici (qualifier) ve destekleyicidir (backing). İddialar oluşturulan argümanla birlikte doğruluğu kabul edilen ifadelerdir. Toulmin (2003) iddiayı, işlemlerin hem başlangıç noktası hem de varış yeri olarak tanımlamaktadır. Bir argümanın iddiası sınıf içinde sorulan soruların yanıtları olabileceği gibi genel olarak öğrencilerin anlamaya çalıştıkları sonuçlardır (Conner ve ark., 2014a). Veriler iddiaları destekleyen gerçek ifadelerdir. Gerekçeler, veriler ve iddialar arasında köprü görevi görür ve verileri destekleyen ek bilgileri içerir. Gerekçeler oluşturulan argümanın altında yatan akıl yürütme türüne bağlı olarak kimi zaman belirsizliği yok etmek kimi zaman da yalnızca bu belirsizliği azaltmak için kullanılırlar (Conner, Swingletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014b). Gerekçelerin geçerli olmadığı durumları açıklayan ifadeler çürütücü olarak adlandırılmaktadır. Çürütücüler karşıt örnekleri veya gerekirse argümanın değiştirilmesi gereken koşullarını içermektedir (Conner ve ark., 2014a). Çürütücüler iddianın istisnalarını belirtir ve argümanın bir kısmını tamamen çürütürler. Tamamlanmış bir argümanda çürütülmüş iddiaların yeri yoktur fakat bütün argümantasyon sürecini sunmak istediğimizde çürütücü bileşenini de sürece eklemek önemlidir (Knipping & Reid, 2015). İddianın kesinlik derecesini açıklayan ifadeler niteleyici olarak adlandırılmaktadır. Bu kesinlik derecesi, katılımcıların iddianın oluşumuna ne derece inandıklarını değerlendirmede önemlidir (Conner ve ark., 2014a). Son olarak destekleyiciler ise gerekçelerin geçerliği ve doğruluğu için argümanın alanına özgü sorgusuz sualsiz kabul edilen gerçeklerden oluşmaktadır. Destekleyiciler genellikle görünmez olduğu için bir kişinin gerekçe için hangi desteği sunmaya niyetlendiğini bilmek ancak o kişinin açıkça belirtmesi durumunda mümkündür (Conner, 2008). Bunun yanında destekleyicinin açıkça belirtilmemesinin başka bir nedeni de genellikle argümanın gerçekleştiği alanda kabul gören ve iyi anlaşılan fikirler barındırıyor olmasıdır (Hollebrands, Conner & Smith, 2010). Bunlar çerçeveye bağımlılık fikrine dayalı olarak matematiksel aksiyomlar, tanımlar, kurallar vb. olmasının yanında içinde bulunduğu matematik topluluğu tarafından kabul edilen fikirler olarak da açıklanmaktadır (Krummheuer, 1995).

TAŞ bileşenlerine örnek sunması için Rasmussen ve Stephan'ın (2008) çalışmasından dördüncü sınıf düzeyinde dikdörtgenin alanının hesaplanmasına ilişkin bir sınıf içi OA kesidi sunulmaktadır. Bu kesiti daha anlaşılır kılmak için çalışmada verilen örnek etkileşim diyaloglar halinde sunulmuş ve ardından bu etkileşimi açıklayan TAŞ'ın yapısı verilmiştir.

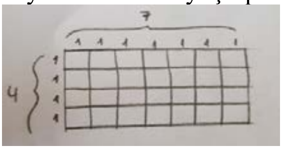
Öğretmen: Kenarları 4 ve 7 birim olan bir dikdörtgenin alanını hesaplayınız.
Erdem: 28.
Öğretmen: Nasıl buldun?
Erdem: Dikdörtgenin eni ile boyunu çarptım.

Erdem'in iddiası 28'dir ve bu iddiayı ortaya koyan veri ise 28'i bulmasını sağlayan yöntem yani dikdörtgenin eni ile boyunu çarpma yöntemidir. Her ne kadar bu yanıt bizim için çok açık olsa da, sınıftaki diğer öğrenciler Erdem'in sunduğu yöntemi anlamamış olabilirler.

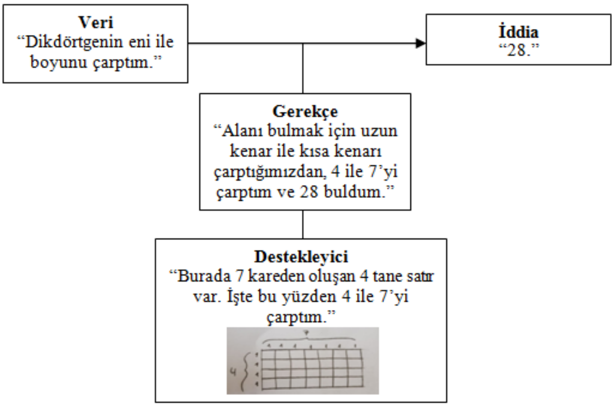
Öğretmen: Arkadaşların anlamamış olabilir. Erdem biraz daha ayrıntılı açıklayabilir misin?
Erdem: Alanı bulmak için uzun kenar ile kısa kenarı çarptığımızdan, 4 ile 7'yi çarptım ve 28 buldum.

Öğretmen veya sınıftan başka bir öğrenci Erdem'e meydan okuyarak sunduğu kanıtın sonucuyla nasıl bir ilişkisi olduğunu sorgulayabilir. Yukarıda öğretmen Erdem'in düşüncesini açıklaması için onu daha fazla açıklama yapmaya teşvik etmiştir. Böylece Erdem sunduğu yöntemin (verinin) bulduğu sonuçla (iddia) ilişkisini daha açık bir şekilde ifade etmek için bir gerekçe sunmuştur. Bu açıklama birçok öğrenci için yeterli olabilecekken hala durumu tam olarak netleştirememiş öğrenciler bulunabilir. Örneğin 4 ile 7'nin çarpımının 28 olduğunu anlamasına rağmen neden alanı bulmak için 4 ile 7'yi çarptığını sorgulayabilir.

Aylin: 28’i nereden bulduğunu anladım ama 28’i bulmak için neden 4 ile 7’yi çarptın?
Erdem: [Tahtada kısa kenarı 4 birim, uzun kenarı 7 birim olan bir dikdörtgen çiziyor ve bu dikdörtgeni birim karelere ayırıyor.] Burada 7 kareden oluşan 4 tane satır var. İşte bu yüzden 4 ile 7’yi çarptım.

Tahta alıntısı: 

Burada Aylin’in sorduğu soruyla argümanın matematiksel otoritesi bir başka deyişle argümanın geçerliği sorgulanmıştır. Bu yüzden Erdem gerekçesini desteklemek için herkes tarafından sorgusuz sualsiz kabul edilecek bir destekleyici sunarak konuya açıklık getirmiştir. Yukarıda açıklanan OA sürecine ilişkin TAŞ Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 2. Sınıf içi OA süreci örneğine ilişkin TAŞ

Krummheuer (1995) OA kavramını ön plana çıkararak Toulmin’in çalışmalarını matematik eğitimine uyarlarken, hemen hemen aynı dönemlerde OA kavramı Brown (1994) tarafından da ele alınmıştır. Brown (1994) Toulmin yerine Miller’ın (1987) Argümantasyon ve Biliş isimli çalışmasına dayalı olarak OA’yı problemin sunumu, küçük grup içerisinde probleme ilişkin gösterimlerin karşılaştırılması, grup elemanlarının çeşitli gösterimlerini açıklaması ve gerekçelendirmesi, grup içerisinde ortak bir karara varılması ve son olarak daha geniş bir akran grubu ve öğretmenin onayını almak için grubun fikirlerinin ve gösterimlerinin sınıfa sunulması olarak tanımlamaktadır. Miller (1987) öğrencinin öğrenme sürecine katılımı için gerekli olan üç prensip tanımlamaktadır. Genelleme prensibi öğrencilerin problem hakkındaki bireysel düşünmelerini bir diyagram sunarak, toplama işlemi yaparak, problemi tekrar yazarak vb. yollarla ifade etmelerini teşvik etmelerini gerektirmektedir. Objektiflik prensibi bir probleme ilişkin fikirlerin deneyime ya da mantıksal argümanlara dayalı olarak reddedilebileceğini belirtmektedir. Tutarlılık prensibi ise bir probleme ilişkin birbiriyle çelişen fikirlerin ancak argümanlar yoluyla belirlenmesi gerektiğini ifade etmektedir. Öğrenciler fikirlerini gerekçelendirerek ve neden belirli fikirlerin kabul edilmesi ya da reddedilmesi gerektiğine ilişkin sebepler sunarak bu prensibi sağlamaktadırlar. İlerleyen yıllarda Brown ve Renshaw (2000) Miller'ın bu üç prensibine fikir birliğine varma ve konuyu tekrar ele alma prensiplerini eklemişlerdir. Fikir birliğine varma prensibi gruptaki tüm öğrencilerin bir problemi çözebilmeleri için ortak bir yaklaşımı kabul etmelerini ve bu yaklaşımı birbirlerine açıklayabilmelerini gerektirmektedir. Konuyu tekrar ele alma prensibi ise öğrencilerin grubun fikirlerini tartışma ve doğrulama için sınıfa sunmalarını gerektirmektedir. Tanımlanan bu beş prensip bağlamında OA kısaca öğrencilerin grup içinde problemi bireysel olarak "sundukları", kendi fikirlerini grup arkadaşlarıyla "karşılaştırdıkları", grup içindeki fikirlerini "açıkladıkları", "gerekçelendirdikleri", fikirler hakkında "karara vardıkları" ve son olarak sınıf arkadaşlarına bu fikirleri sunarak "doğrulama yaptıkları" bir süreçtir (Brown, 2017). Brown'u (1994) takip eden çalışmalarda (Brown, 1997, 1998, 2017; Brown & Renshaw, 1995, 1996, 1999, 2000, 2006; Planas & Morera, 2011; Renshaw & Brown, 1997) araştırmacılar OA'yı söz konusu prensipler bağlamında ele almaya devam etmişlerdir.

Argümantasyon çoğunlukla formal mantıkla ilişkilendirilmekte ve bu sebeple ispat üzerine yapılan akademik çalışmalar ön plana çıkabilmektedir. Toulmin (2003) formal mantığın günlük yaşantıdaki tartışmaların incelenmesinde kullanılmasının uygun olmayacağını savunmuştur. Benzer şekilde Krummheuer (2000) da sanılanın aksine argümantasyonun yalnızca ispatla veya formal mantıkla ilişkilendirilmesinin doğru bir yaklaşım olmayacağını ifade etmektedir. Krummheuer (1995) bu durumu argümantasyon süreci için illa ki bir iddianın doğruluğunun sorgulanmasının gerekmeyebileceği, bir problem çözümü ya da basit bir akıl yürütme süreci gibi sınıf içi sıradan eylemlerde bile argümanlar oluşturulabileceğiyle açıklamaktadır. İşte bu noktada analitik ve analitik olmayan (substantial) argümantasyon ayrımı ortaya çıkmaktadır. Mantıksal çıkarımlar sonucunda önermelerin doğruluğunun gösterildiği argümanlar analitik argümanlardır (Toulmin, 2003). Analitik olmayan argümanlarda ise bir ifade ya da karar aşamalı olarak desteklenir ve bu destek mantıksal önermelerden ziyade ikna edici ilişkiler, açıklamalar, gerekçelendirmeler ve niteleyiciler tarafından gerçekleştirilir (Krummheuer, 1995). Mantıksal önermelerden uzak olması analitik olmayan argümanların yetersiz olduğu anlamına gelmemeli aksine formal mantık tarafından erişilemeyen problem alanları için analitik olmayan argümanların gerekliliği ön plana çıkmaktadır (Krummheuer, 2000). Klein (1980) argümantasyonu "toplu olarak paylaşılan amaçlar yoluyla toplu olarak şüphenilen şeylerin toplu olarak kabul edilen şeylere dönüştürülmesi" olarak (s. 19) tanımlayarak analitik olmayan argümantasyonun önemini vurgulamıştır (akt. Krummheuer, 1995). Bu bağlamda bir topluluk içerisinde ortaya çıkan bir argümantasyon sürecinin başarılı sayılabilmesi için sadece bir algoritmanın veya mantıksal bir çıkarımın doğru uygulaması değil, aynı zamanda belirli verilerin, gerekçelerin ve destekleyicilerin bireyleri bir iddianın doğruluğuna ikna etmesi de önemlidir (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Brown, 1998). Bu durum argümanın oluşturulduğu sosyal bağlamın ne derece önemli olduğunu gösterir niteliktedir.

Uluslararası politika belgelerinde de argümantasyon kavramına yer verildiği görülmektedir. Amerika'daki Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) öğretmenlerin öğrencilerinin matematiksel argümanlar oluşturmaları ve başkalarının argümanlarını yanıtlamaları için uygun sınıf ortamları oluşturmaları gerektiğini vurgulamaktadır (NCTM, 2000, s. 18). Bunun yanında Amerika'da birçok eyaletin kabul etmiş olduğu Amerika Ortak Eyalet Matematik Standartları'na (Common Core State Standards for Mathematics [CCSSM]) bakıldığında, öğrencilerde geliştirilmesi gereken sekiz matematik standardından birinin argümantasyon olduğu belirtilmekte ve bu durum "Uygulanabilir argümanlar oluşturma ve başkalarının akıl yürütmelerini eleştirme" olarak ifade edilmektedir (CCSSM, 2010). Ülkemiz öğretim programları ele alındığındaysa OA'nın doğrudan ifade edilmediği görülmüştür. 2017 yılında yenilenen öğretim programları ile birlikte ortaokul düzeyinde öğretim programının temel felsefesi altında eleştirel sorgulamaya yer verilmiştir. Bu kapsamda "Birey düşüncelerini argümanlar ortaya koyarak savunduğu için bu savunma, düşüncelerin tekrar değerlendirilmesine de olanak tanır." (s. 4) ifadesiyle argümanlar oluşturarak fikirleri savunmanın üzerinde durulmuş ve bireyin eleştirel sorgulama niteliğine sahip olması gerektiği vurgulanmıştır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2017a). Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı ele alındığında öğrencilere kazandırılması hedeflenen yeterliklerden bilim ve teknoloji yeterliği kapsamında öğrencilerin bilimsel sorgulamanın özelliklerini kavrama becerilerinin kazandırılması hedeflenmektedir (MEB, 2017b). Bunun yanında ortaokul programında ifade edildiği gibi eleştirel düşünmenin gerekliliği vurgulanmakta fakat özel olarak argüman oluşturma ifadesine rastlanmamaktadır. Öğretim programlarımızda kendine çok fazla yer bulamayan OA kavramı ulusal çalışmalarda da görülmemektedir. Yalnızca birkaç çalışmada OA kavramı üzerinde durulmadan yalnızca argümantasyon kavramı ele alınmıştır. Bu çalışmalarda kimilerinin TAŞ'tan yararlandığı kimilerinin de argümantasyon sürecini değil de argümantasyon tabanlı öğretim modelini ele aldıkları dikkat çekmektedir. Dinçer (2011) doktora tez çalışmasında matematik öğretmenliğinde okuyan ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinin lisans matematik derslerindeki tartışmalarını inceleyerek oluşturulan argümanları TAŞ ile analiz etmiştir. Urhan ve Bülbül (2016) lise öğrencilerinin argümantasyon ve ispat süreçlerini TAŞ kullanarak incelemiş ve bunları ilişkilendirmiştir. Mercan (2015) doktora tez çalışmasında 9. sınıfta fonksiyonlar konusunun argümantasyon tabanlı öğrenme yaklaşımı ile öğretimin, öğrencilerin akademik başarılarına, matematiğe karşı tutumlarına, bilimsel süreç becerilerine ve kavramsal anlayışlarına etkisini incelemiş ve mevcut öğretim yöntemi ile karşılaştırmıştır. Duran, Doruk ve Kaplan (2017) ise argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarıları ve kaygılarına etkisini belirlemiş ve öğrencilerin görüşlerini incelemişlerdir. Söz konusu çalışmalar çok az sayıda olmakla birlikte bu çalışmalarda OA kavramından hiç bahsedilmediği görülmektedir.

Bu çalışmada OA kavramının tanıtımının yapılarak matematik eğitimi alanındaki OA çalışmaları hakkında bilgi verilmesi hedeflenmektedir. Uluslararası alandaki OA çalışmalarının analitik ve analitik olmayan argümanlar arasındaki ayrıma dayalı olarak içerik açısından iki türe ayrıldığı görülmektedir. Birinci türdeki çalışmalar ispatlama etkinliklerinde öğrencilerin argümanlarını incelerken (Boero, 2011; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007; Knipping, 2004, 2008; Knipping & Reid, 2013; Pedemonte, 2002, 2008), ikinci türdeki çalışmalar ise farklı öğrenme ve öğretme etkinlikleri üzerinde çalışan küçük grupların argümanlarını incelemektedirler (Conner, 2008, 2012; Conner ve ark., 2014a, 2014b; Forman ve ark., 1998; Krummheuer, 2007; le Roux, Olivier & Murray, 2004; Rasmussen & Stephan, 2008; Stephan & Rasmussen, 2002; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008; Whitenack & Knipping, 2002; Yackel, 2002, 2004). Özel olarak bu çalışmada ispat sürecindekiler yerine sınıf içi tartışmalar, problem çözümleri gibi matematik sınıflarındaki tartışmalardaki OA süreçleri ele alınmaktadır. Bu bağlamda çalışmanın amacı Krummheuer'in (1995) uyarlamasına dayalı olarak matematik eğitimi alanındaki OA araştırmalarını tanıtmak, bunların benzerlikleri ve farklılıkların ortaya çıkarmak ve bu çalışmalar hakkında genel bir yorumlama yapmaktır.

2. Yöntem

Çalışma kapsamında SSCI (Social Sciences Citation Index), ERIC (Education Resources Information Center), Australian Education Index ve British Education Index isimli indekslerde taranan dergilerde yayımlanan makaleler, ICME (International Congress on Mathematics Education), PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education), PME-NA (North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), CERME (Congress of European Research in Mathematics Education) ve MERGA (Mathematics Education Research Group of Australasia) gibi kongre ve konferanslarda sunulmuş ve tam metnine ulaşılan bildiriler ile matematik eğitimi alanına ilişkin uluslararası kitap bölümleri incelenmiştir. Söz konusu incelemeler gerçekleştirilirken "argumentation", "collective argumentation", "Toulmin's argumentation schema/scheme" gibi anahtar kelimeler kullanılarak arama yapılmıştır.

3. Bulgular

Çalışmanın amacı kapsamında alanyazın taraması gerçekleştirilirken bazı çalışmaların genişletilip düzenlenerek sonradan tekrar yayınlandığı görülmektedir. Örneğin Yackel (2001) PME 25 konferansında sunduğu çalışmasını daha sonra Journal of the Korea Society of Mathematical Education isimli dergide yayınlamış olduğundan söz konusu dergi makalesi ele alınmıştır. Benzer şekilde Krummheuer (2007) de Journal of Mathematical Behavior isimli dergideki makalesini düzenleyerek 2015 yılında Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Edcuation (Krummheuer, 2015) isimli kitapta kitap içi bölüm olarak yayınlamıştır. Bulgular sunulurken daha fazla ayrıntıya yer verilmiş olması sebebiyle yalnızca söz konusu makale göz önünde bulundurulmuştur. Bu gibi durumlarda çalışmanın genişletilmiş ve daha ayrıntılı halleri göz önünde bulundurularak incelemeler gerçekleştirilmiştir. Alanyazın taraması sonucunda belirlenen OA çalışmaları Tablo 1'de gerçekleştirildiği yıllara göre sıralanmakta ve çalışmayı gerçekleştirenler, çalışmanın yılı, kaynağı ve içeriği hakkında kısa bir bilgi verilmektedir.

Tablo 1. Matematik eğitimi alanındaki OA çalışmaları

Yazarlar ve Yıl	Kaynak	Çalışmanın İçeriği
Forman ve ark., 1998	Learning and Instruction	Öğretmenin verdiği bir alan probleminin çözümü esnasındaki öğrenci söylemleri Toulmin'in argümantasyon modeli ile incelenmektedir.
Stephan & Rasmussen, 2002	Journal of Mathematical Behavior	Lisans düzeyindeki diferansiyel denklemler dersinde öğrenciler arasındaki tartışmalar TAŞ kullanılarak incelenmekte ve bu yolla sınıf içindeki matematiksel uygulamalar açıklanmaktadır.
Whitenack & Knipping, 2002	Journal of Mathematical Behavior	Krummheuer'in argümantasyon teorisi ile Gravemeijer'in Gerçekçi Matematik Eğitimi teorisi birleştirilerek matematiksel argümanların nasıl oluşturulduğu ve öğrencilerin modellerinin bu argümanlara nasıl katkı sağladığı araştırılmaktadır.
Yackel, 2002	Journal of Mathematical Behavior	OA sürecindeki öğretmen rolleri incelenmektedir.
le Roux ve ark., 2004	South African Journal of Education	Kesir problemi üzerinde çalışan 5. sınıf öğrencilerinin argümantasyon süreci TAŞ ile incelenmektedir.
Yackel, 2004	Journal of the Korea Society of Mathematical Education	Açıklama, gerekçelendirme ve argümantasyon kavramları önce sembolik etkileşimcilik sonra buna dayalı olarak argümantasyon şeması perspektifine dayalı olarak ele alınmakta ve ilgili sosyal ve sosyo-matematiksel normlar tartışılmaktadır.
Krummheuer, 2007	Journal of Mathematical Behavior	Toulmin'in argümantasyon teorisi ile Goffman'ın konuşmacının rolünün incelenmesi fikri sınıf içindeki argümantasyon kesitlerine dayalı olarak ilişkilendirilmektedir.
Conner, 2008	Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA	İspat sürecindeki argümanların birbirleriyle bağlantıları ile alt argümanların oluşumu açıklanmaktadır.
Rasmussen & Stephan, 2008	Chapter in Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching	Matematiksel fikirlerin sınıf tarafından paylaşıldığı durumları incelemek için TAŞ kullanılmakta ve birinci sınıf matematik dersi ile lisans düzeyindeki bir diferansiyel denklemler dersinden örnekler verilmektedir.
Weber ve ark., 2008	Educational Studies in Mathematics	Tartışmaların matematiksel öğrenmeye nasıl katkı sağladığı araştırılmakta ve verimli tartışmaların ortaya çıkmasını sağlayan sosyal ve çevresel koşullar açıklanmaktadır.
Conner, 2012	Proceedings of the 12th ICME	Bir matematik sınıfındaki OA sürecinde ortaya çıkan gerekçe türleri sınıflandırılmaktadır.
Conner ve ark., 2014a	Educational Studies in Mathematics	Lise matematik sınıflarında öğretmenin OA'yı nasıl desteklediğini ortaya koyan bir kuramsal çerçeve sunulmaktadır.

Tablo 1'in devamı

Conner ve ark., 2014b	Mathematical Thinking and Learning	OA sürecindeki akıl yürütme türlerini belirlemek için Peirce'nin akıl yürütme türleri ile Toulmin'in argüman yapısı birleştirilerek örnekler sunulmaktadır.
Wagner, Smith, Conner, Singletary & Francisco, 2014	Proceedings of PME-NA 35	Lise matematik öğretmen adaylarının OA hakkındaki gelişen kavrayışları incelenmektedir.

Forman ve arkadaşlarının (1998) çalışmasında bir ortaokul matematik öğretmeni düzgün olmayan bir geometrik şeklin alanının hesaplanması ve cm^2 cinsinden bulunan alanın mm^2'ye çevrilmesini istemiştir. Çözümlerini gerçekleştiren öğrenciler tahtaya çıkarak çözümlerini açıklamışlar ve bu süreçte öğretmen yönlendirici olmayan bir öğretim izleyerek öğrencilerini aktif bir şekilde açıklama yapmaya, açıklamalarına gerekçe sunmaya, birbirlerini dinlemeye, kendilerinin ve başkalarının argümanlarını değerlendirmeye teşvik etmiştir. Toulmin'in argümantasyon modeline göre çözümlerin tartışıldığı süreçteki öğrenci ve öğretmen söylemleri analiz edilerek bulgular sunulmuştur. Çalışmanın sonuçları öğretimsel ve matematiksel içerik açısından iki çerçeve altında sunulmuştur. Öğretimsel çerçeve bağlamında öğrencilerin öğretmenden daha çok açıklama yaptıkları, kendi ifade ettikleri veriler, gerekçeler ve destekleyicilere dayalı olarak yanıtlar ve iddialar sundukları ve hem kendilerinin hem de akranlarının argümanlarını değerlendirdikleri sonuçlarına ulaşılmıştır. Ayrıca öğretmen de dikkati toplayarak, sınıfın katılımını sağlayarak, uygun konuşma şekillerini bildirerek, tekrar etme stratejisini kullanarak, açıklamaların örtük fakat önemli olan yönlerini ortaya çıkararak OA sürecine katılım sağlamıştır. Matematiksel çerçeve bağlamında öğrencilerin alan ve birimler arası dönüşüm hakkında çok fazla anlaşmazlık yaşadıkları görülmüştür. Toulmin'in modeli öğrencilerin argümanları arasındaki farklılıkları görmeye yarar sağlamıştır. Sınıf içindeki sosyal normlar ve beklentilerdeki değişimler doğrultusunda süreç boyunca matematiksel çerçevede değişim yaşanmıştır. Öğretmenin öğrencilerin çözümlerinin doğruluğunu değerlendirmek yerine dersin amacı doğrultusunda uygun bir ölçüm yapmaları ve öğrencilerin bilgilerini genellemeleri konusunda yardım sağlaması OA sürecini desteklemiştir.

Stephan ve Rasmussen (2002) diferansiyel denklemler dersinde yürütülen bir öğretim deneyi kapsamında sınıf içindeki matematiksel uygulamaların analizini sunmuşlardır. Sınıf içi matematiksel uygulamayı, alanyazında yalnızca bir matematiksel fikirle ilişkilendiren yaklaşımların aksine, daha genel bir matematiksel etkinliğin gelişimini sağlayan ve herkes tarafından paylaşılan fikirlerin birleşimi olarak ele almışlardır. Araştırmacılar matematiksel uygulamaları analiz ederlerken TAŞ'tan yararlanmışlar ve sosyal bağlamlarda öğrenmenin incelendiği araştırmalara ışık tutacak bir analiz yaklaşımı geliştirmişlerdir. Bu yaklaşım çerçevesinde sınıf içindeki ortaklaşa etkinlikleri açıklamak için üç aşamalı bir yöntem izlemişlerdir. Birinci aşamada tüm sınıf tartışmalarının kayıtlarını transkript etmişler ve tartışmalardaki iddiaları belirleyerek her bir argüman için TAŞ'lar oluşturmuşlardır. İkinci aşamada oluşturulan argüman şemalarına dayalı olarak matematiksel fikirlerin paylaşıldığı anları belirlemişlerdir. Bu anları belirlemek için iki durum olduğunu görmüşlerdir. Bu durumlar (1) Argümandaki destekleyiciler ve/veya gerekçelerin artık öğrencilerin açıklamalarında görülmediği durumlar ve (2) argümandaki veri, gerekçe, iddia ya da destekleyiciden herhangi birinin sonraki argümanda konumunun değiştiği ve meydan okunmadığı ya da meydan okunsa bile bu meydan okumaların kabul edilmediği durumlardır. Bu durumları belirledikten sonra araştırmacılar herkes tarafından paylaşılan matematiksel fikirleri belirlemişlerdir. Analizin üçüncü aşamasında ise bir önceki aşamada belirlenen matematiksel fikirleri ele alarak bunları ortak kategoriler altında toplamışlardır. Bu kategorilere dayalı olarak diferansiyel denklemler dersine özgü altı matematiksel uygulamayı açıklamışlardır. Bu matematiksel uygulamalar belirli bir diferansiyel denklem için çözüm fonksiyonlarını bireysel olarak tahmin etme, bireysel tahminleri yenileme ve karşılaştırma, tahminle ilişkili olan eğim alanını oluşturma ve yapılandırma, P değerinin hem bir değişken hem de bir fonksiyon olmasına ilişkin akıl yürütme, çözüm fonksiyonlarını oluşturma ve düzenleme ile çözüm fonksiyonları hakkında akıl yürütmedir.

Whitenack ve Knipping'in (2002) çalışmasında ikinci sınıf öğrencilerine "Mary teyze 31 parçalık şekeri paketlemiştir. Johnny amca ziyarete gelmiş ve şekerlerin 15 parçasını yemiştir. Mary teyzenin ne kadar şekerinin kaldığını gösteriniz." şeklinde bir problem sunulmuş ve öğrencilerden onluk ve birlik kavramlarını kullanarak problemi çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin onluk şeker paketleri için dikdörtgenler ve birlikler için de daireler çizdikleri çözüm sürecindeki tartışmaları analiz edilmiştir. Analizin birinci aşamasında öğrencilerin argümanlarının yapılarını belirlemek için Toulmin'in argümantasyon teorisine dayalı olarak Krummheuer'in OA kavramına göre söylemler incelenmiştir. Ardından ikinci aşamada tartışmalar esnasında öğrencilerin oluşturdukları modelleri karakterize etmek için de Gravemeijer'in problem kurulumundaki etkinlik, temsil eden etkinlik, genel etkinlik ve formal etkinlik olarak ifade edilen matematiksel etkinlik düzeylerini kullanmışlardır. Gerçekleştirilen analizler birleştirilerek sınıf içindeki tartışmalar süresince matematiksel fikirlerin nasıl gelişim gösterdiği ortaya çıkarılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin gelişen modelleri ile matematiksel argümanları arasındaki ilişkinin birbirlerine bağlı olduğu ve birbirleri üzerine yansımaları olduğu görülmüştür. Ayrıca iki farklı teoriyi birleştirerek gerçekleştirilen analizlerin öğrencilerin hem bireysel hem de ortaklaşa öğrenmelerinde önemli bir rolünün olduğu anlaşılmıştır.

Yackel (2002) ortaokuldan üniversite düzeyine kadar birçok sınıf içi OA sürecini analiz etmiştir. Analizler sonucunda öğretmenin, OA sürecinde argümantasyonu teşvik eden sınıf normlarına ilişkin tartışmayı başlatma, argüman oluşturma sürecinde birbirleriyle iletişim kurarken öğrencileri destekleme ve göz ardı edilen veya görünmez olan argümantasyonel destekleri (veriler, gerekçeler ve destekleyiciler) sağlama rolleri olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bunun yanında çalışmada yeni matematiksel kavramlar ve araçlar hakkındaki matematiksel tartışmalarda argümantasyonun verimli bir şekilde kullanılabileceği de görülmüştür. Öğretmenin öğrencilerinin matematiksel kavram gelişimleri ve matematiksel kavramlara ilişkin anlayışları hakkında derinlemesine bir anlayışa sahip olması gerektiği üzerinde durulmuştur.

le Roux ve arkadaşları (2004) bir kesir probleminin çözüm sürecinde beşinci sınıftan üç öğrenciyi incelemişlerdir. Söz konusu kesir probleminde büyük bir ekmeği aile bireylerinin paylaşması istenmiş ve bu paylaşım için babanın ekmeğin yarısını, anne ve iki çocuğun da kalan kısmı eşit olarak alacakları ifade edilmiştir. Öğrencilerden istenen her bir aile bireyinin alacağı ekmek miktarının toplam ekmeğin kaçta kaçı olduğunu bulmalarıdır. Üç öğrencinin çözüm sürecindeki etkileşimleri TAŞ kullanılarak incelenmiştir. İncelemeler sonucunda TAŞ'taki bazı bileşenlerin öğrenciler arasındaki etkileşimdeki yerine değinilmiştir. Öğrenciler argümanları için gerekçe ve destekleyici bulmada zorluk yaşadıklarında bu zorluğun matematiksel kavramlar hakkındaki eksik bilgilerinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Bunun yanında öğrenciler ancak bir destekleyici buldukları zaman belli bir anlayış düzeyine ulaşabilmişler ve bu durum destekleyicinin matematiksel bilgilerin tartışılması ve kurumsallaştırılması için büyük öneme sahip olduğunu göstermiştir. Sınıfın matematiksel kültürü açısından çalışmanın bulguları ele alındığında, öğrenciler arasındaki tartışmalarda sosyal ve sosyo-matematiksel normların etkili olduğu görülmüştür. Öğrencilerin açıklamada bulunmaları gerektiği, bu açıklamaların gerekçelendirilmesi gerektiği ve gerekçe sunulduğunda açıklamaların belirgin bir hale geldiği gibi sosyal normlar ön plana çıkmıştır. Ayrıca açıklamaların kabul edilebilir olması için sebepleriyle desteklenmeleri gerektiği ve bir iddianın herkes için kabul edilebilir olması için destekleyici kullanılması gerektiği gibi sosyo-matematiksel normlar belirlenmiştir.

Yackel (2004) çalışmasında öncelikle açıklama, gerekçelendirme ve argümantasyon kavramlarına ilişkin normları analiz etmek için Blumer'in sembolik etkileşimcilik teorisinin kullanılabileceğini göstermiştir. Bunun için birinci sınıf düzeyinden bir örnek sunarak kabul edilebilir bir matematiksel açıklama olarak sayılabilecek şeyin ne olacağına ilişkin sosyo-matematiksel normun nasıl oluştuğunu göstermiştir. Ardından sınıf içindeki gelişimi belgelemek için TAŞ'ı Krummheuer'ın yorumlamasına dayalı olarak kullanmıştır. Bu amaçla birinci sınıftan aynı örneği sunarak öğrencilerin veriler, gerekçeler ve destekleyiciler olarak gerekli gördükleri ve sundukları açıklamaları ele almıştır. Ardından lisans düzeyinden diferansiyel denklemler dersine ilişkin bir örnek sunarak açıklama, gerekçelendirme ve argümantasyon için gereken sosyal ve sosyo-matematiksel normları sunmuştur. Bu normlar kapsamında öğrencilerin kendi düşünmelerini açıklamaları ve gerekçelendirmeleri, başkalarının açıklamalarını dinlemeleri ve tepki vermeleri, kendi iddialarını gerekçelendirmek için argümanlar sunmaları ve başkalarının argümanlarını anlamlandırmaları gerektiği ifade edilmiştir. Bunun yanında öğrencilerin verilen bir iddiayı destekleyen birden fazla argüman olabileceği bilgisine sahip olmaları, iddialar için gerekçeler sunmaları, bu gerekçelerin meydan okunmaya ve tartışılmaya açık olduğunu bilmeleri, çeşitli iddiaları savunmak veya çürütmek için ek matematiksel bilgi ve araçları kullanmaları gerektiği de belirtilmiştir.

Krummheuer (2007) çalışmasında birinci sınıf matematik dersinden verdiği iki farklı kesit üzerinden önce Toulmin'in argümantasyon teorisine dayalı olarak argüman yapılarını araştırmıştır. Daha sonra aynı kesitleri Goffman'ın konuşmacının rolünün incelenmesi fikrine dayalı olarak inceleyerek öğretmen ve öğrencilerin sürece katılımlarını analiz etmiştir. Ardından söz konusu analizleri bir arada ele alarak iki farklı teorinin ilişkilendirmesini gerçekleştirmiştir. İlişkilendirme sonucunda farklı katılım düzeylerinin oluşturulan argümanları etkilediği ortaya çıkmıştır. OA açısından sonuçlar ele alındığında gerekçelerin oluşturulmasına katkı sağlayan öğrencilerin yalnızca verileri ve iddiaları oluşturanlardan daha çok matematik bilgisine sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Conner (2008) çalışmasında her ne kadar ispat sürecindeki argümanları ele almış olsa da, içerik itibariyle sınıf içindeki OA durumlarına açıklık getirmesi ve özellikle Conner ve meslektaşlarının sonraki birçok çalışması için başlangıç noktası niteliğinde olması sebebiyle bu çalışma burada sunulmaya değer görülmüştür. OA sürecinde oluşturulan argümanların birbirleriyle bağlantısı alt argümanlar ile açıklanmış ve sürece katkı yapan kişileri (öğretmen veya öğrenci) belirtmek amacıyla farklı renk ve gösterimlerden yararlanılmıştır. Bir argümantasyonun karmaşıklığının içerdiği alt argümanların sayısıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir. Ayrıca oluşturulan argüman şemalarının yapısı gereği OA sürecindeki öğretmen rollerine ilişkin fikir verebileceği konusunda ileriki çalışmalara ışık tutacağı görülmüştür.

Rasmussen ve Stephan (2008) bir öğretim deneyi tasarımında matematik sınıflarında fikirlerin herkes tarafından paylaşıldığı ve kabul edildiği durumları incelemek için TAŞ'ı bir araç olarak kullanmışlar daha önce açıklanan çalışmalarında (Stephan & Rasmussen, 2002) ifade edildiği gibi bu çalışmada da analiz yöntemi olarak geliştirdikleri yaklaşımı tanıtmışlardır. Çalışmanın devamında matematiksel fikirlerin paylaşılır olduğu iki durumu örneklemek için birinci sınıf matematik dersinden ve lisans düzeyindeki diferansiyel denklemler dersinden örnekler sunmuşlardır.

Weber ve arkadaşları (2008) bir istatistik problemi üzerinde çalışan öğrencilerin tartışmalarını incelemişler ve bu süreçteki öğrenci argümanları TAŞ kullanılarak analiz edilmiştir. Analizler sonucunda öğrenci çalışmalarının cesaretlendirildiği ve yargılanmadığı, anlam oluşturmanın ön planda olduğu, öğrencilerin arabulucu olduğu ve yeterli sürenin sağlandığı öğrenme ortamlarındaki tartışmalara öğrenciler aktif katılım göstermiş ve birbirlerinin argümanlarına meydan okumuşlardır. Böylece argümanlara sunulan gerekçeler görünür hale gelmiş ve tartışmanın temel amacı olmuştur. Dolayısıyla sunulan gerekçelerin TAŞ içerisindeki konumları değişmiş bir başka deyişle sunulan gerekçeler öğrencileri daha yüksek matematiksel akıl yürütme yapmalarını gerektirecek şekilde gerekçelendirilmesi gereken iddialar haline gelmişlerdir. Bir başka deyişle Weber ve arkadaşları yalnızca verilerin değil, tartışmanın odak noktası olması durumunda gerekçelerin de başka argümanlarda iddia konumunda olabileceğini göstermişlerdir. Böylelikle alanyazında argümanların birbirlerine yalnızca veri-iddia yoluyla değil gerekçe-iddia yoluyla bağlanabileceği durumlara örnekler sunmuşlardır.

Conner arkadaşlarıyla OA sürecindeki öğretmen desteklerini ve akıl yürütme türlerini inceledikleri büyük bir çalışmadan elde edilen bazı bulguları 2012 yılındaki çalışmasında ele almıştır. Bu çalışmada öğretmen, öğrenciler veya öğretmen ile öğrencilerin birlikte katkıda bulundukları ve açık bir şekilde ifade ettikleri gerekçe türlerini sınıflandırılmıştır (Conner, 2012). Bu sınıflandırma sonucunda matematiksel bilgi, doğrulama, otorite veya dışsal bir kaynak tarafından geçerli kılma, yorumlama, örüntüler, yöntem, hesaplama, görsel, biçimlendirilmemiş matematiksel bilgi ve verilen bilgi olmak üzere on gerekçe türü olduğunu ortaya koymuştur. Matematiksel bilgi türündeki gerekçeler incelenirken farklı öğretmenlerin sınıflarındaki uygulamalarda ayrımlar olduğu fark edilince bu türden gerekçeler, teoremler ve tanımlar ile daha önceden sınıf içinde kabul edilmiş ve henüz bir teorem statüsünde olmayan sonuçlar olmak üzere ikiye ayrılmıştır.

Conner ve arkadaşları (2014a) lise matematik sınıflarında öğretmenlerin OA'yı nasıl desteklediklerini incelemek için, öğretmenin argümanlara doğrudan katkılarını, sorduğu soru türlerini ve diğer destekleyici eylemleri içeren bir çerçeve (Bkz. Tablo 2) önermişlerdir.

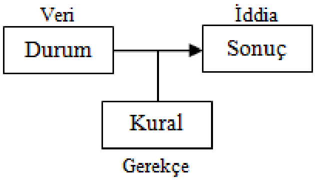
Tablo 2. OA için öğretmen desteği çerçevesi (Conner ve ark., 2014a)

Doğrudan katkılar		**Sorular**		**Diğer destekleyici eylemler**	
İddialar	Geçerliği sağlanmış ifadeler	Gerçeklere dayanan bir yanıt isteme	Matematiksel bir gerçek sunulmasını isteme	Yönlendirme	Öğrencilerin dikkatini ve/veya argümanı yönlendirmelerini sağlayacak eylemler
Veriler	İddialara destek sağlayan ifadeler	Yöntem isteme	Bir şeyin nasıl yapıldığının ya da yapılacağının gösterilmesini ya da açıklanmasını isteme	Destekleme	Matematiksel araştırmaları desteklemeyi sağlayacak eylemler
Gerekçeler	Verileri iddialara bağlayan ifadeler	Fikir isteme	Matematiksel fikirlerin karşılaştırılmasını, koordine edilmesini veya oluşturulmasını isteme	Değerlendirme	Matematiksel olarak doğruluk sağlayacak eylemler
Çeldiriciler	Gerekçelerin geçerli olmadığı durumları açıklayan ifadeler	Ayrıntı isteme	Bazı fikirlerin, ifadelerin ya da diyagramların ayrıntılandırılmasını isteme	Bilgilendirme	Argüman için bilgi sağlayan eylemler
Niteleyiciler	İddianın kesinliğini açıklayan ifadeler	Değerlendirme isteme	Matematiksel bir fikrin değerlendirilmesini isteme	Tekrarlama	İfade edilen şeyleri tekrarlayan eylemler
Destekler	Çoğunlukla ifade edilmeyen, argümanın alanıyla ilgili bilgiler				

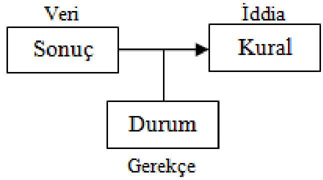
Öğretmen adaylarının derslerini izleyerek geliştirilen çerçevenin öğretmen eğitiminde ve mesleki gelişim programlarında kullanılabileceğini ifade etmişlerdir. Bir öğretmenin uzun süreli OA uygulaması yoluyla söz konusu çerçevenin geliştirilebileceği de belirtilmiştir.

Başka bir çalışmada ise yine Conner ve arkadaşları (2014b) OA sürecindeki akıl yürütme türlerini belirlemişlerdir. Peirce'nin (1956) tümdengelimsel, tümevarımsal, abdüktif ve analojik akıl yürütme türleri Toulmin'in argümantasyon bileşenleri ile ilişkilendirilmiştir (Bkz. Tablo 3).

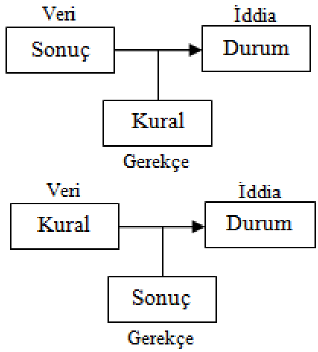
Tablo 3. Farklı akıl yürütme türlerini yansıtan TAŞlar



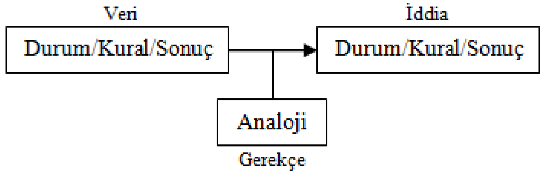
a. Tümdengelimsel argüman



b. Tümevarımsal argüman



c. Abdüktif argümanlar



d. Analoji yoluyla akıl yürütme

Söz konusu ilişkilendirme sonucunda tümdengelimsel bir argüman gerekçe olarak sunulan bir kural aracılığıyla verilen durumdan sonuca geçişi ve tümevarımsal bir argüman gerekçe olarak sunulan durum aracılığıyla bir sonuçtan bir kurala geçişi içermiştir. Abdüktif argümanların iki türde olabileceği belirtilmiş ve bunların gerekçe olarak sunulan bir kural aracılığıyla bir sonuçtan bir duruma geçişi veya gerekçe olarak sunulan bir sonuç aracılığıyla bir kuraldan bir duruma geçişi içerdiği açıklanmıştır. Son olarak analojik bir argüman gerekçe olarak sunulan bir analoji aracılığıyla bir durum, kural veya sonuçtan yine bir durum, kural veya sonuca geçişi içermiştir. Daha sonra belirledikleri argüman türlerini bir öğretmenin dersinden kesitler vererek örneklemişlerdir. OA sürecindeki akıl yürütme türlerinin incelenmesiyle öğrencilerin tümevarımsal ve abdüktif akıl yürütmeden ispat için gerekli olan tümdengelimsel akıl yürütmeye nasıl geçeceklerinin belirlenebileceği ifade edilmiştir.

Wagner ve arkadaşları (2014) çalışmasında üniversitede sınıf içi argümantasyonu kolaylaştırma ve destekleme üzerine görülen bir ders süresince lise matematik öğretmeni adaylarının OA'ya ilişkin gelişen kavrayışlarını incelemişlerdir. Bu incelemelerde öğretmen adaylarının TAŞ bileşenlerini nasıl yorumladıkları ve gerçek sınıflardaki tartışmalara ilişkin gözlemleri ön planda olmuştur. Çalışmanın başında öğretmen adayları OA'yı kişiler arasındaki anlaşmazlık durumu olarak ele alırken, bu yanlış kavrayış TAŞ sayesinde değişmiş ve çalışmanın sonunda, kanıt tarafından desteklenen herhangi bir iddia ortaya atıldığında OA'nın gerçekleştiğine ilişkin bir kavrayışa sahip olmuşlardır. TAŞ bileşenleri çerçevesinde görüşler ele alındığında iddialar birbirleriyle çelişmeyen savlar veya bir argümanın tanımlanması olarak ele alınmıştır. Veriler tüm durumları kapsayan kimi zaman görünür olan kimi zaman da görünmez olan bilgiler olarak belirlenmiştir. Gerekçeler ise temelleri dışsal bir matematiksel otoriteye dayalı kurallar, hesaplamalar veya tanımlar olarak görülmesinin yanında akıl yürütmeleri, ön bilgileri veya açıklamaları içeren anlam oluşturmaya dayalı durumlar olarak da ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının gözlemledikleri derslere ilişkin görüşleri, yetersiz matematiksel terim bilgisinin kullanımına, sınıf içindeki argümanlara katılımın kimler tarafından gerçekleştirildiğine, gerekçelere ilişkin örüntülerin ortaya çıktığına, argümantasyonun öğretimin doğasında var olduğuna, öğretmenin argümanları destekleyici sorularının olabileceğine, öğretmenin uygulamasının geliştirilebileceğine, öğrenci ön bilgilerinin önemine, bazı TAŞ bileşenlerinin kullanımına ilişkin öğrencilerin zayıf kaldıklarına ilişkin olmuştur. Tüm bunların yanında öğretmen adayları etkili ve etkisiz argümanları ayırmışlardır. Onlara göre etkili argümanlar konular arasında açık bağlantılar kuran, çok sayıda perspektifi içeren, öğrencilere tanıdık gelen, öğrencilerin katılımlarına olanak tanıyan ve açık gerekçeler içeren argümanlardır. Etkisiz argümanlar ise öğretmenin yalnızca bir yöntem üzerinde durduğu alternatif perspektifleri barındırmayan, ezberlenmiş gerekçelere dayalı olan, yetersiz gerekçeleri içeren ve öğrencilerin katılımına olanak tanımayan argümanlar olarak ifade edilmiştir.

4. Tartışma ve Sonuç

Krummheuer'in (1995) Toulmin'in (2003) argümantasyon teorisini matematik eğitimine uyarlamasına dayalı olarak OA araştırmalarının tanıtılmasını amaçlayan bu çalışmada alanyazın taraması sonucunda on dört yayına ulaşılmıştır. Bu çalışmalar bütüncül olarak ele alındığında ortak özellikleri açısından bir kategorilendirmenin yapılıp yapılamayacağı göz önünde bulundurulmuştur. Bunun sonucunda çalışmaların bazı ortak özelliklere veya yapılara sahip olduğu görülmüştür. Öncelikle çalışmaların her birinin sınıf içindeki öğrenciler arası ya da öğrenci öğretmen arası söylemlere dayalı olarak gerçekleştirildiği anlaşılmıştır. Tüm çalışmaları ortak özellikler veya yapılara göre sınıflandırabilmek için Tablo 4 oluşturulmuştur.

Tablo 4 incelendiğinde çalışmalar her ne kadar sınıf içi söylemlere dayalı olsalar da bir kısmının teorik tartışmalara doğrudan bir katkı sağlama, teoriler arası ilişkilendirme yapma ya da çerçeve sunma gibi amaçları olmuştur. Yackel (2004) birinci sınıf ve lisans düzeyindeki, Conner (2008, 2012) ise lise düzeyindeki OA süreçlerine odaklanarak

Tablo 4. OA araştırmalarına ilişkin sınıflandırma tablosu

Yazarlar ve Yıl	Öğretmene odaklı	Öğrenciye odaklı	Kuramsal çerçeve ilişkilendirmesi	Kuramsal çerçeve oluşturma	Kavramsal tanıtım	Görüş belirleme
Yackel, 2004	X	X			X	
Conner, 2008	X	X			X	
Conner, 2012	X	X			X	
Stephan & Rasmussen, 2002		X			X	
Rasmussen & Stephan, 2008		X			X	
Whitenack & Knipping, 2002		X	X			
Krummheuer, 2007	X	X	X			
Conner ve ark., 2014b	X	X	X			
Conner ve ark., 2014a	X	X		X		
Forman ve ark., 1998	X	X				
Yackel, 2002	X					
Wagner ve ark., 2014	X					X
le Roux ve ark., 2004		X				
Weber ve ark., 2008		X				

öğretmen ve öğrenci argümanlarına dayalı bir kavramsal tanıtım yapmıştır. Yackel (2004) sınıf içi söylemlerden hareketle açıklama, gerekçelendirme ve argümantasyon örnekleri sunmuş ve bu örneklere dayalı olarak bazı sosyal ve sosyo-matematiksel normları açıklamıştır. Conner (2008) ise öğrenci ve öğretmen söylemlerine dayalı olarak oluşturduğu TAŞ'ların yapısına ilişkin bir tanıtım yaparak şema üzerinden öğrenci, öğretmen veya her ikisinin birden ortak katkısını sunabileceği bir gösterimden yararlanılabileceğini ifade etmiştir. Ardından bu söylemlerde kullanılan gerekçe türlerini sınıflandırmış ve OA sürecindeki gerekçelerin neler olabileceğine ilişkin bir tanıtım yapmıştır (Conner, 2012). Stephan ve Rasmussen (2002) ile Rasmussen ve Stephan (2008) ise sınıf içindeki öğrenci söylemlerine odaklanarak fikirlerin herkes tarafından paylaşıldığı anları ve bunlara dayalı olarak sınıf içindeki matematiksel uygulamaları belirlemek için TAŞ'ın yöntemsel olarak kullanımına ve TAŞ bileşenlerinin içeriklerindeki değişime ilişkin bir kavramsal tanıtım yapmışlardır. İncelenen çalışmalardan üçü kuramsal çerçeve ilişkilendirmesine dayalıdır ve her biri Krummheuer'in argümantasyon teorisini farklı teorilerle ilişkilendirmiş ve örneklerini sunmuştur. Whitenack ve Knipping (2002) Gravemeijer'in Gerçekçi Matematik Eğitimi teorisini, Krummheuer (2007) Goffman'ın konuşmacının rolüne ilişkin teorisini ve Conner ve arkadaşları ise (2014b) Peirce'nin akıl yürütme türlerine ilişkin teorisini argümantasyon ile ilişkilendirmiştir. Çalışmalardan biri (Conner ve ark., 2014a) ise hepsinden farklı olarak kuramsal çerçeve oluşturma amacını güderek OA sürecindeki öğretmen desteklerini belirlemiştir. Diğer beş çalışma ayrıca ele alındığındaysa iki tanesinin öğretmene iki tanesinin öğrenciye bir tanesinin de hem öğretmene hem de öğrenciye odaklandığı görülmüştür. Forman ve arkadaşları (1998) ortaokul düzeyindeki bir problem çözümünde öğrenci ve öğretmen söylemlerine odaklanmıştır. Problem çözümündeki tartışmalara dayalı olarak öğretmenin OA sürecindeki eylemlerini incelemiş ve aynı zamanda öğrencilerdeki gelişimi açıklamışlardır. Yackel (2002) ilkokul ve lisans düzeyindeki OA'lardan örnekler vererek öğretmen rollerini belirlemiştir. Wagner ve arkadaşları (2014) ise lise matematik öğretmeni adaylarının OA'ya ilişkin aldıkları eğitim ve gerçek sınıf gözlemleri sonucunda OA'ya ilişkin görüşlerini belirlemişlerdir. Öğrenciye odaklanan çalışmalardan ilkinde le Roux ve arkadaşları (2004) beşinci sınıf düzeyindeki bir problemin çözümünde öğrencilerin söylemlerini TAŞ kullanarak incelemiştir. İkincisinde ise Weber ve arkadaşları (2008) ortaokul düzeyindeki öğrencilerin verilen bir problemi çözme sürecindeki söylemlerini TAŞ ile analiz etmişlerdir.

Matematik eğitimindeki OA çalışmalarının hepsinde öğrenci, öğretmen veya öğrenci-öğretmen söylemlerine odaklanıldığı ve TAŞ'ın kişiler arası etkileşimi açıklamak için bir tür söylem analizi aracı olarak kullanıldığı görülmektedir. İleriki çalışmalarda kuramsal çerçeve oluşturma ve ilişkilendirme çalışmalarının farklı bağlamlardaki uygulamalarla geliştirilebileceği düşünülmektedir. Özellikle ülkemizde matematik derslerindeki OA sürecine ilişkin çalışmalarda ciddi bir eksiklik olması sebebiyle, uluslararası alana katkı sağlayacak her türlü çalışmaya ihtiyaç duyulmaktadır. Uzun süreli uygulamalar yoluyla, farklı öğrenci seviyeleri ve öğretmenlere odaklanılarak, farklı sosyal ve sosyo-matematiksel normların oluştuğu matematik sınıflarında yapılacak OA çalışmalarının öncelikle ulusal daha sonra da uluslararası alana büyük katkı sağlayacağı açıkça görülmektedir.

Examination of the Collective Argumentation Studies in the Mathematics Education Field

Extended Abstract

Introduction

The content of the studies in mathematics education has begun to change due to the orientation from individual learning to social learning. It is expressed that students' mathematical activities are meaningless when they are examined independently of the social and cultural context they are in (Cobb, Jaworski & Presmeg, 1996). Thus, the discourse of the teachers and students during the discussions in the mathematics classes came to the forefront (Sfard, 2001) and the mathematical explanations in these discourses and the justifications emerged in the situations where these explanations were questioned (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992) were of importance. This process supported by justifications for the explanations points to the process of argumentation (Schwarz & Asterhan, 2010; Yackel, 2004). The concept of argument came to the forefront first with the work of Toulmin (2003) and was adapted to the field of mathematics education by Krummheuer (1995). While Toulmin describes argumentation as the process of persuading the opposing community about the claim of one person, Krummheuer identifies this process as a social phenomenon where people try to change their intentions and interpretations by verbally presenting the reasons for the actions of the individuals involved in the argumentation, and so he emphasizes the interaction in this process. Thus Krummheuer (1995) preferred to use the concept of collective argumentation (CA) in his work. In the most general sense, CA is defined as an argumentation process in which more than one person (student / teacher) makes a mathematical claim and offers evidence to support that claim (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014a). The researchers used Toulmin's argumentation schema (TAS) to examine the CA processes within the classroom. According to this schema, the components of an argument are data, claim, warrant, backing, qualifier and rebuttal. Claims are both the beginning and ending points of the arguments (Toulmin, 2003), and there also are the responses asked in the class or the points of which the students trying to make sense (Conner et al., 2014a). Data are real expressions that support claims, and the warrants include situations that reduce or completely remove uncertainties while linking the data and the claim (Conner, Swingletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014b). The rebuttals are used to describe the cases where the warrants are not valid. The expressions indicating the degree of certainty of the claims are called qualifiers. The backings, however, are made up of facts that are accepted without question for the validity and justification of the warrants, which are specific to the field of the argument.

It seems that the CA studies in mathematics education are divided into two. The first type studies examine the student arguments in the proving activities, while the second type studies examine the small group's arguments working on different learning and teaching activities. In this study, the CA studies in which in-class discussions, problem solving activities, etc are in the foreground are considered instead of the proving processes. In this context, the purpose of the study is to introduce the CA studies in the mathematics education field based on the adaptation of Krummheuer (1995), to reveal their similarities and differences and to make a general interpretation of these studies.

Methodology

In the scope of the literature review conducted in line with the purpose of the study, the journals indexed in leading indexes within the field of mathematics education, the proceedings presented in the international outstanding congress and conferences and published as full texts, and the chapters of the books were examined. As a result of these examinations, fourteen different studies were found.

Findings

It is seen that each of these studies, which developed from 1998 to 2014, were carried out based on the discourses between students and teachers within the classroom, and used the TAS. Although these studies are based on classroom discourses, some of them make a direct contribution to theoretical discussions, make associations between the theories or present frameworks. The studies that directly contributed to theoretical discussions focused on the CAs at different class levels and described the characteristics of the mathematical activities in this process (Conner, 2008, 2012) or explained the emerging social and socio-mathematical norms (Yackel, 2004). In a study (Conner, 2008), the concept of sub-argument was explained by using the TAS analysis and it was found that there was a direct contribution to theoretical discussions by using different representation in the schemas to explain the individuals contributing to the process. In another study (Conner, 2012), which also aims to contribute to theoretical discussions, the types of warrants used in the mathematics classes were categorized. Stephan and Rasmussen (2002) and Rasmussen and Stephan (2008) focused on student discourse in the classroom and made a conceptual introduction to the methodological use of the TAS and the changes in the components of the TAS to identify moments in which ideas were taken-as-shared and mathematical applications within the class were identified based on these ideas. Three of the studies associated Krummheuer's argumentation theory with different theories and presented examples. The argumentation theory was linked with Gravemeijer's Theory of Realistic Mathematics Education by Whitenack and Knipping (2002), with Goffman's theory on speaker roles by Krummheuer (2007), and with Peirce's theory of types of reasoning by Conner and her colleagues (2014b). One of the studies (Conner et al., 2014a), unlike all others, identified teacher support in the aim of developing a theoretical framework. When the studies outside these were taken into account, it was seen some of them focused on students, teachers or both of them. Forman et al. (1998) focused on student and teacher discourses during the period of solving a problem at the secondary school level. Based on the discussions in the problem solving process, they examined teacher actions in the CA and investigated the development of the students at the same time. Yackel (2002) identified teacher roles by giving examples from the CAs at different grade levels. Wagner and colleagues (2014) determined the opinions of pre-service high school mathematics teachers about the CA. In the studies focused on students, le Roux and colleagues (2004) analyzed fifth-grade students' discourse, and Weber and colleagues (2008) analyzed middle grade students' discourse in the process of solving a given problem by using the TAS.

Conclusions and Discussion

In the direction of the studies obtained from the literature review, it is thought that the theoretical framework development and association studies can be developed in different contexts in the future. Especially in our country, since there is a serious deficiency in the studies related to the CA in mathematics classes, all kinds of studies that contribute to the international field are needed. By focusing on different student levels and teachers through long-term implementations, it is clear that work to be done in mathematics classes in which different social and socio-mathematical norms are developed will contribute to primarily the national and later the international literature.

Kaynaklar/References

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 120-130). Rszéskow, Polonia: ERME.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. F. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–205). Belo Horizonte: PME.

Brown, R. A. J. (1994). *Collective mathematical thinking in the primary classroom: A conceptual and empirical analysis within a sociocultural framework* (Unpublished bachelor of educational studies (hons) thesis). University of Queensland, Brisbane.

Brown, R. A. J. (1997). "You can't explain infinity!": Collective argumentation discourse across primary school subject domains. In M. Goos, K. Moni & J. Knight (Eds.), *Scholars in context: Prospects and transitions* (pp. 17-22). Brisbane: Post Pressed.

Brown, R. A. J. (1998). "Where do you people get your ideas from?": Negotiating zones of collaborative learning within an upper primary classroom. In B. Baker, M. Tucker & C. Ng (Eds.), *Education's new timespace: Visions from the present* (pp.107-112). Brisbane: Postpressed.

Brown, R. A. J. (2017). Using collective argumentation to engage students in a primary mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 29*(2), 183-199.

Brown, R. A. J., & Renshaw, P. (2000). Collective argumentation: A sociocultural approach to reframing classroom teaching and learning. In H. Cowie & G. Aalsvoort (Eds.), *Social interaction in learning and instruction: The meaning of discourse for the construction of knowledge* (pp. 52-66). Oxford: Elsevier Science.

Brown, R. A. J., & Renshaw, P. D. (1995). Developing collective mathematical thinking within the primary classroom. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 128-134). Darwin: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Brown, R. A. J., & Renshaw, P. D. (1996). Collective argumentation in the primary mathematics classroom: Towards a community of practice. In P. C. Clarkson (Ed.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp.85- 92). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Brown, R. A. J., & Renshaw, P. D. (2006). Transforming practice: Using collective argumentation to bring about teacher change in a year 7 mathematics classroom. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 99-106). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Brown, R. A. J., & Renshaw, P. D. (1999). Speaking with authority in episodes of mathematical discourse. In J. Trunan & K. M. Trunan (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual* Conference of the Mathematics *Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 113-119). Adelaide: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Cobb, P., Jaworski, B., & Presmeg, N. (1996). Emergent and sociocultural views of mathematical activity. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 3-20). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, *29*(3), 573-604.

Common Core State Standards for Mathematics [CCSSM]. (2010). *Common core state standards initiative.* Retrieved April 10, 2018 from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: A tool for investigating complex activity in classrooms. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 361–368). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Conner, A. (2012). Warrants as indications of reasoning patterns in secondary mathematics classes. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12), Topic Study Group 14* (pp. 2819–2827). Seoul, Korea: Springer, Cham.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014a). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014b). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Dinçer, S. (2011). *Matematik lisans derslerindeki tartışmaların Toulmin modeline göre analizi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Douek, N., & Pichat, M. (2003). From oral to written texts in grade 1 and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2., pp. 341–348). University of Hawaii: Honolulu, Hawaii, USA

Duran, M., Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). Argümantasyon tabanlı olasılık öğretiminin ortaokul öğrencilerinin başarılarına ve kaygılarına etkililiğinin incelenmesi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 13*(1), 55-87.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*(6), 527-548.

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 324-350.

Hunter, R., & Anthony, G. (2011). *Learning to "friendly argue" in a community of mathematical inquiry (Teaching and learning research ıinitiative report).* Wellington: New Zealand Educational Research Council.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. In E. Cohors-Fresenborg, H. Maier, K. Reiss, G. Toerner & H. G. Weigand (Eds.), *Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics* (pp. 73–84). Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 40*(3), 427–441.

Knipping, C., & Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentation in classroom proving processes. In A. Aberdein & I. J. Dove (Eds.), *The argument of mathematics* (pp. 181– 208). Dordrecht, Springer.

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 75–101). Springer: Dordrecht.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2000). Studies of argumentation in primary mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 32*(5), 155-161.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education.* (pp. 51–74). Dordrecht: Springer.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to NCTM's principles and standards* (pp. 237-249). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

le Roux, A., Olivier, A., & Murray, H. (2004). Children struggling to make sense of fractions: An analysis of their argumentation. *South African Journal of Education, 24*(1), 88-94.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport, CN: Ablex.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 87-113.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.

Mercan, E. (2015). *Fonksiyonlar konusunun öğretiminde argümantasyon tabanlı öğrenme yaklaşımının etkisinin farklı değişkenler açısından İncelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Miller, M. (1987). Argumentation and cognition. In M. Hickmann (Ed.), *Social and functional approaches to language and thought* (pp. 225–249). London: Academic Press.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017a). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2017b). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: Cognitive unity or break? In J. Novotna´ (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 70–80). Marienbad: ERME.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 40*(3), 385-400.

Peirce, C. S. (1956). Sixth paper: Deduction, induction, and hypothesis. In M. R. Cohen (Ed.), *Chance, love, and logic: Philosophical essays* (pp. 131–153). New York, NY: G. Braziller.

Planas, N., & Morera, L. (2011). Revoicing in processes of collective mathematical argumentation among students. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1356–1365). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Rasmussen, C., & Stephan M. (2008). A methodology for documenting collective activity. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 195–215). New York, NY: Routledge.

Renshaw P. D., & Brown R. A. J. (1997). Learning partnerships: The role of teachers in a community of learners. In L. Logan & J. Sachs (Eds.), *Meeting the challenges of primary schools* (pp. 200-211). London: Routledge.

Schwarz, B. B., & Asterhan, C. S. C. (2010). Argumentation and reasoning. In K. Littleton, C. Wood & J. Kleine Staarman (Eds.), *International handbook of psychology in education* (pp. 137–176). Bradford: Emerald Group.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 459-490.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updated ed.). New York, NY: Cambridge University Press.

Urhan, S. ve Bülbül, A. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 351-373.

Wagner, P. A., Smith, R. C., Conner, A., Singletary, L. M., & Francisco, R. T. (2014). Using Toulmin's model to develop prospective secondary mathematics teachers' conceptions of collective argumentation. *Mathematics Teacher Educator, 3*(1), 8-26.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(3), 247-261.

Whitenack, J. W., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 441-457.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25th PME International Conference*, (Vol 1, pp. 9-24). Utrecht, Holland: IGPME.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423-440.

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Communications of Mathematical Education*, *18*(1), 1-18.