Buca Eğitim Fakültesi Dergisi,
Haziran 2018, Sayı 45, s. 55-67

Araştırma Makalesi

The Journal of Buca Faculty of Education,
June 2018, Sayı 45, p. 55-67

Research Article

Kare İçin İfade Edilen Pisagor Bağıntısının Diğer Düzgün Çokgenlere ve Daireye Uygulanması

Pythagoras Connection Expressed for Square Application of Other Plain Polygons and Appliances

Recep ASLANER [1], Aziz İLHAN[2]

[1] *Prof. Dr., İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilinleri Eğitimi Bölümü, Türkiye, recep.aslaner@inonu.edu.tr*
[2] *Sorumlu Yazar, Öğr. Gör., Munzur Üniversitesi, Çemişgezek Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Programcılığı Bölümü, Türkiye, ailhan@munzur.edu.tr*

Geliş tarihi:*13.08.2017* ***Kabul Tarihi****:27.03.2018*

ÖZ

Bu çalışmada ünlü matematikçi Pisagor' un ismi ile özdeşleşmiş olan Pisagor bağıntısının farklı yaklaşımlarla yapılan ispatlarına yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Ayrıca daha önce kare için ifade edilen bu bağıntının diğer düzgün çokgenler ve daire için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Çalışmada yapılan çizimler bir Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) olan Cabri II Plus geometri programı kullanılmıştır. Çalışmanın giriş bölümünde Pisagor, Pisagor bağıntısı ve bu bağıntının Pisagor'dan günümüze kadar yapılan bazı ispat yaklaşımları hakkında bilgiler verilmiştir. Bir düzgün çokgen olan kare için ifade edilen Pisagor bağıntısının eşkenar üçgen ve düzgün beşgen gibi diğer düzgün çokgenler için de doğru olduğu ispatlanmış, ayrıca kenar sayısı sonsuz olan çokgen olarak bakılan daire için de doğru olduğu gösterilmiştir. Tartışma ve sonuç bölümünde ise bu bağıntı için elde edilen yeni sonuçlar doğrultusunda ilgili araştırmacılara birtakım önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Pisagor bağıntısı, düzgün çokgen, daire, geometri öğretimi, dinamik geometri yazılımları.

ABSTRACT

In this study, the famous mathematician Pythagoras' name is synonymous with the proof of Pythagoras, of course the different approaches has been a new approach. In addition to square one before the other, expressed this correlation also applies to regular polygons and circles. A Dynamic Geometry Software (DGS) drawings made in the study is Cabri II Plus geometry program. Introduction section of this study provides information about the Pythagoras, Pythagorean correlation and this correlations' from Pythagoras approaches to present some proof. A regular polygon is square, of course the equilateral triangle and Pythagoras expressed for regular Pentagon like other regular polygons is proven true, for the number of edges of the polygon also cared for apartment as the eternal right. Discussion and conclusion section of this correlation is obtained for a number of new suppliers in accordance with the results of researchers made suggestions.

Keywords: Pythagoras correlation, polygon, circle, teaching geometry, dynamic geometry software.

GİRİŞ

Geometri çalışmalarının temelinde geometrik kavramların ve şekillerin çizilerek görselleştirilmesi ve bunlara dayalı olarak genellemelerin oluşturulması yer almaktadır (Köse, 2008). Duval (1998) geometrik düşünmeyi *görselleştirme* (visualisation), *oluşum* (construction) ve *muhakeme yapma* (reasoning) olmak üzere üç bilişsel süreçte ele almaktadır. *Görselleştirme süreci*, geometrik ifadenin görsel temsili ya da karmaşık geometrik bir durumun sezgisel ya da deneysel keşfidir. *Oluşum süreci*, geometrik araçların kullanımıyla geometrik yapıların oluşturulmasıdır. Bu süreç temsil edilen ve sunulan yapılarla ilgili gözlenen sonuçlar üzerine gerçekleştirilen eylemleri içerir. *Muhakeme süreci* ise, bilginin açıklanması, kanıtlanması ve içeriğinin genişletilmesi gibi eylemleri içeren çoğunlukla söylemsel (discoursive) süreçler olduğunu ifade etmektedir.

Geometri öğretiminin matematik öğretimi gibi birikimli olması, tarihinin araştırılması hatta öğrenenlere önemli görülen bilim insanları hakkında bilgi verilmesini gerektirmektedir. Nitekim Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) 2005 yılında yapmış olduğu değişikliklerle ilköğretim ve lise öğretim programlarında ünlü bilim adamları hakkında kısa bilgilere yer verilmiş ve bu bilim adamlarının teoremleri öğretilirken kişilerle ilgili önemli bilgilere ve ispatlara değinmenin önemine vurgu yapmıştır. MEB tarafından önemli görülen, ilköğretim ve ortaöğretim kitaplarına yerleştirilen önemli bilim insanlarından biri de Pisagor'dur (Baki ve Bütüner, 2013). İlköğretim sekizinci sınıf kitaplarında Pisagor teoremi konusu içerisinde, tarihsel içerik olarak sadece Pisagor'un hayatı ile ilgili kısa bir bilgiye ve Pisagor'un resmine yer verilmektedir. Pisagor teoreminin ispatının farklı kişiler tarafından farklı şekillerde yapıldığı, Pisagor teoremi ile ilgili çeşitli problemlerin farklı yollarla çözüldüğü, insan emeğinin bir ürünü olduğunu, farklı çözüm yollarının olabileceğini ortaya koyması açısından matematik tarihinin amaç olarak kullanımına hizmet ettiği söylenebilir (Baki ve Güven, 2009).

Sayıların babası olarak ifade edilen Pythagoras (Pisagor) M.Ö. 580-500 tarihleri arasında yaşamış ve ismi günümüze kadar ünüyle ulaşmış olan bir matematik bilim adamıdır. Matematikte çığır açacak birçok çalışması mevcuttur. En iyi bilinen teoremi ise adıyla özdeşleşmiş olan ve bir dik üçgenin kenarları arasındaki ilişkiyi veren, "Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir." önermesidir. Pisagor doğum yeri olan Sisam adasından güney İtalya'ya göç ederek burada kendi okulunu kurmuş ve eğitim vermiştir. Pisagor müzikle de uğraşmış telin sesini matematikle ilişkilendirmiştir. Pisagor telin boyunun kısalmasıyla sesinin inceldiğini, uzamasıyla sesinin orantılı bir şekilde kalınlaştığını ifade etmiştir (MEB, 2016).

1.1. Pisagor Bağıntısı ve Farklı İspat Yaklaşımları

Birçok insan için Pisagor bağıntısı ile tanışma geometri kavramının ilk öğrenildiği yıllarda başlar. Pisagor teoreminin ispatı asırlardır matematikçileri meşgul etmiş, yüzlerce farklı ispat yapılmıştır. Loomis'de (1968) "*The Pythagorean Proposition*" adlı eserinde Pisagor bağıntısının 370 farklı ispatının bulunduğunu söylemiş ve bu ispatların son bulmadığını daha yenilerinin eklenebileceğini belirtmiştir. Pisagor bağıntısı için ilk ispatın Pisagor tarafından yapıldığına dair net bir delil yoktur. MEB (2016) ortaokul matematik dersi öğretim kitabında da belirtildiği üzere tarihi kayıtlar incelendiğinde Pisagor teoreminin farklı kültürlerdeki ispat biçimleri şöyledir:

1. Eski Mısır (M. Ö 3000)- Düğümlenmiş İp İspatı
2. Babil (M. Ö 2000)- Pisagor Üçlüleri İspatı
3. Eski Çin (M.Ö 1100)-Hsuan Thu Diyagramı Yoluyla İspat
4. Eski Yunan (M. Ö 500'ler)- Kare ve Dik Üçgenlerin Alanları Yardımıyla İspat
5. İslam Dünyası (M.S 900)- Kareleri Kesme- Inb- Cora Yöntemiyle İspat
6. Hindistan (M.S 1200'ler)- Kare ve Dik Üçgenin Alanları- Bhaskara İspat Yöntemi
7. Leonardo Da Vinci (1500'ler) Pisagor İspatı

8. Amerikan Başkanı Garfield (M.S 1881)- Yamuk Kullanarak İspat (MEB, 2016).

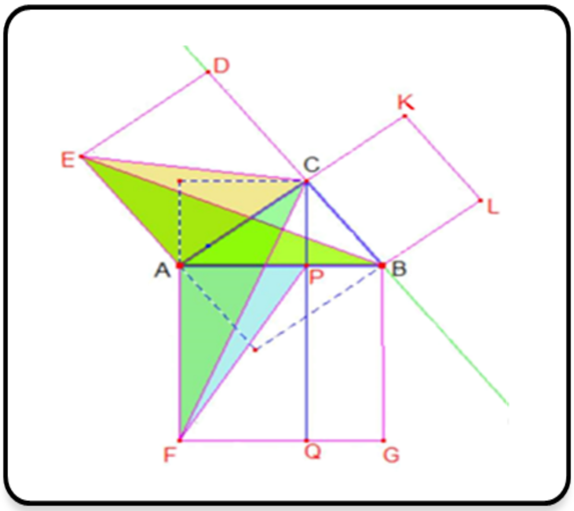
Bilinen en eski ispatıyla birlikte bu önerme Euclid ’in *“Elemanlar”* adlı serisinin birinci kitabında 46. önerme olarak yer almaktadır. Bu kitap hakkında yazdığı şerhte Proclus, daha o devirde Pisagor’un hayatına dair birçok efsane olduğunu, kanaatince Euclid’ in bu ispatı bulmakla hayranlık duyulmaya Pisagor’dan daha layık olduğunu belirtmiştir (Proclus, 1970). Günümüzde Pisagor bağıntısının yüzlerce farklı ispatı mevcuttur. Burada tarihi önemi ve doğallığı sebebiyle Euclid’in ispatına yer verilmiştir (Bkz. Şekil I).

1.2. Pisagor Bağıntısı için Euclid’ in İspatı

Aşağıdaki Şekil 1’de *ABC* dik üçgeninin *[AC]* kenarı üzerine çizilen *ACDE* karesi için taban ve yükseklikler eşit olduğundan;

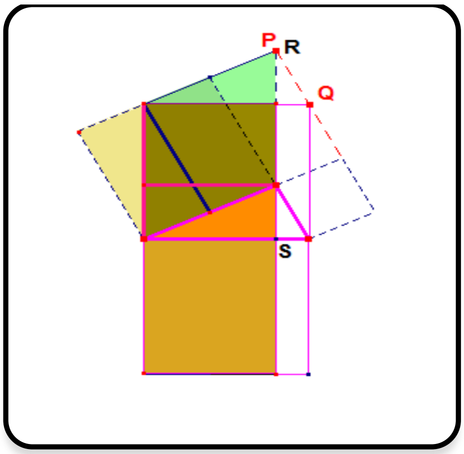
A(EAC) = A(EAB) dir. Kenar Açı Kenar (K.A.K) eşlik aksiyomuna göre; A(EAB) = A(ACF) = A(AFP) olup buradan, A(ACDE) = A(APQF*)* elde edilir.

Benzer düşünceyle *[BC]* kenarı üzerine çizilen *BCKL* karesi için; *A(BCKL) = A(BPQG) olur. Böylece; A(ACDE)+A(BCKL)=A(APQF)+A(BPQG)= A(ABGF)* elde edilir.

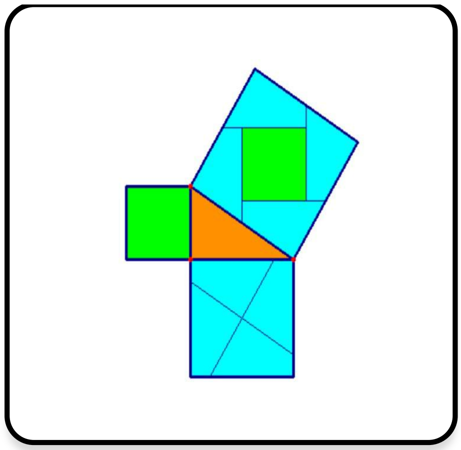


Şekil I: Euclid’in Pisagor İspatı

Bu ispat yaklaşımında alanları değiştirmeden şekillerin değiştirilebileceği bunun sonucu etkilemeyeceği görülmektedir. Cabri programında dik kenarlar üzerine çizilen kareleri alanları değiştirmeden paralelkenarlara, paralelkenarları da dikdörtgenlere dönüştürerek ispat bir animasyon haline getirilerek dinamik olarak gösterilmiştir. Bu uygulama Cabri II Plus programında *in my classroom* arşivinde bulunmaktadır (Bkz. Şekil II). Burada verilen *in my clasroom* arşivi Cabri II Plus programının içerisinde bulunan ve belirli örnekler üzerinde programın uygulamalarını kullanıcılara aktaran arşivdir.



Şekil II. Pisagor Bağıntısının Cabri İspatı



Şekil III. H.J. Elschenbroich 'un Pisagor İspatı Uygulaması

Pisagor bağıntısının yüzlerce ispatından birçoğu eş parçalara ayırma tekniğine dayanır. Bu ispatlama yaklaşımının bir örneği H.J. Elschenbroich tarafından hazırlanmış olup yine Cabri programının arşivinde mevcuttur (Elschenbroich, 2007). Bu parçalamanın adımları: dik kenarlar üzerine çizilen karelerden alanı büyük olan kare merkez noktasından, hipotenüs üzerine çizilen karenin kenarlarına çizilen paralel doğrularla dört parçaya ayrılmış, bu parçalar ve küçük kare, hipotenüs üzerine çizilen kareye taşınarak içi doldurulup ispat tamamlanmıştır (Bkz. Şekil III).

Ünlü matematikçi Pisagor'un dik üçgen üzerinde açıklamış olduğu bağıntının birçok ispatı yaklaşık üç bin yıl öncesinden günümüze bilim insanları için bir uğraş olmuştur. Bu uğraşlar doğrultusunda N doğal sayılar kümesi için Pisagor bağıntısı ile ilgili kenar ölçülerini veren aşağıdaki genellemeye ulaşılmıştır. *n* pozitif bir doğal sayı olmak üzere;

$a=2n+1,\ b=2n^2+2n$ ve $c=2n^2+2n+1$

eşitlikleri kullanılarak elde edilen tüm doğal sayıların $a^2+b^2=c^2$ eşitliğini sağladığı bilinmektedir. Ayrıca bu bağıntı reel sayılar için de geçerlidir (akt: Eaves, 1954).

Literatür taraması yapıldığında Pisagor bağıntısını tanıtan, ders uygulamalarında kullanan, bu bağıntı ile ilgili çeşitli uygulamalar yapan, değişik ispat yöntemleri geliştiren çalışmalar bulunmaktadır (Karakuş, 2009; Köse, 2008; Proclus, 1970; Struik, 2000). Bu çalışmalar incelendiğinde Pisagor bağıntısı ile ilgili uygulamaların her geçen gün arttığı görülmektedir. Ayrıca öğretim sürecinde ve bilim dünyasında görsellerin önemi her geçen gün artmaktadır. Nitekim eğitim açısından öğretim programındaki kazanımlar ve öğretim kitaplarındaki görseller ülkemizde 2013'te yapılan program değişikliği ile güncellenmiş, görsellere verilen önem artırılmıştır (MEB, 2013, s.7). Bununla beraber akıllı tahtanın sınıflara girmesi, bilgisayarların, tabletlerin ve cep telefonlarının hayatımızın bir parçası haline gelmesi de görsellerin öğretim sürecindeki önemini artırmaktadır (Birkhoff ve Beatley, 2000; Pritchard, 2003). Bu noktadan hareketle bir düzgün dörtgen olan kare için ifade edilen Pisagor bağıntısının farklı düzgün çokgenler (eşkenar üçgen, düzgün beşgen ve altıgen...) ve daire alanları kullanılarak görsel ispatlarının yapılması önemli görülmüştür.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, yukarıda verilen iki ispat yaklaşımından faydalanarak Cabri II Plus programı yardımıyla Pisagor bağıntısını daha önce dinamik geometri yazılımları kullanılmadan yapılan parçalanmalar (Birkhoff ve Beatley, 2000; Frederickson, 2002) yöntemiyle yapılan ispatlarından farklı bir şekilde yeni bir parçalanma tekniği geliştirerek ispatlamaktır. Ayrıca oluşturulan yeni ispat yönteminin bir düzgün dörtgen olan kare için eşkenar üçgen ve düzgün beşgen gibi düzgün çokgenler için de doğru olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Bunu yapmaktaki amaç Duval (1998)' in de belirttiği gibi geometrik düşünmeyi bilişsel süreçler yardımıyla ele almak ve bir dinamik geometri yazılımı olan Cabri II Plus programından faydalanarak teknolojinin matematik öğretimine sunduğu fırsatları ve matematikçilerin matematiksel deneyimlerini nasıl zenginleştirdiğini göstermektir.

YÖNTEM

Bu çalışmada geometri öğretiminin temel ilkelerinden olan ölçünün korunumu (alanın korunumu) ilkesi, yani "düzlemde verilen bir geometrik şekil belirli özelliklere göre daha küçük parçalara ayrılıp bu parçaların birleştirilmesi ile aynı alana sahip farklı geometrik şekiller oluşturulabilir" ilkesine dayanarak doğrudan ispat yöntemi kullanılmıştır. Bu bağıntı ile ilgili uygulamalardaki çizimler Cabri II Plus geometri programı ile gerçekleştirilmiştir.

BULGULAR

Bir dik üçgenin kenar uzunlukları olan ve $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini sağlayan *a, b* ve *c* tam sayıları için *c* sayısı *a* ve *b* sayılarından kesinlikle büyüktür. *a* ve *b* sayıları için iki durum vardır, ya bu iki sayı eşittir ya da biri diğerinden büyüktür.

Kabul edelim ki $c > b \geq a$ dır.

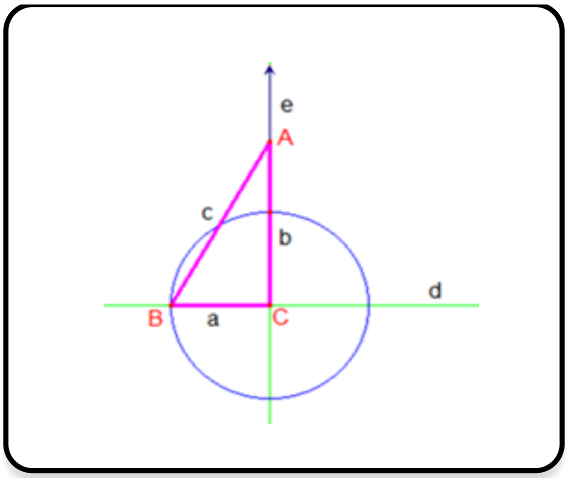
Cabri II Plus programında;

- Bir noktada dik kesişen iki doğru çizilsin.

Kesişim noktasına *C,* doğruları *d* ve *e* ile gösterilsin.

- *C* merkezli *a* yarıçaplı çember şekildeki gibi verilsin.
- Bu çemberin *d* doğrusuyla kesişim noktası *B* olmak üzere
- Çemberin *e* doğrusuyla kesişim noktasından başlayan, *e* doğrultusunda ve bu doğrunun üzerinde olan bir vektör çizilerek üzerindeki bir *A* noktası seçilirse

Üçgen seçeneğini kullanılarak çizilen *ABC* üçgeni bir dik üçgen olup $c > b \geq a$ şartını sağlamaktadır.



Şekil IV. Cabri de Dik Üçgen Çizimi

Cabri II Plus programında dik üçgenin inşası yapıldıktan sonra dik üçgenin kenarları üzerine çizilecek diğer düzgün çokgenler için Pisagor Bağıntısı ifade ve ispat edilmeye çalışılmıştır. Bu ispatlar sırasıyla aşağıda verilmiştir.

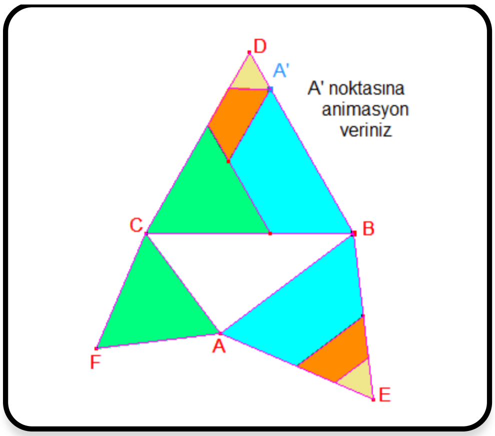
3.1.Eşkenar üçgenler için Pisagor Bağıntısı

En basit düzgün çokgen olan eşkenar üçgen için Pisagor bağıntısının sözel ifadesi: *"Bir dik üçgenin dik kenarları üzerine çizilen eşkenar üçgenlerin alanlarının toplamı hipotenüs üzerine çizilen eşkenar üçgenin alanına eşittir."* şeklindedir.

Bu önermeye ait geometrik şekil ve önermenin bu şekle göre matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

Bir ABC dik üçgeni ve bu üçgenin kenarları üzerine çizilen FAC, AEB ve BDC eşkenar üçgenleri için

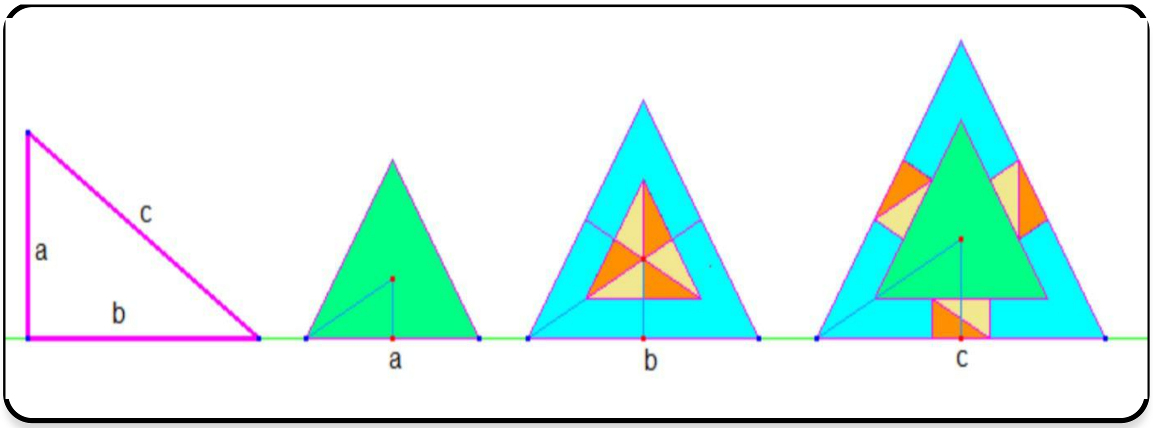
A(BDC)=A(AFC)+A(AEB) dir.



Şekil V: Pisagor'un Üçgen Alanlarla İspatı

Şekil V de görüldüğü üzere *AEB* üçgeni iki eşkenar yamuk ve bir eşkenar üçgene ayrılarak bu parçaların birleşimi *DCB* üçgenini kapladığı *A'* noktasına animasyon verilerek görülmektedir. Bu işlem yapılırken öncelikle *[AC]* kenarı üzerinde inşa edilmiş olan eşkenar üçgen *CBD* üçgeninin üzerine taşınmış, daha sonra *AEB* üçgeninin *[AE]* ve *[EB]* kenarları sırasıyla *[CB]-[CA]* uzunluğu kadar işaretlenerek turkuaz renkli yamuk oluşturulmuştur. Ayrıca *[DB]-[AB]* uzunluğu kullanılarak *ABE* üçgeninin *E* köşesine sarı renkli eşkenar üçgen inşa edilmiştir. Geriye kalan turuncu renkli yamuk alanı ise *DCB* üçgeninin içine *[DC]* kenarına paralel şekilde yerleştirilerek doğrudan ispat yöntemiyle ispat tamamlanmıştır.

Aynı ispatı farklı bir parçalanma tanımlayarak da yapabiliriz. Çizimlerin daha kolay yapılmasını sağlamak için çizeceğimiz düzgün çokgenleri üçgenin kenarları üzerine çizmek yerine bir doğrultu üzerine çizelim. *Alanın korunumu ilkesine* göre şekillerin büyüklüğü aynı olmak kaydıyla bulunduğu yerin önemi yoktur.

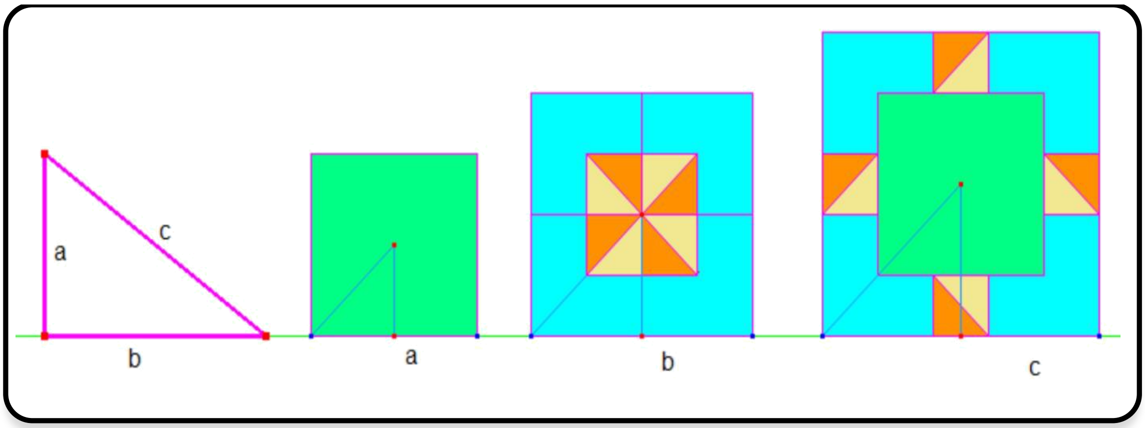


Şekil VI. Eşkenar Üçgen İçin Pisagor Bağıntısı

Şekil VI da görüldüğü gibi dik üçgenin *a* kenarı (dik kenarların kısa olanı) üzerine inşa edilmiş olan eşkenar üçgen öncelikle *c* kenarı (hipotenüs) üzerine inşa edilmiş eşkenar üçgenin üzerine ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde yerleştirilir. Daha sonra üçgenin *b* kenarı (dik kenarların uzun olanı) üzerine inşa edilmiş olan ikinci eşkenar üçgenin içine bir kenarı $\frac{2a}{3}$ birim olan eşkenar üçgen ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde çizilir. Kenar uzunluğu $\frac{2a}{3}$ birim olan üçgen kenarortaylar (kenar orta dikmeler veya açıortaylar) yardımıyla altı eş parçaya bölünür. Ayrıca dışta kalan kısım da ağırlık merkezinin uzantısı yardımıyla üç eş parçaya bölünür. Elde edilen parçalar bir kenarı *c* birim olan üçgenin içine yerleştirilerek ispat tamamlanır.

3.2. Kare için Pisagor Bağıntısı

Pisagor Bağıntısı esasta bir düzgün dörtgen olan kare için ifade edilmiştir. Sözel ifadesi *"Bir dik üçgenin dik kenarları üzerine çizilen karelerin alanlarının toplamı hipotenüs üzerine çizilen karenin alanına eşittir."* şeklindedir. Bu ifadeye ait geometrik şekil ve bu yeni parçalanmaya göre ispatı Şekil VII de verilmiştir.

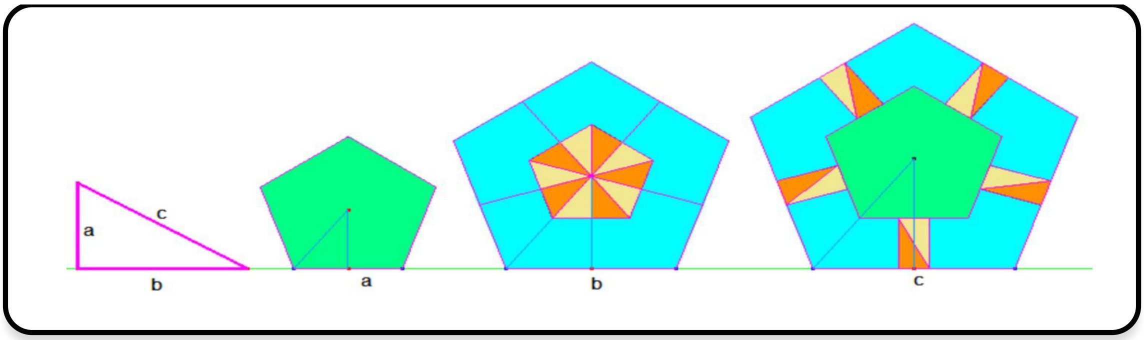


Şekil VII. Kare İçin Pisagor Bağıntısı

Şekil VII de görüldüğü gibi dik üçgenin *a* kenarı (dik kenarların kısa olanı) üzerine inşa edilmiş olan kare öncelikle *c* kenarı (hipotenüs) üzerine inşa edilmiş karenin üzerine ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde yerleştirilir. Daha sonra üçgenin *b* kenarı (dik kenarların uzun olanı) üzerine inşa edilmiş olan ikinci karenin içine bir kenarı $\frac{2a}{3}$ birim olan kare ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde çizilir. Kenar uzunluğu $\frac{2a}{3}$ birim olan kare kenarortaylar (veya kenar orta dikmeler) ve açıortaylar yardımıyla sekiz eş parçaya bölünür. Ayrıca dışta kalan kısım da ağırlık merkezinin uzantısı yardımıyla dört eş parçaya bölünür. Elde edilen parçalar bir kenarı *c* birim olan karenin içine yerleştirilerek ispat tamamlanır.

3.3. Düzgün Beşgenler için Pisagor Bağıntısı

Düzgün beşgen için Pisagor bağıntısı *"Bir dik üçgende dik kenarlar üzerine çizilen düzgün beşgenlerin alanlarının toplamı hipotenüs üzerine çizilen düzgün beşgenin alanına eşittir."* Şeklinde olup bu ifadeye ait geometrik şekil ve ispatı Şekil VIII de verilmiştir.

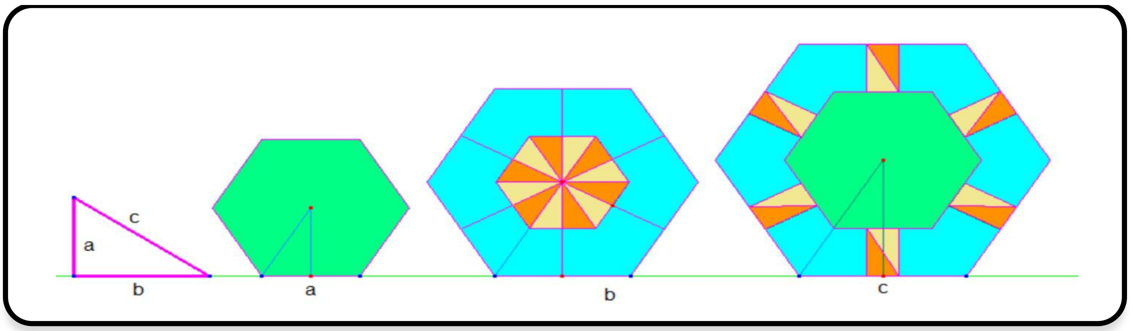


Şekil VIII. Düzgün Beşgenler İçin Pisagor Bağıntısı

Şekil VIII de görüldüğü gibi dik üçgenin *a* kenarı (dik kenarların kısa olanı) üzerine inşa edilmiş olan düzgün beşgen öncelikle *c* kenarı (hipotenüs) üzerine inşa edilmiş düzgün beşgenin üzerine ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde yerleştirilir. Daha sonra üçgenin *b* kenarı (dik kenarların uzun olanı) üzerine inşa edilmiş olan ikinci düzgün beşgenin içine bir kenarı $\frac{2a}{3}$ birim olan düzgün beşgen ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde çizilir. Kenar uzunluğu $\frac{2a}{3}$ birim olan düzgün beşgen kenarortaylar (veya kenar orta dikmeler) ve açıortaylar yardımıyla on eş parçaya bölünür. Ayrıca dışta kalan kısım da ağırlık merkezinin uzantısı yardımıyla beş eş parçaya bölünür. Elde edilen parçalar bir kenarı *c* birim olan düzgün beşgenin içine yerleştirilerek ispat tamamlanır.

3.4. Düzgün Altıgenler için Pisagor Bağıntısı

Pisagor bağıntısının düzgün altıgenler için sözel ifadesi *"Bir dik üçgende dik kenarlar üzerine çizilen düzgün altıgenlerin alanlarının toplamı hipotenüs üzerine çizilen düzgün altıgenin alanına eşittir"* şeklindedir. Bu ifadeye ait geometrik şekil ve ispatı Şekil IX da görülmektedir.



Şekil IX. Düzgün Altıgenler İçin Pisagor Bağıntısı

Şekil IX da görüldüğü gibi dik üçgenin *a* kenarı (dik kenarların kısa olanı) üzerine inşa edilmiş olan düzgün altıgen öncelikle *c* kenarı (hipotenüs) üzerine inşa edilmiş düzgün altıgenin üzerine ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde yerleştirilir. Daha sonra üçgenin *b* kenarı (dik kenarların uzun olanı) üzerine inşa edilmiş olan ikinci düzgün altıgenin içine bir kenarı $\frac{2a}{3}$ birim olan düzgün altıgen ağırlık merkezleri çakışacak ve kenarları paralel olacak şekilde çizilir. Kenar uzunluğu $\frac{2a}{3}$ birim olan düzgün altıgen kenarortaylar (veya kenar orta dikmeler) ve açıortaylar yardımıyla on iki eş parçaya bölünür. Ayrıca dışta kalan kısım da ağırlık merkezinin uzantısı yardımıyla altı eş parçaya bölünür. Elde edilen parçalar bir kenarı *c* birim olan düzgün altıgenin içine yerleştirilerek ispat tamamlanır.

Yukarıda yapılan parçalanmalarda çokgenin kenar sayısı ile parça sayısına bakıldığında aralarındaki bağıntı, *n* çokgendeki kenar sayısını *m* de hipotenüs üzerine çizilmiş olan çokgendeki parça sayısını göstermek üzere,

$n=3$ için $m=2.3+3+1=10$

$n=4$ için $m=2.4+4+1=13$

$n=5$ için $m=2.5+5+1=16$

$n=6$ için $m=2.6+6+1=19$ olup

…

$n=k$ için $m=2.k+k+1$ elde edilir.

Çokgenler için kenar ve yükseklikler kullanılarak elde edilen alan hesaplama bağıntıları kenar ve köşesi olmayan geometrik şekiller için de kullanılır. Böylece kenar sayısı sonsuz olan düzgün çokgen olarak bakılan çember için de Pisagor bağıntısı ifade edilebilir.

3.5. Daire için Pisagor Bağıntısı

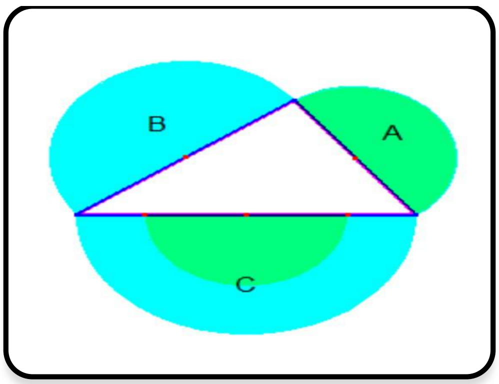
Çember için Pisagor bağıntının ifadesi "*Bir dik üçgende dik kenarları çap alarak çizilen dairelerin (şeklin karmaşık görünmemesi için yarım daireler alınabilir) alanlarının toplamı hipotenüsü çap alarak çizilen dairenin alanına eşittir.*" şeklindedir.

Çapı *a br* olan bir çemberin yarıçapı; $r = \frac{a}{2}$ olup alanı;

$A = \frac{\pi a^2}{8}$dir. Benzer düşünce ile ;

$B = \frac{\pi b^2}{8}$ olup bu iki alanın toplamı;

$A + B = \frac{\pi(a^2+b^2)}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = C$ olduğu görülür.



Şekil X. Çember İçin Pisagor Bağıntısı

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Görsellerin eğitim alanında her geçen gün daha fazla yer bulması, modelleme kavramının eğitim literatürüne girmesi ve öğretim sürecinin dinamik programlarla zenginleştirilmesi neticesinde öğreticiler öğretim sürecinde görselleri artan bir ivmeyle kullanmaktadır. Geometri çalışmalarının temelinde geometrik kavramların çizilerek görselleştirilmesi ve bunlara dayalı genellemelerin oluşturulması yatmaktadır (Köse, 2008). Öğreticilere ve öğrenenlere geometri öğretimi alanı ile ilgili bilim insanları hakkında bilgi verilmesi, onların önemli özelliklerinin tanıtılması eğitim sürecini zenginleştirecek, öğrenme süreçlerinde hem öğreticilerin hem de öğrenenlerin motivasyonlarını artıracaktır. Nitekim MEB 2013 yılında yayınladığı öğretim programında bilim adamları hakkında bilgi vermiş, bu bilim adamlarının söylemlerini öğrencilere öğretirken önemli ispatlara değinmenin önemi vurgulanmıştır. MEB tarafından önemli görülen, ilköğretim ve ortaöğretim kitaplarına yerleştirilen önemli bilim insanlarından biri de Pisagor'dur (Baki ve Bütüner, 2013). Ancak İlköğretim sekizinci sınıf kitaplarında Pisagor teoremi konusu içerisinde, tarihsel içerik olarak sadece Pisagor'un hayatı ile ilgili kısa bir bilgiye ve Pisagor'un resmine yer verilmektedir (Canpekel, 2016). Bu nedenle Pisagor teoreminin farklı ispat yollarının ortaya konmasının öğrencilerin ilgisini çekeceği ve yeniden düşünme fırsatı vereceği 2013 yılındaki MEB matematik öğretim programında da ifade edilmiştir. Ayrıca 2013 MEB öğretim programında öğretim sürecinde teknolojiden faydalanmadın önemi üzerinde durulmuş dinamik cebir ve geometri yazılımlarının öğretim sürecinde kullanılması gerekektiği vurgulanmıştır (MEB, 2013).

Bu çalışmada Pisagor'un kare için ifade edilen alan bağıntısı tanıtılarak diğer düzgün çokgenler için de geçerli olduğu ispatlanmıştır. Bu ispatlar yapılırken doğrudan ispat yöntemi kullanılmış, uygulamalardaki çizimler Cabri II Plus geometri programı kullanılarak elde edilmiştir. Pisagor bağıntısı üzerinde yeni bir parçalanma tekniği geliştirilerek düzgün çokgenler için yapılmış olan bu uygulamalar (üçgen, kare, beşgen ve altıgen uygulamaları) neticesinde kenarı ve köşesi olmayan çember için de aynı bağıntının geçerli olduğu gösterilerek bir genellemeye ulaşılmıştır. Bu genelleme ile çokgenlerin kenar sayıları ile parçalanmada oluşan çokgen sayısı arasında yeni bir bağıntı elde edilmiştir. Bu bağıntıyla beraber yapılan parçalama işlemlerinin üç kenarlı düzgün çokgenlerden başlayarak n kenarlı düzgün çokgenlere kadar uygulanılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca bu çalışmada geometri öğretimin temel ilkelerinden biri olan ölçünün korunumu (alanın korunumu) ilkesi, çalışmadaki ispatların çıkış noktası olmuştur. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda ileride bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılara şu önerilerde bulunulabilir;

• Farklı cebirsel ifadeler ihtiva eden bağıntılar için de benzer ispatlar elde edilebilir. Örneğin Euclid'in dik üçgenler için verdiği kenar ve yükseklik bağıntıları gibi.

• Farklı cebirsel ifadelerin düzgün çokgen alanları kullanılarak ispatlanması durumunda yeni genellemeler elde edilebilir.

• İkinci dereceden kuvvet içeren bağıntıların alan ölçüleri kullanılarak doğrulanması noktasından yola çıkarak üçüncü dereceden kuvvet içeren bağıntıların hacim ölçüleri kullanılarak üç boyutlu cisimlerle çözümleri araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Baki, A. ve Bütüner, S. Ö. (2013). The ways of using the history of mathematics in 6th, 7th and 8th grade mathematics text books. *İlköğretim Online, 12*(3), 849-872.

Baki, A. ve Güven, B. (2009). Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers With Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment. *Teaching Mathematics and Its Applications, 28*(2), 1-9.

Birkhoff, J. D., & Beatley, R. (2000). *Basic geometry.* Chelsea: AMS Publication, Canpekel, M. (2016). *8. sınıf matematik ders kitabı.* Ankara: Dikey yayıncılık.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (Eds). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI study*. (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer.

Eaves, J. C. (1954). Pythagoras, his theorem and some gadgets. *Mathematical Association of America, 27*(3), 161-167.

Elschenbroich, H. J. (2007). *Visual-dynamic puzzle-proofing, arguing, proving and standards in geometry,* Berlin: Hildesheim.

Frederickson, G. N. (2002). *Hinged dissections: Swinging & twisting.* Britain: Cambridge University Press.

Karakuş, F. (2009). Matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılması: Karekök hesaplamada Babil metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitim Dergisi*, *3*(1), 195-206.

Köse, N. Y. (2008). *İlköğretim 5.sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı Cabri geometriyle simetriyi anlamlandırmalarının belirlenmesi: Bir eylem araştırması.* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Loomis, E. S. (1968). *The pythagorean proposition: Its demonstrations analyzed and classified and bibliography of sources for data of the four kinds of proofs.* Resto*:* National Council of Teachers of Mathematics.

Milli Eğitim Bakanlığı (2005). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı (2013). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı (2016). *İlköğretim matematik dersi 1-8. sınıflar öğretim kitabı.* Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Pritchard, C. (2003). *The changing shape of geomtetry*. Britain: Cambridge University Press.

Proclus, K. (1970). *A commentary on the first book of euclid's elements*. New Jersey: Princeton University.

Struik, D. J. (2000). Kısa *matematik tarihi.* İstanbul: Mavi Ada Yayınları.

EXTENDED ABSTRACT

Purpose and Significance

Like the geometry teaching of mathematics education research in the history of the cumulative, or even interested in learning important information about scientists. Indeed, the Mınıstry of Educatıon in 2005, with the changes made in elementary and high school education brief information about famous scientists and scientists have made theorems with the people teach important information and to prove the importance of the mention. MEB by important, primary and secondary books is also one of the important placed Pythagorean (Baki and Bütüner, 2013). Primary education eighth grade in the subject of Pythagorean theorem in books, historical content, just as Pythagoras Pythagoras a short information about his life and image. The proof of Pythagoras' theorem by different people in different ways, various problems related to the Pythagorean theorem has been solved in different ways, is a product of human labor, might be different solutions put forward in the history of mathematics in terms of purpose, it can be said that the use of service (Baki and Güven, 2009). The aim of this study was to prove that taking advantage of the two given above a new correlation approach by developing the technique of fragmentation Pythagoras prove.

There is also a neat rectangular square with the equilateral triangle and the given expression for the regular Pentagon is true for regular polygons as tried to show 8. This objective is a dynamic geometry software, taking advantage of the technology (DGS) to the math education program Cabri opportunities and how to enrich mathematical experiences of a mathematician is to show that. Literature survey course that introduces the Pythagorean correlation when applications related to this correlation, using various applications, develops different proof methods for women (Karakuş, 2009; Köse, 2008; Proclus, 1970; Struik, 2000). These studies examined the applications related to the Pythagorean correlation with each passing day, tightened. Also in the process of teaching, and the importance of the Visual world of science is increasing every day. Indeed, in terms of education gains in education and instructional books visuals made in 2013 our country programmatic modification has been increased importance given to the updated with Visual (MEB, 2013). However, the smart Board to enter the classrooms, computers, tablets and mobile phones has become part of our lives increases the importance of the Visual. From this point on a smooth transaction rectangular to square with, of course the Pythagoras expressed different regular polygons (equilateral triangles, regular Pentagon and hexagon...) and using the Visual proof of important areas of the apartment.

Method

In this study, the measure of the basic principles of geometry teaching conservation (conservation area) policy, so "plane according to the specific properties of a given geometric shape to split up into smaller pieces that have the same area with pieces of different geometric shapes can be created" based on the principle of direct proof method is used. This is related to the applications drawings correlation Cabri II Plus geometry was carried out with the program. We are grateful to find more places every day in the field of education, and the education of the concept of literature teaching modeling process as a result of the dynamic programs of prospecting tutorials in the process of teaching uses incremental images with an acceleration. On the basis of the work of geometric concepts of geometry and shapes has always been based on lies the creation of generalizations and visualization (Köse, 2008).

Results

As a result of geometry teaching teaching mathematics to investigate the history of important cumulative. Interested in learning about geometry teaching of space-related Öğreticilere and scientists should be given information about introducing education process of their important features that will enrich the learning processes and enhance their motivation and learners of the tutorial. Indeed, the MEB has made changes in 2013, famous scientists, scientists gave information about the rhetoric and focus on important information about teaching people to prove the importance of the mention. MEB by important, primary and secondary books is also one of the important placed Pythagorean (Baki and Bellis, 2013). But the Primary eighth-grade books as historical content that the Pythagorean theorem Pythagoras, in just a short information about the life and includes a picture of Pythagoras (Canpekel, 2016).

Discussion and Conclusion

In this study, Pythagoras being introduced other field correlation, expressed for square regular polygons has proven to be true for. These proofs are used directly when performing a proof method, applications, illustrations have been obtained using the geometry program Cabri II Plus. Developing a new fragmentation on the Pythagorean correlation technique that applications made for regular polygons (triangle, square, pentagonal and hexagonal) as a result of edge and corner to the circle of non-geometric shape by showing the same correlation is valid has been reached a generalisation. This generalisation of polygons with edge numbers with parçalanmada has been getting a new correlation between the number of polygons that occurs. This correlation with the shredding process are made starting from the n-sided triangular smooth polygon to polygon uygulanılabileceği properly. In addition, this study is one of the basic principles of teaching geometry measurement to conservation (conservation area) policy, so "plane according to the specific properties of a given geometric shape to split up into smaller pieces that have the same area with pieces of different geometric shapes can be created" policy has been the starting point of the proof.