

Elastik Sınır Koşullarında Fonksiyonel Derecelendirilmiş Bir Çubuğun Burulma Titreşimi Analizi

Mustafa Özgür YAYLI*¹

¹Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 16059, Bursa

(Alınış / Received: 21.12.2017, Kabul / Accepted: 03.04.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 24.05.2018)

Anahtar Kelimeler

Fourier sinüs serisi,
Burulma titreşimi,
Fonksiyonel derecelendirilmiş
kiriş

Özet: Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burulma titreşim problemi üzerine analitik bir çözüm yöntemi sunulmaktadır. Açısız dönme fonksiyonu olarak Fourier sinüs serisi tercih edilmiştir. Fourier katsayısı, açısız dönme fonksiyonunun ve türevlerinin problemi yöneten denklemde yerlerine yazılmasıyla elde edilmiştir. 2×2 boyutlarında bir katsayılar matrisi, Stokes dönüşümünü ilgili sınır koşullarına uygulayarak türetilmiştir. Burulma frekansları, bu katsayılar matrisi kullanılarak hesaplanabilir. Önerilen yöntemin sonuçları ile literatürdeki önceki çalışmalar arasındaki karşılaştırma çalışmaları yapılarak yöntemin doğruluğu test edilmiştir. Fourier sinüs serisinde yeterli terim kullanıldığında iyi bir uyum yakalanmaktadır. Son bölümde farklı parametrelerin, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burulma titreşimleri üzerindeki etkilerini incelemek amacıyla ayrıntılı bir sayısal araştırma yapılmıştır.

Torsional Vibration Analysis of a Functionally Graded Bar with Elastic Boundary Conditions

Keywords

Fourier sine series,
Torsional vibration,
Functionally graded
beam

Abstract: This paper presents an analytical solution method on the torsional vibration problem of functionally graded beams. The angular rotation function is represented by a Fourier sine series. The Fourier coefficient is obtained by the substitution of the angular rotation function and its derivatives into the governing equation. 2×2 coefficient matrix is derived with the aid of applying Stokes' transformation to corresponding boundary conditions. The torsional frequencies can be calculated by using this coefficient matrix. Comparison studies between the results of the proposed method and previous works in the literature are performed. Good agreement is achieved when the enough terms are included in the Fourier sine series expansion. A detailed numerical investigation has been carried out to examine the effects of the different parameters on the torsional vibration characteristics of the beams.

1. Giriş

Dairesel kesitli millerin burulması ve burulmadan kaynaklanan titreşimi makine ve inşaat elemanlarının projelendirilmesinde büyük önem taşımaktadır. Gerek güç iletim hatlarında, gerekse makine parçalarının dizaynında ve makinelerin gerçek işlevinin uygulanma imkanı olan bölümlerinde; imkanlar dahilinde mümkün olduğu kadar dönme hareketi yapabilen eleman ve parçalar kullanılmaya çalışılır. Söz konusu parçaların rahatça dönmelerine izin verecek şekilde mesnetlendirilmeleri özellikle istenen proje verilerinin sağlatılmasında büyük önem taşımaktadır. Ancak literatürde bulunan akademik çalışmaların çoğunda çözümü yapılan millerin ve kirişlerin sınır koşulları ya ankastre olarak alınmış veya serbest uç olarak modellenmiştir.

Son yıllarda dairesel kesitli çubuk ve millerin burulma problemi nano teknoloji alanında da büyük önem

taşımaktadır. Nanobilim ve nanoteknoloji konusunda ülkemizde ve dünyada son yıllarda yoğun olarak bilimsel araştırmalar yapılmaktadır. Geçtiğimiz yıllarda çok sayıda bu konuda bilimsel çalışma yayınlandığı için, bu bilimsel çalışmalardan bazılarında giriş bölümünde yer verilmiştir. Çıracı [1] metrenin bir milyarda biri ile ilgili literatüre katkı sunmuştur. Karbon nanoyapıların fiziksel ve kimyasal özelliklerini ve teknolojiye uygulamalarını O'Connell [2] araştırmıştır. Sevi [3] nano boyutta olan karbon nanotüplerin dayanıklılık simülasyonlarını incelemiştir. Nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesini Tepe [4] gerçekleştirmiştir. Pradeep [5] nano boyutun temel kavramlarını incelemiştir. King [6] nanoteknoloji alanında orataya çıkan arge faaliyetlerine katkı sunmuştur. Karkare [7], nanobilimin fiziksel esasları ve uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır. Menciloğlu ve Kırca [8] uluslararası rekabet stratejilerinden, nanoteknoloji ve Türkiye'yi araştırmışlardır. Aksencer [9] yerel olmayan

* ozguryayli@uludag.edu.tr

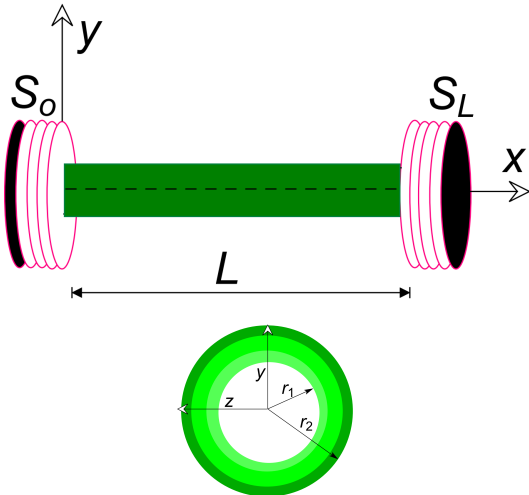
elastisite teorisi yardımıyla nano plakların statik ve dinamik analizini teorik olarak incelemiştir. Akgöz [10] yüksek mertebeden elastisite teorilerinden değiştirilmiş gerilme çifti ve değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorileri kullanılarak bir mikro kirişin eğilme ve burkulma analizlerini gerçekleştirmiştir. Ramsden [11] nanoteknolojinin esasları ile ilgili araştırmalar yapmıştır. Seyman [12] çift duvarlı karbon nanotüplerin mekanik özelliklerinin incelemesini yapmıştır. Kutucu [13] nanoteknoloji ve çift duvarlı karbon nanotüplerin mekanik davranışını incelemiştir. Literatürde konuyla ilgili benzer çalışmalar mevcuttur [14, 15].

Bu çalışmada dairesel kesitli fonksiyonel kirişlerin burulma titreşimi elastik sınır koşullarında incelenmiştir. Fonksiyonel değişen malzemenin değişim doğrultusu, yarıçap yönündedir. Bu çalışmada şu şekilde bir modelleme uygulanmıştır. Bir adet fonksiyonel değişen kiriş uçlarında burulma engelleyici elastik yaylar ile mesnetlenmiştir. Açıl dönme fonksiyonu olarak Fourier sinüs serisi seçilmiştir. Sınır koşullarında esneklik sağlanması bakımından Navier Stoke dönüşümleri her bir uç için ayrı ayrı uygulanmıştır. Yapılan matematiksel basitleştirmelerden sonra problem bir özdeğer problemine dönüştürülmüştür. Elde edilen matrisin özdeğerleri burulmada serbest titreşim frekanslarını vermektedir. Rijit sınır koşulları için çözümler elde edilerek literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmış ve çözümlerin çok uyumlu olduğu gözlenmiştir.

2. Teorik Alt Yapı

2.1. Burulma momenti

Şekil 1 de verilen dairesel kesitli çubuk için yer değiştirme uzayı aşağıda verilmiştir.



Şekil 1. Fonksiyonel değişken çubuğun geometrik özellikleri.

$$u(x,t) = -y\varphi(x,t), \quad (1)$$

$$v(x,t) = z\varphi(x,t), \quad (2)$$

$$w(x,t) = 0, \quad (3)$$

burada; u , v ve w fonksiyonları x , y , ve z doğrultularındaki yer değiştirmeleri göstermektedir. $\varphi(x,t)$ fonksiyonu ise burulma merkezine göre açıl dönme ifade etmektedir. İncelenen problem için şekil değiştirme tansörünün bileşenleri aşağıda sıralanmıştır:

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = -\frac{y}{2} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} = \frac{z}{2} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}, \quad (5)$$

Hamilton prensibi kullanılarak; aşağıdaki varyasyonel ifade yazılabilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt = 0 \quad (6)$$

burada δU parametresi şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonunu, benzer şekilde δK ise kinetik enerjinin birinci varyasyonunu temsil etmektedir. t_1 başlangıç zamanını, t_2 ise hareketin bitiş zamanını göstermektedir. İki farklı malzemenin yarıçap doğrultusunda fonksiyonel olarak dağıldığı çubuğun kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(r) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho J \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (7)$$

burada; r merkeze olan uzaklığı temsil eden değişkendir. (7) denkleminde görüleceği gibi kutupsal kütle aşağıdaki gibi değişken formda gösterilirse:

$$m_r = \int_A \rho_r(z,y)(z^2 + y^2) dA = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho_r(r) r^3 dr \quad (8)$$

bulunur. Buradaki r değişkeni aşağıdaki formdadır:

$$r = \sqrt{z^2 + y^2} \quad (9)$$

benzer şekilde şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu δU alınırsa;

$$\delta U = \int_V (2\sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx} + 2\sigma_{yx} \delta \varepsilon_{yx}) dV \quad (10)$$

bulunur. Burada V çubuğun hacmini temsil etmektedir. Bazı matematiksel işlem ve sadeleştirmeler yapıldıktan sonra x eksenine etrafındaki moment aşağıdaki gibi gerilmeye bağlı olarak yazılır.

$$T_x = \int_A (z\sigma_{yx} - y\sigma_{zx}) \delta \varepsilon_{yx} dA \quad (11)$$

2.2. Hareket denklemi

(11) denklemi kullanılarak, burulma momenti, dönme fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$T_x = G(x;r); D_{rx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (12)$$

Homojen malzemeden yapılmış çubukların aksine; fonksiyonel değişken malzemeli çubuklarda malzeme modülü (D_{rx}); integral alınarak bulunmalıdır. Çünkü kayma modülü yarıçap doğrultusunda değişkendir ve merkezden uzaklaştıkça farklı değerler almaktadır. Denge denklemleri yardımıyla, aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$T_x = D_{rx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (13)$$

Denge denklemi ve (13) denklemi birlikte yazılırsa; problemi yöneten parçalı diferansiyel denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_{rx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - m_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

burada D_{rx} parametresi efektif kayma modülünü temsil etmektedir ve aşağıdaki formülasyonla gösterilebilir:

$$D_{rx} = \int_A G_r(z, y) (z^2 + y^2) dA = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} G_r(r) r^3 dr \quad (15)$$

(15) denklemindeki G_r terimi kayma modülünü göstermektedir. (14) denklemi dairesel kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş bir çubuğun burulma titreşimini yöneten hareket denklemdir.

3. Genel Elastik Sınır Koşullarında Burulma Titreşimi

Bu bölümde fonksiyonel derecelendirilmiş bir burulma çubuğunun titreşimi incelenecektir. Burada yapılmak istenen genel elastik sınır koşulları için burulma titreşim frekanslarını hesaplayan bir özdeğer problemi oluşturmaktır. Ayrıca elastik yay katsayılarına özel değerler verilmek suretiyle klasik sınır koşulları için de çözümler elde edilebilecektir.

3.1. Açıl dönme fonksiyonu

Fonksiyonel derecelendirilmiş burulma çubuğunun harmonik titreşim yaptığı kabulü yapılırsa; kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için aşağıdaki ilişki kullanılabilir.

$$\varphi(x, t) = \Psi(x) e^{i\omega t}, \quad (16)$$

burada $\Psi(x)$ açıl dönme fonksiyonunu temsil etmektedir. Benzer şekilde ω ise açıl titreşim frekansını ifade etmektedir. (16) denklemi, (12) denkleminde yerine yazılırsa; aşağıda yazılmış olan ikinci dereceden adi diferansiyel denklem bulunur.

$$D_{rx} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + m_r \omega^2 \Psi(x) = 0, \quad (17)$$

(17) denkleminde bulunan açıl dönme fonksiyonu $\Psi(x)$ aşağıdaki gibi üç farklı ifadeyle gösterilmiştir.

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_0 & x = 0 \\ \Psi_L & x = L \\ \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(\alpha_n x) & 0 < x < L \end{bmatrix}, \quad (18)$$

burada

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (19)$$

şeklinde gösterilmiştir.

3.2. Stokes' dönüşümü

Bu bölümde, "Stokes' dönüşümü" olarak bilinen matematiksel bir dönüşüm ana hatlarıyla özetlenmiştir. (18) denklemindeki Fourier katsayısı (H_n) aşağıdaki formdadır:

$$H_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x) \sin(\alpha_n x) dx. \quad (20)$$

Yukarıdaki denklemin x 'e göre birinci türevi alınırsa:

$$\Psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n H_n \cos(\alpha_n x). \quad (21)$$

bulunur. Yukarıdaki denklem Fourier kosinüs serileriyle ifade edilebilir

$$\Psi'(x) = \frac{f_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(\alpha_n x). \quad (22)$$

burada f_0, f_n parametreleri Fourier sabitleridir. Bu katsayılar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi'(x) dx = \frac{2}{L} [\Psi(L) - \Psi(0)], \quad (23)$$

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Psi'(x) \cos(\alpha_n x) dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

ve son olarak kısmi integrasyon uygulanırsa, aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$f_n = \frac{2}{L} [\Psi(x) \cos(\alpha_n x)]_0^L \quad (25)$$

$$+ \frac{2}{L} \left[\alpha_n \int_0^L \Psi(x) \sin(\alpha_n x) dx \right],$$

$$f_n = \frac{2}{L} [(-1)^n \Psi(L) - \Psi(0)] + \alpha_n H_n. \quad (26)$$

burada, sınırlardaki dönmelerin herhangi bir sadeleştirme olmaksızın önerilen yöntem vasıtasıyla dikkate alındığına işaret etmek gerekir. Bu prosedür, yüksek mertebeden türevler için aşağıdaki gibi tekrarlanabilir:

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \frac{\Psi_L - \Psi_0}{L} + \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \Psi_L - \Psi_0)}{L} + \alpha_n H_n \right),$$

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\alpha_n x) \times \quad (28)$$

$$\left(\frac{2((-1)^n \Psi_L - \Psi_0)}{L} + \alpha_n H_n \right).$$

3.3. Fourier sabiti ve açıl dönme fonksiyonu

(18) ve (28) denklemleri (17) denkleminde yerine yazılırsa, Fourier sabiti aşağıdaki gibi bulunabilir

$$H_n = \frac{2((-1)^{n+1} \Psi_L + \Psi_0) (-D_{rx} \alpha_n)}{L(\omega^2 m_r (1)^n - D_{rx} \alpha_n^2)}, \quad (29)$$

benzer şekilde Fourier sabiti bulunduktan sonra açıl dönme fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1} \Psi_L + \Psi_0) (-D_{rx} \alpha_n)}{L(\omega^2 m_r (1)^n - D_{rx} \alpha_n^2)} \times \sin(\alpha_n x) e^{i\omega t}. \quad (30)$$

4. Özdeğer Probleminin Oluşturulması

Bu bölümde her iki ucundan elastik yaylar ile mesnetlenmiş bir burulma çubuğunun titreşim frekanslarını veren özdeğer problemi oluşturulacaktır.

4.1. Elastik sınır koşulları

Elastik yay katsayıları (13) denkleminde yerine yazılırsa; aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$D_{rx} \frac{d\Psi}{dx} = S_0 \Psi_0, \quad x = 0, \quad (31)$$

$$D_{rx} \frac{d\Psi}{dx} = S_L \Psi_L, \quad x = L, \quad (32)$$

burada, S_0 ve S_L elastik yay sabitlerini göstermektedir.

4.2. Katsayılar matrisi

(29), (31), (32) ve (27) denklemleri birlikte düşünülürse, en genel halde aşağıdaki iki denklem bulunur.

$$(S_0 + \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_n}{Y_n}) \Psi_0 + (\Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Z_n}{Y_n}) \Psi_L = 0, \quad (33)$$

$$(\Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Z_n}{Y_n}) \Psi_0 + (S_L + \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_n}{Y_n}) \Psi_L = 0, \quad (34)$$

burada

$$\Delta_r = -\frac{D_{rx}}{L}, \quad (35)$$

$$Z_n = L m_r \omega^2 (-D_{rx}), \quad (36)$$

$$Y_n = L m_r \omega^2 (L - \pi^2 n^2 D_{rx}), \quad (37)$$

ve sonuç olarak sonsuz serilerden oluşan aşağıdaki katsayılar matrisi bulunur:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_L \end{bmatrix} = 0, \quad (38)$$

burada

$$\phi_{11} = S_0 + \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_n}{Y_n}, \quad (39)$$

$$\phi_{12} = \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Z_n}{Y_n}, \quad (40)$$

$$\phi_{21} = \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n Z_n}{Y_n}, \quad (41)$$

$$\phi_{22} = S_L + \Delta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_n}{Y_n}. \quad (42)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Trivial olmayan çözümü bulmak için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

$$|\phi_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (43)$$

4.3. Özel durumlar

4.3.1. Homojen kirişler

Homojen kirişler için çözümler (38) denkleminde $D_{rx} \mapsto GJ_p$ ve $m_r \mapsto \rho J_p$ yazılarak bulunabilir. Burada J_p ifadesi kutupsal atalet momentidir. G ise kayma modülünü temsil etmektedir. (38) denkleminde D_{rx} yerine GJ_p ve m_r yerine ρJ_p yazılırsa; aşağıdaki iki denklem bulunur.

$$(S_0 + \vartheta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Psi_n}{\zeta_n}) \Psi_0 + (\vartheta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \Psi_n}{\zeta_n}) \Psi_L = 0, \quad (44)$$

$$(\vartheta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \Psi_n}{\zeta_n}) \Psi_0 + (S_L + \vartheta_r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Psi_n}{\zeta_n}) \Psi_L = 0, \quad (45)$$

burada

$$\vartheta_r = -\frac{GJ_p}{L}, \quad (46)$$

$$\Psi_n = L \rho J_p \omega^2 (-GJ_p), \quad (47)$$

$$\zeta_n = L \rho J_p \omega^2 (L - \pi^2 n^2 GJ_p), \quad (48)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

4.3.2. Her iki kenarı ankastre kirişler

Her iki tarafında ankastre mesnet bulunan fonksiyonel değişen malzemeli kirişler için çözümler (38) denkleminde bulunan yay sabitlerine sonsuz büyük değerler verilerek $S_0 \rightarrow \infty$ ve $S_L \rightarrow \infty$ elde edilebilir.

4.3.3. Konsol kirişler

Fonksiyonel değişen malzemeli konsol kirişler için titreşim frekansları; (38) denkleminde bulunan yay sabitlerinden bir tanesine sonsuz büyük değer $S_0 \rightarrow \infty$, diğerine ise sıfır $S_L \rightarrow 0$ verilerek bulunabilir.

5. Sonuçlar ve Değerlendirme

Bu bölümde elastik sınır koşullarıyla mesnetlenmiş fonksiyonel değişken malzemeli bir kirişin titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Elastik sınır koşuluna sahip kirişin şematik gösterimi Şekil 1'de gösterilmiştir. İlerleyen alt bölümlerde birçok sayısal örnek çözümlenerek grafiksel olarak gösterilmiştir. İlk olarak kurulan modelin doğruluğu rijit sınır koşulları için tartışılmıştır. Sırasıyla iç ve dış tarafları saf metal ve saf seramik olarak kabul edilen fonksiyonel değişen malzemeli ve elastik sınır koşullarına sahip kirişlerin burulma titreşim tepkileri incelenmiştir. Sayısal analiz için, metal ve seramikten oluşan bir kiriş ele alınmıştır. Metalin malzeme özellikleri $G_i = 48$ GPa, $\rho_i = 2700$ kg/m³ şeklindedir, seramik malzemede ise $G_o = 129$ GPa, $\rho_o = 3210$ kg/m³ olarak alınmıştır. Dış yarıçap ve iç yarıçapı sırasıyla $r_o = 200$ nm ve $r_i = 100$ nm olarak kabul edilmiştir. Elastik sınır koşullarına sahip kirişin uzunluğu 300 nm olarak alınmıştır.

5.1. Kurulan modelin ve yöntemin doğruluğu

Bu alt bölümde, elastik sınır koşullarına sahip fonksiyonel değişken malzemeli kirişin burulma titreşim frekansları, klasik sınır koşulları için elde edilmiştir. Bulunmuş olan sonuçlar literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

5.1.1. Her iki mesnetin ankastre olması durumu

Her iki tarafı ankastre mesnetli çubukların burulma titreşim frekanslarını elde etmek için, yay sabitlerine sonsuz büyük değerler vermek gereklidir. Bu çalışmada sayısal olarak; $S_0 = 10 \times 10^9 \text{ nN/nm}$ ve $S_L = 10 \times 10^9 \text{ nN/nm}$ değerleri tercih edilmiştir. Yay parametrelerinin daha büyük değerler alınması durumunda da sonuçların değişmediği gözlenmiştir. Tablo 1’de farklı iki fonksiyonel değişim parametre-

Tablo 1. Farklı fonksiyonel değişim parametresine ($\beta = 1.00$ ve $\beta = 2.00$) göre her iki tarafı ankastre çubuk için titreşim frekansları.

Mod sayısı	$\beta = 1$		$\beta = 2$	
	Ref.[16]	Bu çalışma	Ref.[16]	Bu çalışma
1	9,6097	9,6097	10,0736	10,0735
2	19,2195	19,2195	20,1471	20,1471
3	28,8292	28,8292	30,2206	30,2204
4	38,4391	38,4386	40,2942	40,2939
5	48,0488	48,0482	50,3677	50,3671
6	57,6585	57,6574	60,4413	60,4401
7	67,2683	67,2665	70,5148	70,5129
8	76,8780	76,8753	80,5885	80,5856
9	86,4877	86,4839	90,6619	90,6083
10	96,0974	96,0922	100,7356	100,7300

siyle problem çözülmüş ve literatürde bulunan benzer sınır koşullarıyla karşılaştırılmıştır. Tablo 1’den görüleceği gibi bu çalışmada öne sürülen yöntem literatürde bulunan Ref. [16] çalışmayla çok güzel uyum göstermektedir. Ref [16]’de bulunan (49) denkleminde özel değerler alınarak elde edilen sonuçlar son derece tutarlıdır. Matematiksel hesap yapabilmek için öne sürülen yöntemde sonsuz seriler bir noktada kesilmek zorundadır ve bu çalışma için 100 terim kullanılmıştır. Çalışmada neden 100 terimin yeterli olduğu alt bölüm 5.4’ de açıklanmıştır.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2 D_{rx}}{m_r}}. \quad (49)$$

Yukarıdaki denklemde klasik elastisite teorisi için fonksiyonel değişken malzemeli kirişlerin burulma titreşimlerini veren formülasyon verilmiştir (50).

5.1.2. Konsol kiriş olması durumu

İkinci kontrol çalışması olarak ankastre fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş ele alınmıştır ($S_0 = 10 \times 10^9$ ve $S_L = 0$). Tablo 2’den görüldüğü gibi bu çalışmada öne sürülen yöntem literatürde bulunan Ref. [16]’de bulunan çözümlerle son derece uyumludur. Bu örnek problem içinde; metalin malzeme özellikleri $G_i = 48 \text{ GPa}$, $\rho_i = 2700 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır, seramikte ise $G_o = 129 \text{ GPa}$,

$\rho_o = 3210 \text{ kg/m}^3$ kullanılmıştır. Dış yarıçap ve iç yarıçapı sırasıyla $r_o = 200 \text{ nm}$ ve $r_i = 100 \text{ nm}$. olarak kabul edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Ref [16]’de bulunan (50) denkleminle karşılaştırılmış ve son derece tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. Konsol kiriş için de benzer şekilde sonsuz serilerde 100 terim kullanılmıştır. Önceki bölümde sözü edildiği gibi, sonsuz serilerin neden 100 terimde kesildiği alt bölüm 5.4’ de açıklanmıştır.

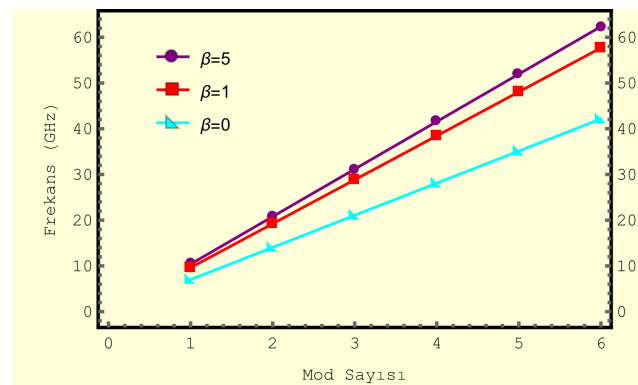
Tablo 2. Farklı fonksiyonel değişim parametresine ($\beta = 1.00$ ve $\beta = 2.00$) göre konsol çubuk için titreşim frekansları.

Mod sayısı	$\beta = 1$		$\beta = 2$	
	Ref.[16]	Bu çalışma	Ref.[16]	Bu çalışma
1	4.8096	4.8049	5.0419	5.0368
2	14.4292	14.4146	15.1256	15.1103
3	24.0487	24.0243	25.2094	25.1838
4	33.6681	33.6339	35.2930	35.2573
5	43.2877	43.2435	45.3769	45.3304
6	52.9071	52.8527	55.4605	55.4036
7	62.5265	62.4620	65.5443	65.4766
8	72.1461	72.0709	75.6282	75.5493
9	81.7656	81.6797	85.7118	85.6218
10	91.3850	91.2881	95.7956	95.6940

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(2n-1)^2 D_{rx}}{m_r}}. \quad (50)$$

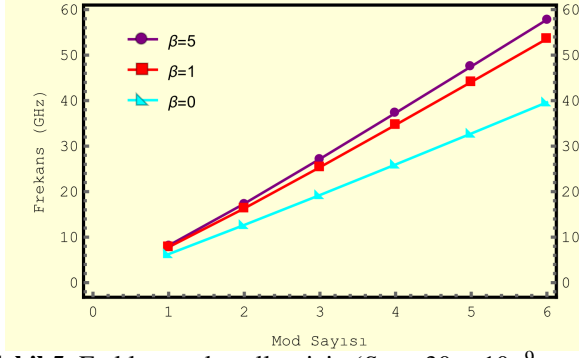
5.2. Farklı fonksiyonel malzeme katsayıları

Farklı fonksiyonel değişim parametresi katsayıları için elde edilmiş sonuçlar; Şekil 2, 3, 4 ve 5’ de gösterilmiştir. Söz konusu şekillerden görüleceği gibi farklı fonksiyonel değişim malzeme katsayıları titreşim frekanslarını doğrudan etkilemektedir.

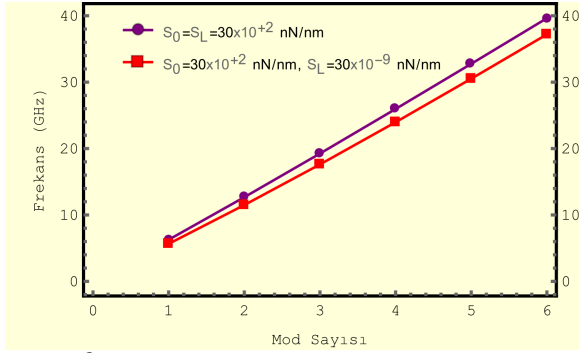


Şekil 2. Farklı sınır koşulları için ($S_0 = S_L = 30 \times 10^2 \text{ nN/nm}$) malzeme değişim parametresinin ilk altı moda etkisi

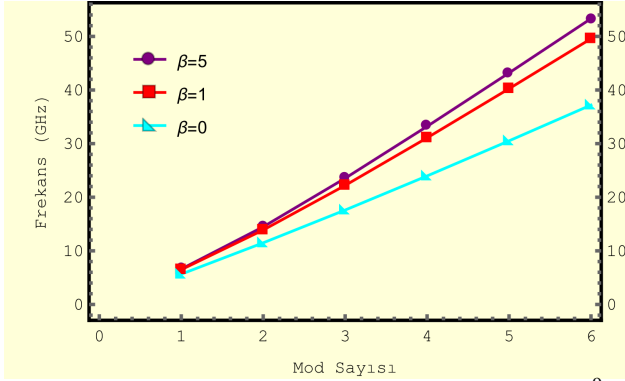
Fonksiyonel değişim katsayısı (β) değerleri arttıkça titreşim frekansları da artmaktadır. Şekil 2 ve 5’ den görüleceği gibi sınır koşulları sertleştikçe titreşim frekansları daha da artmaktadır. Yumuşak yay sabitlerinde titreşim frekanslarının daha düşük olduğu Şekil 3 ve 4’ den gözlemlenebilir.



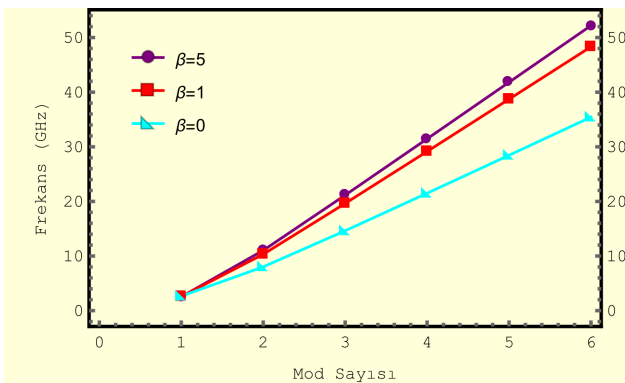
Şekil 5. Farklı sınır koşulları için ($S_0 = 30 \times 10^{-9}$ nN/nm , $S_L = 30 \times 10^{+2}$ nN/nm) malzeme değişim parametresinin (β) ilk altı moda etkisi



Şekil 6. $\beta = 0$ değeri ve iki farklı sınır koşulu için elde edilmiş sonuçlar.



Şekil 3. Farklı sınır koşulları için ($S_0 = S_L = 30 \times 10^{-9}$ nN/nm) malzeme değişim parametresinin (β) ilk altı moda etkisi



Şekil 4. Farklı sınır koşulları için ($S_0 = S_L = 30 \times 10^{-10}$ nN/nm) malzeme değişim parametresinin (β) ilk altı moda etkisi

5.3. Farklı sınır koşulları

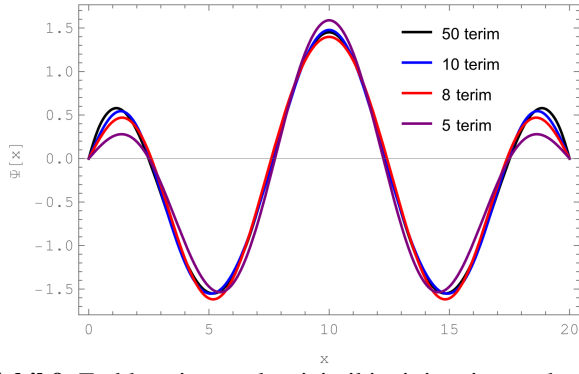
Bu alt bölümde farklı burulma yayları için elde edilmiş sonuçlar; Şekil 6 ve 7' de birlikte gösterilmiştir. Söz konusu şekillerden görüleceği gibi farklı sınır koşulları titreşim frekanslarını doğrudan etkilemektedir. Yay sabitlerinin her bir değeri için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek titreşim frekansları kolaylıkla bulunabilmektedir. Ayrıca öne sürülen yöntemde sınır koşulunun her bir değişimi için diferansiyel denklem sistemini çözmeye ihtiyaç kalmamıştır. Sadece bir kodun yazılması yeterlidir. Sınır koşullarının ve fonksiyonel değişim parametresinin farklı değerleri için çözümler kolaylıkla yapılabilmektedir.

5.4. Farklı terim sayıları

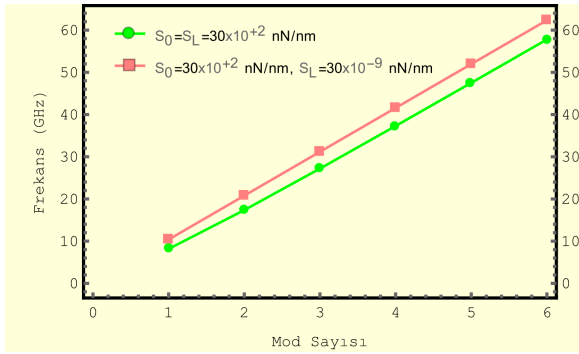
Bu alt bölümde kullanılan yöntemin yakınsama hızı incelenmiştir. Katsayılar matrisinde bulunan elemanlar sonsuz serilerden oluşmaktadır ve bu sonsuz serilerin bir noktada kesilmesi zorunludur. Bu bölümde değişik sınır değerleri için grafikler elde edilerek birlikte gösterilmiştir. Şekil 8 ve 9'den görüleceği gibi sonsuz serilerde kullanılan terim sayısının elli ve daha büyük değerler olması durumunda bulunan sonuçlar kararlı hale gelmektedir. Ayrıca Şekil 8 ve 9'den birinci modun daha az terim sayısı ile kararlı hale geldiği. İkinci modda ise kullanılan terim sayısının en az on olması gerektiği sonucuna ulaşılabilir. Benzer tutarlılık çalışması daha yüksek modlar için de test edilmiş ve ilk 50 terimin yeterli olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

6. Tartışma ve Sonuç

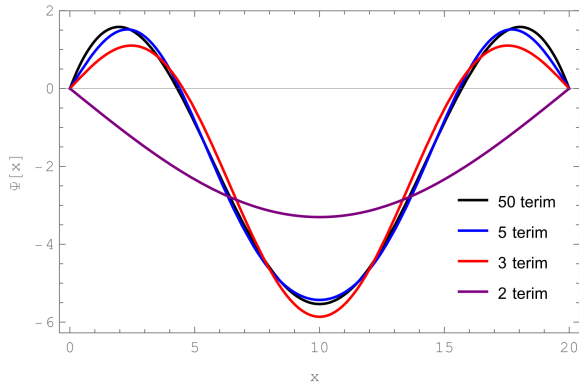
Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burulma titreşimleri konusunda; titreşim frekanslarını hesaplayabilen analitik bir yöntem geliştirilmiştir. Kirişin her iki ucuna dönel yaylar yerleştirilmiştir. Açılmal dönme fonksiyonu olarak Fourier sinüs serisi kullanılmıştır. Sonsuz terimden oluşan söz konusu seriler, problemi yöneten denklemde yerlerine yazılarak Fourier katsayısı hesaplanmıştır. Stoke dönüşümü problemin sınır koşullarında uygulanmış ve iki adet sabit katsayılı ve sonsuz serilerden oluşan denklem takımı elde edilmiştir. 2×2 ebadında ve sonsuz serilerden oluşan katsayılar matrisi oluşturularak bir özdeğer problemi teşkil edilmiştir. Söz konusu matrisin determinantı alınarak özdeğerleri bulunmuştur. Hesaplanmış olan özdeğerler sistemin burulma titreşim frekanslarını vermektedir. Bu çalışmada hesaplanan sonuçlar, literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır ve güzel bir uyum yakalandığı gözlenmiştir. Çözümün doğruluğu ve hassaslığı ispatlandıktan sonra çeşitli parametrelerin titreşim frekansına etkileri bir dizi grafik vasıtasıyla gösterilmiştir. Bu çalışmada elde edilen analitik yöntem genel bir yöntem olup; her türlü sınır koşulunda rahatlıkla uygulanabilir.



Şekil 9. Farklı terim sayıları için ikinci titreşim modu açıl dönme fonksiyonu.



Şekil 7. $\beta = 5$ değeri ve iki farklı sınır koşulu için elde edilmiş sonuçlar.



Şekil 8. Farklı terim sayıları için birinci titreşim modu açıl dönme fonksiyonu.

Kaynakça

[1] Çıracı, S., “Metrenin bir milyarda biri”, Bilim ve Teknik Dergisi, (2005)

- [2] O’Connell, M.J., “Carbon Nanotubes: Properties and Applications”, CRC Press, London(2006).
- [3] Sevi, A.H., “Nanoteknolojide karbon nanotüplerin dayanıklılık simülasyonları”, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul (2006).
- [4] Tepe, A., “Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi”, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul (2007).
- [5] Pradeep, T., “Nano: The Essentials”, McGraw-Hill, Yeni Delhi(2007).
- [6] King, V.B., “Nanotechnology Research Advances”, Nova Science Publishers, New York(2007).
- [7] Karkare, M., “Nanotechnology: Fundamentals and Applications”, I.K International Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi(2008).
- [8] Menceloğlu, Y., Kırca, M., “Uluslararası Rekabet Stratejileri: Nanoteknoloji ve Türkiye, TÜSİAD Rekabet Stratejileri Dizisi 11”, TÜSİAD, İstanbul(2008).
- [9] Aksencer, T., “Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak nano plakların statik ve dinamik analizi”, Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne(2010).
- [10] Akgöz, B., “Yüksek mertebeden elastisite teorileriyle mikro ve nano yapıların doğrusal ve doğrusal olmayan analizleri”, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya(2010).
- [11] Ramsden, J., “Nanotechnology: An Introduction”, Access Online via Elsevier, Waltham(2011).
- [12] Seyman, M.C., “Çift duvarlı karbon nanotüplerin incelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul (2010).
- [13] Kutucu, B., “Nanoteknoloji ve çift duvarlı karbon nanotüplerin incelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul (2010).
- [14] Hsu, J. C., Lee, H. L., Chang, W. J. 2011. Current Applied Physics, 11(2011), 1384-1388.
- [15] Shi, Y. J., W. L. Guo, and C. Q. Ru. 2008. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 41(2008), 213-219.
- [16] Li, L., Hu Y. 2017 Composite Structures, 172(2017), 242-250.