Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2018, 13(2): 144-153
DOI: 10.29233/sdufeffd.462420

Singüler Özfonksiyonlar Yöntemi ile Lineer-Kuadratik Anizotropik Saçılmalı Yarı-Uzay Albedo Hesaplamaları

Recep Gökhan TÜRECİ

[1] *Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale Meslek Yüksekokulu, 71450, Kırıkkale, Türkiye*
**yazışılan yazar e-posta: tureci@kku.edu.tr*

(Alınış: 16.09.2018, Kabul: 05.11.2018, Yayımlanma: 31.11.2018)

Özet: Bu çalışmada tek-hızlı nötron transport teoride çalışılan lineer-kuadratik anizotropik saçılma fonksiyonu için sonsuz ortam Green fonksyionu elde edilmiş ve yarı-uzay albedo hesaplamaları için Singüler özfonksiyonlar yönteminde kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar Modified F_N (H_N) yöntemi sonuçları ile tamamen uyumludur.

Anahtar kelimeler: Lineer-kuadratik anizotropik saçılma, Sonsuz ortam Green fonksiyonu, C_N denklemleri, Singüler özfonksiyonlar yöntemi, Yarı-uzay albedo

The Half-Space Albedo Calculations with the Linear-Quadratik Anisotropic Scattering with Singular Eigenfunction Method

Abstract: In this study the infinite medium Green's function is derived for linear-quadratic anisotropic scattering in one-speed neutron transport theory and, it is used for the half-space albedo calculations with Singular eigenfunction method. The calculated numerical results completely conformed to Modified F_N (H_N) method the results.

Key words: Linear-Quadratic anisotropic scattering, the infinite medium Green's function, C_N Equations, Singular Eigenfunction method, Half-space albedo

1. Giriş

Albedo terimi bir yüzeyden çıkan net parçacık akısının bu yüzeye giren net parçacık akısına oranı ya da kısaca yansıma katsayısı olarak tanımlanır. Söz konusu parçacık, elektrik yükü taşımayan nötr parçacıklardır. Astrofizikte atmosfer yapısı araştırmalarında, meteorolojide hava tahmini hesaplarında, optik oşinografide deniz suyunun analizi gibi araştırmalarda foton için albedo belirlenmeye çalışılır. Albedo hesabı, nükleer mühendislikte, nötron çoğaltıcı ortam olan reaktör korunu çevreleyen nötron çoğaltıcı olmayan nötron yansıtıcı ortamların özelliklerinin anlaşılmasında çalışılır.

Bu çalışmada, ortam olarak adlandırılan ve $x \in [0,\infty)$ aralığında bulunan nötron yansıtıcı bir malzeme göz önüne alınmaktadır. $x=0$ 'da bulunan bir ara yüzey, ortam ile boşluk arasında sınırdır. Ortam herhangi bir nötron kaynağı içermemektedir. Boşluktan ortama nötron girişi ve ortamdan da boşluğa nötron çıkışı olmaktadır. Ortam içindeki nötronların, ortam ile etkileşmesinin lineer-kuadratik saçılmalı olduğu düşünülmektedir. Malzemenin yapısına göre, malzeme ile çalışılan enerji aralığındaki nötron tesir kesitleri göz önüne

Atıf için: R. G. Türeci, "Singüler Özfonksiyonlar Yöntemi ile Lineer-Kuadratik Anizotropik Saçılmalı Yarı-Uzay Albedo Hesaplamaları", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 13(2), 144-153, 2018.

alınarak daha teknik bir çalışma yapılabilir. Fakat burada yarı-uzay problemi düşünüldüğünden, homojen dağılıma sahip bir ortam için, tesir kesiti hesaplarına değinmeden sadece matematiksel olarak ikincil nötron sayısı üzerinden çalışılacaktır.

Belirli, makul yaklaşımlar altında elde edilen tek-hızlı, zamandan bağımsız, homojen uzay, düzlem geometride yazılan nötron transport denklemi,

$$\mu\frac{\partial\Psi(x,\mu)}{\partial x}+\Psi(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}f(\mu,\mu')\Psi(x,\mu')d\mu' \qquad (1)$$

ile verilir [1-6]. Burada $\Psi(x,\mu)$, x noktası ve μ doğrultusundaki nötron akısı, μ nötronların ilerleme doğrultusunun kosinüsü, μ' etkileşmeden sonra saçılan nötronların doğrultusunun kosinüsü, c etkileşmeden sonra ortaya çıkan ikincil nötron sayısıdır. $f(\mu,\mu')$ nötronların saçılma olasılığını tanımlayan saçılma fonksiyonudur ve Mika [7] tarafından Legendre polinomları cinsinden seriye açılmıştır.

$$f(\mu,\mu')=\sum_{n=0}^{M}f_n(2n+1)P_n(\mu)P_n(\mu') \qquad (2)$$

Bu açılım ifadesinde f_n saçılma katsayısı, $P_n(\mu)$ ve $P_n(\mu')$, *n.* mertebeden Legendre polinomlarıdır. Saçılma fonksiyonunda $M=0$ alınırsa, sadece f_0 terimi göz önüne alınmaktadır. Bu, izotropik saçılmalı duruma karşılık gelir ve nötronların saçılma olasılığı her yönde eşittir. $M=1$ durumu ise lineer anizotropik saçılmaya karşı gelir. İzotropik saçılmaya ek olarak nötronların saçılma olasılığı, açısal değişken ile doğrusal olarak değişmektedir. Her iki saçılma durumu da singüler özfonksiyonlar [8,9] ve özdeğerleri [10] açısından incelenmiş olup, çeşitli nötron transport teori problemlerine F_N yöntemi [11-12], C_N yöntemi [13] ve H_N yöntemi [14] gibi farklı yöntemler ile uygulanmıştır. $M=2$ durumu $f_1=0$ koşulu ile saf-kuadratik anizotropik saçılmalı duruma [15-17]; $M=3$ durumu $f_1=0$ ve $f_2=0$ koşulu ile saf-triplet saçılmalı [18] durumlara karşı gelir. Bu çalışmada lineer ve kuadratik saçılmalı durumlar birlikte düşünülmüş ve saçılma *lineer-kuadratik saçılma* [19-21] olarak adlandırılmıştır. $M=2$ olup $f_n\neq 0,\ n\leq 2,\ f_n=0,\ n>2$ ' dir.

$$f(\mu,\mu')=f_0+3f_1P_1(\mu)P_1(\mu')+5f_2P_2(\mu)P_2(\mu') \qquad (3)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim izotropik saçılmaya, ikinci terim lineer anizotropik saçılmaya ve son terim de kuadratik anizotropik saçılmaya karşılık gelmektedir.

Tek-hızlı nötron transport denkleminin çözümünde en başarılı yöntemlerden biri C_N yöntemidir. Yöntem, nötron transport denklemini, Fredholm integral denklemleri olarak göz önünde alır. Placzek lemmasının [22] kullanılmasıyla sonlu ortamın sonsuz ortama dönüştürülmesini içeren yöntem, analitik hesapları oldukça zordur. Fakat sayısal sonuçları çabuk yakınsayan sonuçlar vermesi açısından güçlü bir yöntemdir. C_N yönteminden elde edilen Fredholm tipi integral denklemler,

$$\begin{aligned} \nu^-(\mu) &= \int_0^1 \nu^+(\mu_0) G^+(\mu_0 \to \mu)\mu_0 d\mu_0 \\ &+ \int_{-1}^0 \nu^-(\mu_0) G^+(\mu_0 \to \mu)\mu_0 d\mu_0, \quad \mu < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \nu^+(\mu_0) G^+(\mu_0 \to \mu)\mu_0 d\mu_0 \\ &+ \int_{-1}^0 \nu^-(\mu_0) G^+(\mu_0 \to \mu)\mu_0 d\mu_0, \quad \mu > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ile verilir [13]. Burada $G^+(\mu_0 \to \mu)$, $x = x_0 = 0$ ortam sınırında tanımlanan sonsuz ortam Green fonksiyonu, $\nu^-(\mu)$ ortam sınırından çıkan nötron akısı, $\nu^+(\mu)$ ortam sınırından giren nötron akısıdır.

Bu çalışmada Denklem (4) kullanılarak yarı uzay albedo hesapları yapılmıştır. Denklem (5) kullanılarak ta bu hesaplamalar yapılabilir, ancak çıkan nötron akısı üzerinden yapılan hesapların farklı problemlerde de olduğu gibi daha iyi sayısal sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bu nedenle çalışma Denklem (4) kullanılarak yapılmıştır.

Sonsuz ortam Green fonksiyonu, ortam sınırına soldan ve sağdan yaklaşan çözümlerin sağlaması geren *sıçrama şartı* kullanılarak Case özfonksiyonları cinsinden elde edilir [3] ve aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} G_{lq}^{\pm}(x_0, \mu_0 \to x, \mu) &= \pm \frac{\phi_{lq}(\pm\nu_0, \mu_0)\phi_{lq}(\pm\nu_0, \mu)}{N_{lq}(\pm\nu_0)} \exp\left(-\frac{|x - x_0|}{\nu_0}\right) \\ &\pm \int_0^1 \frac{\phi_{lq}(\pm\nu, \mu_0)\phi_{lq}(\pm\nu, \mu)}{N_{lq}(\pm\nu)} \exp\left(-\frac{|x - x_0|}{\nu}\right) d\nu \end{aligned} \tag{6}$$

Burada lq alt indisi, lineer-kuadratik anizotropik saçılmayı belirtmesi amacıyla kullanılmıştır. Case yönteminden elde edilen ve Denklem (6) ile verilen sonsuz ortam Green fonksiyonu, Denklem (4) ve Denklem (5)' te kullanılarak Singüler Özfonksiyonlar yöntemi geliştirilmiştir ve albedo problemine uygulanmıştır [23-25].

Denklem (6)' da yer alan lineer-kuadratik anizotropik saçılmaya ait Case özfonksiyonları ve Case metoduna ait tanımlar aşağıdaki gibidir. $\nu_0 \notin [-1,1]$ aralığında tanımlı kesikli özfonksiyonlar:

$$\phi(\pm\nu_0, \mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1 - \eta_0 \pm w\nu_0\mu + 3\eta_0\mu^2}{\nu_0 \mp \mu} \tag{7}$$

$$\eta_0 = \frac{5f_2}{4}\left[3\nu_0^2(1-c)(1-cf_1) - 1\right] \tag{8}$$

$$w = 3f_1(1-c) \tag{9}$$

Kesikli özdeğerler, normalizasyon integralinden elde edilen

$$\Lambda(\nu_0) = ln\left(\frac{1+\frac{1}{\nu_0}}{1-\frac{1}{\nu_0}}\right) - \frac{2}{c\nu_0}\frac{1+wc\nu_0^{\,2}+3\eta_0 c\nu_0^{\,2}}{1-\eta_0+w\nu_0^{\,2}+3\eta_0\nu_0^{\,2}} = 0 \tag{10}$$

denkleminin kökleridir. $\nu \in [-1,1]$ aralığında tanımlı sürekli özfonksiyonlar:

$$\phi(\nu,\mu) = \frac{c\nu}{2} P\frac{1-\eta+w\nu\mu+3\eta\mu^2}{\nu-\mu} + \lambda(\nu)\delta(\nu-\mu) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\lambda(\nu) &= \left(1+wc\nu^2+3\eta c\nu^2\right)\\ &\quad - c\nu\left(1-\eta+w\nu^2+3\eta\nu^2\right)\arctan h(\nu)\end{aligned} \tag{12}$$

burada P sembolü Cauchy prensip değere karşı gelir.

Case özfonksiyonları aşağıdaki ortogonallik özelliklerini sağlarlar:

$$\int_{-1}^{1} \mu\phi_{lq}(\pm\nu_0,\mu)\phi_{lq}(\pm\nu_0,\mu)\,d\mu = N_{lq}(\pm\nu_0) \tag{13}$$

$$N_{lq}(-\nu_0) = -N_{lq}(\nu_0) \tag{14}$$

$$\int_{-1}^{1} \mu\phi_{lq}(\nu,\mu)\phi_{lq}(\nu',\mu)\,d\mu = N_{lq}(\nu)\delta(\nu-\nu') \tag{15}$$

$$N_{lq}(-\nu) = -N_{lq}(\nu) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}N_{lq}(\nu_0) = \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \Bigg\{ &\frac{2\nu_0}{\nu_0^{\,2}-1}\left[(1-\eta_0)^2+2(1-\eta_0)w+\left(6\eta_0(1-\eta_0)+w^2\nu_0^{\,2}\right)+6w\eta_0+9\eta_0^{\,2}\right]\\ &-\Big[(1-\eta_0)^2+4(1-\eta_0)w\nu_0^{\,2}+3\nu_0^{\,2}\left(6\eta_0(1-\eta_0)+w^2\nu_0^{\,2}\right)\\ &+24w\eta_0\nu_0^{\,4}+45\eta^2\nu_0^{\,4}\Big]\frac{2}{c\nu_0}\frac{1+wc\nu_0^{\,2}+3\eta c\nu_0^{\,2}}{1-\eta_0+w\nu_0^{\,2}+3\eta_0\nu_0^{\,2}}\\ &+8(1-\eta_0)w\nu_0+6\nu_0\left(6\eta_0(1-\eta_0)+w^2\nu_0^{\,2}\right)+48w\eta_0\nu_0^{\,3}\\ &+16w\eta_0\nu_0+90\eta_0^{\,2}\nu_0^{\,3}+30\eta_0^{\,2}\nu_0\Bigg\}\end{aligned} \tag{17}$$

$$N_{lq}(\nu)=\nu\Big[\left(1+wc\nu^2+3\eta c\nu^2\right) -c\nu\left(1-\eta+w\nu^2+3\eta\nu^2\right)\arctan h(\nu)\Big]^2 +\frac{c^2\pi^2\nu^3}{4}\left(1-\eta+w\nu^2+3\eta\nu^2\right)^2 \tag{18}$$

2. Albedo Hesabı

İlgilenilen yarı-uzay, $x_0=0$' da bulunan sınır yüzeyi ve $x>0$ için ortam olarak adlandırılan nötron yansıtıcı maddedir. $x<0$ boşluk olarak adlandırılmaktadır. Yüzey üzerindeki nötron akıları,

$$\nu^-(\mu)=\sum_{\ell=0}a_\ell\mu^\ell,\quad \mu<0 \tag{19a}$$

$$\nu^+(\mu)=\mu^\gamma,\quad \mu<0 \tag{19b}$$

olarak tanımlıdır. Denklem (19a), ortma sınırından çıkan nötron akısı için kuvvet serisi tanımıdır. Denklem (19b)' de γ, tam sayıdır ve ortam sınırından giren nötronların matematiksel olarak momentini belirtir. $\gamma=0$, alınması durumunda yüzeyden içeriye bir tane nötron girişi olduğu düşünülür. γ' nın artan değerleri için açısal değişken, $\mu\in[0,1]$ olduğundan, artan γ için daha az sayıda nötron girişi olması anlamına gelir. Denklemler (19a) ve (19b), Denklem (7) ile birlikte Denklem (4)' te kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nu^-(\mu)&=\frac{c\nu_0}{2}\frac{B_\gamma(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}\phi_{lq}(\nu_0,\mu)+\int_0^1\frac{c\nu}{2}\frac{B_\gamma(\nu)}{N_{lq}(\nu)}\phi_{lq}(\nu,\mu)\,d\nu\\&+\sum_{\ell=0}a_\ell(-1)^{\ell+1}\frac{c\nu_0}{2}\frac{A_\ell(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}\phi_{lq}(\nu_0,\mu)\\&+\sum_{\ell=0}a_\ell(-1)^{\ell+1}\int_0^1\frac{c\nu}{2}\frac{A_\ell(\nu)}{N_{lq}(\nu)}\phi_{lq}(\nu,\mu)d\nu,\quad \mu<0\end{aligned} \tag{20}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (20)' de eşitliğin sol tarafındaki çıkan akı tanımı, Denklem (19a)' da verilen tanımı ile yazılarak, denklem μ^{m+1} ile çarpılıp, μ açısal değişkeninin tanım aralığından dolayı $\mu\in[-1,0]$ aralığında integre edilerek düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=0}a_\ell(-1)^\ell\left[\frac{1}{m+\ell+2}+\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2\frac{A_\ell(\nu_0)A_m(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}+\int_0^1\left(\frac{c\nu}{2}\right)^2\frac{A_\ell(\nu)A_m(\nu)}{N_{lq}(\nu)}d\nu\right]\\&=\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2\frac{B_\gamma(\nu_0)A_m(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}+\int_0^1\left(\frac{c\nu}{2}\right)^2\frac{B_\gamma(\nu)A_m(\nu)}{N_{lq}(\nu)}d\nu\end{aligned} \tag{21}$$

ifadesine ulaşılır. Denklem (20) ve (21)' deki ara fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

$$A_n(\xi)=\frac{2}{c\xi}\int_0^1 \mu^{n+1}\phi_{lq}(\xi,-\mu)d\mu \tag{22}$$

$$A_n(\xi)=\frac{1-\eta_\xi}{n+1}-\frac{w\xi}{n+2}+\frac{3\eta_\xi}{n+3}-\xi A_{n-1}(\xi) \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}A_0(\xi)&=1-\eta_\xi-\frac{w\xi(1-2\xi)}{2}+\frac{\eta_\xi}{2}\left(2-3\xi+6\xi^2\right)\\&-\xi\left(1-\eta_\xi+w\xi^2+3\eta_\xi\xi^2\right)\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\end{aligned} \tag{22b}$$

$$B_n(\xi)=\frac{2}{c\xi}\int_0^1 \mu^{n+1}\phi_{lq}(\xi,\mu)d\mu \tag{23}$$

$$B_n(\xi)=\xi B_{n-1}(\xi)-\frac{1-\eta_\xi}{n+1}-\frac{w\xi}{n+2}-\frac{3\eta_\xi}{n+3} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned}B_0(\xi)&=\frac{2}{c}\left(1+cw\xi^2+3c\eta_\xi\xi^2\right)-\left(1-\eta_\xi\right)-\frac{w\xi(1+2\xi)}{2}\\&-\frac{\eta_\xi}{2}\left(2+3\xi+6\xi^2\right)-\xi\left(1-\eta_\xi+w\xi^2+3\eta_\xi\xi^2\right)\ln\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\end{aligned} \tag{23b}$$

Denklem (21) aşağıdaki matris formunda yazılarak, sayısal hesaplamalar için denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{\ell=0}(-1)^\ell a_\ell T_{m\ell}=U_{m\gamma} \tag{24}$$

$$T_{m\ell}=\frac{1}{m+\ell+2}+\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2\frac{A_\ell(\nu_0)A_m(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}+\int_0^1\left(\frac{c\nu}{2}\right)^2\frac{A_\ell(\nu)A_m(\nu)}{N_{lq}(\nu)}d\nu \tag{25}$$

$$U_{m\gamma}=\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2\frac{B_\gamma(\nu_0)A_m(\nu_0)}{N_{lq}(\nu_0)}+\int_0^1\left(\frac{c\nu}{2}\right)^2\frac{B_\gamma(\nu)A_m(\nu)}{N_{lq}(\nu)}d\nu \tag{26}$$

3. Sayısal Hesaplamalar

Albedo nötron yansıtıcı malzemeden çıkan net nötron akısının, malzemeye giren net nötron akısına oranıdır. Dolayısıyla, Denklem (19a) ve (19b) ile verilen tanımlar göz önüne alınırsa, albedo için

$$\beta_{lq}=-\frac{\int_{-1}^{0}\mu_0\nu^-(\mu_0)d\mu_0}{\int_0^1\mu_0\nu^+(\mu_0)d\mu_0}=(\gamma+2)\sum_{\ell=0}a_\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell+2} \tag{27}$$

ifadesi elde edilir. Bu aşamadan sonra Denklem (24) a_ℓ katsayılarını bulmak için çözülür ve bulunan katsayılar Denklem (27)' de kullanılarak albedo hesabı yapılır.

Tablolardaki N sayısı, Denklem (24) ve Denklem (27)' deki toplam ifadesinin mertebesine karşı gelmektedir. Tablo 1-6, $c = 0.8$ ve $\gamma = 0$ için yani sadece tek bir tane nötronun ortam sınırından girmesi durumuna karşı, değişen f_1 ve f_2 katsayılarına göre albedo değerlerini göstermektedir. Hesaplamalar, Mathematica (v13.1) programında hazırlanan kodlar ile yapılmıştır.

Elde edilen ve Tablo 1-6' da gösterilen değerler Modified F_N metodundan elde edilen sonuçlarla [19] tamamen tutarlıdır. Tablolar 7-9, değişen f_1 ve f_2 katsayıları için giren nötron akısının momentleri için albedo değerlerini göstermektedir. Tablolar 7-9, kalabalık görünümden sakınmak için sadece yedinci yaklaşım için verilmiştir. Sonuçların [26] tarafından Modified F_N yöntemiyle elde edilen sonuçlarla tamamen tutarlı olduğu görülmektedir.

Tablo 1. $f_1 = -0.3$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = -0.3$			
N	$f_2 = -0.38$	$f_2 = -0.3$	$f_2 = -0.2$	$f_2 = -0.18$
1	0.5112878	0.4868405	0.4551191	0.4486125
2	0.5088121	0.4848286	0.4536325	0.4472231
3	0.5087871	0.4848037	0.4536077	0.4471983
4	0.5087855	0.4848021	0.4536061	0.4471968
5	0.5087853	0.4848019	0.4536060	0.4471966
6	0.5087853	0.4848019	0.4536059	0.4471966
7	0.5087853	0.4848019	0.4536059	0.4471966

Tablo 2. $f_1 = -0.2$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = -0.2$			
N	$f_2 = -0.32$	$f_2 = -0.3$	$f_2 = -0.2$	$f_2 = -0.12$
1	0.4832856	0.4765019	0.4420894	0.4139329
2	0.4810022	0.4743419	0.4404996	0.4127409
3	0.4809762	0.4743159	0.4404739	0.4127157
4	0.4809746	0.4743143	0.4404724	0.4127142
5	0.4809744	0.4743142	0.4404723	0.4127140
6	0.4809744	0.4743142	0.4404722	0.4127140
7	0.4809744	0.4743142	0.4404722	0.4127140

Tablo 3. $f_1 = -0.1$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = -0.1$			
N	$f_2 = -0.26$	$f_2 = -0.2$	$f_2 = -0.1$	$f_2 = -0.06$
1	0.4514111	0.4286376	0.3905668	0.3752794
2	0.4493303	0.4269246	0.3893847	0.3742812
3	0.4493033	0.4268980	0.3893591	0.3742560
4	0.4493018	0.4268965	0.3893577	0.3742547
5	0.4493016	0.4268964	0.3893575	0.3742546
6	0.4493016	0.4268964	0.3893575	0.3742545
7	0.4493016	0.4268964	0.3893575	0.3742545

Tablo 4. $f_1 = 0.1$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = 0.1$			
N	$f_2 = -0.14$	$f_2 = -0.12$	$f_2 = -0.1$	$f_2 = 0.06$
1	0.3722419	0.3631186	0.3540922	0.2849021
2	0.3706168	0.3616206	0.3527146	0.2842733
3	0.3705896	0.3615939	0.3526882	0.2842507
4	0.3705883	0.3615926	0.3526870	0.2842496
5	0.3705882	0.3615925	0.3526869	0.2842495
6	0.3705882	0.3615925	0.3526869	0.2842495
7	0.3705882	0.3615925	0.3526869	0.2842495

Tablo 5. $f_1 = 0.2$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = 0.2$			
N	$f_2 = -0.08$	$f_2 = -0.01$	$f_2 = 0.1$	$f_2 = 0.12$
1	0.3233944	0.2903451	0.2419212	0.2334939
2	0.3220273	0.2893700	0.2413962	0.2330323
3	0.3220014	0.2893463	0.2413759	0.2330127
4	0.3220003	0.2893453	0.2413751	0.2330119
5	0.3220002	0.2893452	0.2413750	0.2330118
6	0.3220002	0.2893452	0.2413750	0.2330118
7	0.3220002	0.2893452	0.2413750	0.2330118

Tablo 6. $f_1 = 0.3$ ve değişen f_2 değerleri için albedo değerleri

	$f_1 = 0.3$			
N	$f_2 = -0.01$	$f_2 = 0.01$	$f_2 = 0.1$	$f_2 = 0.18$
1	0.2630618	0.2533684	0.2124000	0.1788931
2	0.2620257	0.2524386	0.2118528	0.1785801
3	0.2620029	0.2524166	0.2118343	0.1785647
4	0.2620021	0.2524158	0.2118337	0.1785642
5	0.2620020	0.2524157	0.2118337	0.1785642
6	0.2620020	0.2524157	0.2118336	0.1785642
7	0.2620020	0.2524157	0.2118336	0.1785642

Tablo 7. Artan γ değerlerine göre $f_1 = 0.1$ için albedo değerleri

γ	$f_2 = -0.14$	$f_2 = -0.1$	$f_2 = -0.05$	$f_2 = 0.06$
0	0.37595755	0.36042249	0.34177535	0.30366890
1	0.36294633	0.34588600	0.32536249	0.28323118
2	0.35648119	0.33840386	0.31662584	0.27178883
3	0.35279820	0.33397921	0.31128437	0.26446178
4	0.35050717	0.33111725	0.30771548	0.25935705
5	0.34899183	0.32914595	0.30517890	0.25558948
6	0.34794322	0.32772332	0.30329212	0.25269005
7	0.34719206	0.32665898	0.30183882	0.25038688
8	0.34663916	0.32583950	0.30068806	0.24851141
9	0.34622320	0.32519359	0.29975620	0.24695345

Tablo 8. Artan γ değerlerine göre $f_1 = 0.2$ için albedo değerleri

γ	$f_2 = -0.08$	$f_2 = -0.05$	$f_2 = 0.1$	$f_2 = 0.12$
0	0.33578624	0.32354633	0.26911575	0.26264485
1	0.31933397	0.30587007	0.24572077	0.23853143
2	0.31067925	0.29640535	0.23245219	0.22478219

3	0.30545130	0.29059056	0.22386992	0.21584858
4	0.30199884	0.28668893	0.21784272	0.20955055
5	0.29957217	0.28390530	0.21336538	0.20485677
6	0.29778597	0.28182754	0.20990121	0.20121506
7	0.29642364	0.28022198	0.20713707	0.19830228
8	0.29535486	0.27894686	0.20487764	0.19591637
9	0.29449690	0.27791141	0.20299457	0.19392425

Tablo 9. Artan γ değerlerine göre $f_1 = 0.3$ için albedo değerleri

γ	$f_2 = -0.02$	$f_2 = 0.05$	$f_2 = 0.1$	$f_2 = 0.18$
0	0.29036833	0.26290716	0.24528762	0.22013752
1	0.26997412	0.23969214	0.22020233	0.19227237
2	0.25883795	0.22670232	0.20597994	0.17621097
3	0.25187750	0.21840645	0.19679368	0.16569158
4	0.24713520	0.21264664	0.19035388	0.15823074
5	0.24370520	0.20841117	0.18557907	0.15264426
6	0.24111321	0.20516347	0.18189164	0.14829379
7	0.23908780	0.20259265	0.17895459	0.14480367
8	0.23746277	0.20050613	0.17655783	0.14193781
9	0.23613085	0.19877818	0.17456342	0.13954005

4. Sonuç ve Yorum

C_N yöntemi, nötron transport denklemini çözmek için Kavenoky tarafından geliştirilmiş güçlü, fakat matematiksel olarak oldukça zor bir yöntemdir. Yöntemin gücü, sayısal sonuçlardaki başarısından gelmektedir.

Bu çalışmada C_N denkleminden elde edilen Fredholm tipi integral denklemlerde lineer-kuadratik anizotropik saçılma için elde edilen sonsuz ortam Green fonksiyonu kullanılmıştır. Bu şekliyle problemin incelendiği yöntem, Singüler özfonksiyonlar yöntemidir.

Tablo 1-6' daki değerlere göre sabit c değeri için f_1 katsayısı arttıkça albedo değerleri düşmektedir. Benzer durum sabit c değeri ve sabit f_1 ve artan f_2 için de görülmektedir. Elde edilen sonuçlara göre albedo değerlerindeki düşüşün nedeni saçılmanın etkisi olarak yorumlanabilir. Literatüdeki benzer çalışmalara göre saf-lineer anizotropik saçılma katsayısı arttıkça albedo değerlerinin düştüğü fakat bunun aksine saf-kuadratik saçılma katsayısı arttıkça da albedo değerlerinin, saçılmanın mertebesine göre arttığı görülmektedir. Bu çalışmanın sonuçlarına göre baskın olan saçılmanın lineer anizotropik saçılma olduğu söylenebilir. Açısal değişkenin $\mu \in [-1,1]$ aralığında tanımlı olması nedeniyle beklenen bir sonuçtur.

Tablo 7-9' da pozitif f_1 için giren nötron akısının momentleri göz önüne alınmıştır. Bu tablolardaki değerlere göre sabit c, f_1 ve f_2 değerleri için artan γ değerlerinde albedo değerleri düşmektedir. Benzer şekilde sabit c, f_1 ve γ için artan f_2 değerleri için albedo değerleri düşmektedir. Elde edilen sonuçlar Modified F_N (H_N) yönteminden elde edilen sonuçlar ile tam olarak uyuşmaktadır.

Kaynakça

[1] B. Davison, *Neutron Transport Theory*. London: Oxford University Press, 1958, ch. 1-8.

[2] K. M. Case, “Elementary solutions of the transport equation and their applications,” *Ann. Physics*, vol. 9, no. 1, pp. 1-23, 1960.

[3] K. M. Case, and P. F. Zweifel, *Linear Transport Theory.* Reading Mass: Addition-Wesley, 1967, ch. 4-6.

[4] M. M. R. Williams, *Mathematical Methods in Particle Transport Theory*. New York: Wiley-Interscience, 1971, ch. 3-8.

[5] G. I. Bell, and S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory.* New York: Von Nostrand Reinhold, 1972, ch. 1-3.

[6] W. M. Stacey, *Neutron Transport Theory*. 2nd ed., Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007. ch. 9.

[7] J. Mika, “Neutron transport with anisotropic scattering,” *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 11, no. 4, pp. 415-427, 1961.

[8] N. J. McCormick, and I. Kuščer, “Half-space neutron transport with linearly anisotropic scattering,” *J. Math. Phys.*, vol. 6, no. 2, pp. 1939-1945, 1965.

[9] N. J. McCormick, and I. Kuščer, “Singular eigenfunction expansions in neutron transport theory,” *Adv. Nucl. Sci. Tech.*, vol. 7, pp. 181-282, 1973.

[10] V. Protopopescu, and N. G. Sjöstrand, “On the solution of the dispersion equation for monoenergetic neutron transport with linearly anisotropic scattering,” *Prog. Nucl. Energ.*, vol. 7, no. 1, pp. 47-58, 1981.

[11] C. E. Siewert, and P. Benoist, “The F_N method in neutron-transport theory, Part I: Theory and applications,” *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 69, no. 2, pp. 156-160, 1979.

[12] P. Grandjean, and C. E. Siewert, “The F_N method in neutron-transport theory, Part II: Applications and numerical results,” *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 69, no. 2, pp. 161-168, 1979.

[13] A. Kavenoky, “The CN method of solving the transport equation: Application to plane geometry,” *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 65, no. 2, pp. 209-225, 1978.

[14] C. Tezcan, A. Kaşkaş, M. Ç. Güleçyüz, “The H-N method for solving linear transport equation: theory and applications,” *J. Quant. Spectrosc. Ra..*, vol. 78, no. 2, pp. 243-254, 2003.

[15] N. G. Sjöstrand, “Complex eigenvalues for neutron transport equation with quadratically anisotropic scattering,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, vol. 18, no. 1, pp. 1-5, 1981.

[16] R. G. Türeci, and D. Türeci, “Time dependent albedo problem for quadratic anisotropic scattering,” *Kerntechnik*, vol. 72, no. 1-2, pp. 59-65, 2007.

[17] R. G. Türeci, and M.Ç. Güleçyüz, “The slab albedo and criticality problem for the quadratic scattering kernel with the H-N method,” *Kerntechnik*, vol. 73, no. 4, pp. 171-175, 2008.

[18] R. G. Türeci, “Solving the criticality problem with the reflected boundary condition for the triplet anisotropic scattering with the Modified F_N method,” *Kerntechnik*, vol. 80, no. 6, pp. 583-591, 2015.

[19] R. G. Türeci, and D. Türeci, “Half-space albedo problem with Modified F_N method for linear and quadratic anisotropic scattering,” *Kerntechnik*, vol. 82, no. 2, pp. 239-245, 2017.

[20] R. G. Türeci, and D. Türeci, “Slab albedo for linearly and quadratically anisotropic scattering kernel with Modified F_N method,” *Kerntechnik*, vol. 82, no.5, pp. 605-611, 2017.

[21] R.G. Türeci, “Half-space albedo problem for the (İnönü, Linear and Quadratic) anisotropic scattering,” *Kerntechnik,* submitted for publication.

[22] K. M. Case, F. de Hoffmann, and G. Placzek, *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*. Los Alamos (N.M.) Scientific Laboratory, New Mexico, 1953.

[23] C. Tezcan, M. Ç. Güleçyüz, and F. Erdoğan, “A new approach of solving the third form of the transport equation in plane geometry: Half-space albedo problem,” *J. Quant. Spectrosc. Ra..*, vol. 55, no. 2, pp. 251-258, 1996.

[24] F. Erdoğan, M. Ç. Güleçyüz, A. Kaşkaş and C. Tezcan “Solution of the C_N equations using singular eigenfunctions and applications,” *Ann. Nucl. Energy.*, vol. 23, no. 6, pp. 553-541, 1996.

[25] M. Ç. Güleçyüz, A. Kaşkaş, and C. Tezcan, “Slab albedo problem for anisotropic scattering using singular eigenfunction solution of the C_N equations *J. Quant. Spectrosc. Ra..*, vol. 61, no. 3, pp. 329-338, 1999.

[26] R. G. Türeci “Half-space albedo problem for linear-quadratic anisotropic scattering according to moments of ıncoming neutron distribution,” *International Conference on Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology,* in Conf. Rec. 2017 *TESNAT 2017,* Adana, Turkey.

R. Gökhan TÜRECİ, tureci@kku.edu.tr, ORCID: https:// orcid.org/0000-0001-6309-6300