Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 12, Sayı 2, Aralık 2018, sayfa 136-166. ISSN: 1307-6086

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 12, Issue 2, December 2018, pp. 136-166. ISSN: 1307-6086

Araştırma Makalesi / Research Article

Examining Proof Schemes of Prospective Mathematics Teachers Towards Countability Concept

Ozan PALA [1], Serkan NARLI [2]

[1] Ministry of National Education, İhsan Erturgut Middle School, ozanpala@yahoo.com, https://orcid.org/0000-0002-8691-9979

[2] Dokuz Eylul University, Buca Faculty of Education, Mathematics and Science Education, serkan.narli@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8629-8722

Received : 12.10.2018 Accepted : 08.12.2018

Doi: 10.17522/balikesirnef.506425

Abstract – In this study it was focused to concept of countability, which compose a part of prospective teachers' understanding of the infinity concept, and it was aimed to examine prospective teachers proof schemas in proving activities including this concept. Case study method, which is one of qualitative research approaches, was used. Also convenience sampling method was preferred. For that purpose, 100 sophomore prospective mathematics teachers studying a state university included the research. After a course period, they were asked to prove some theorems about equivalence of infinite sets. Their answers were examined both descriptive and content analyses. As a result of these process it was identified that majority part them (%91) couldn't reach the formal proof. Also, it was identified that different proof schemas emerged in relation to proving process. In addition, it was seen that most of the prospective teachers (%51) have Empirical Proof Schemes and Analytical Schemas are least observed (%17) scheme.

Key words: Infinity, Countability, Proof, Proof Schemes, Mathematics Education

----

Corresponding Author: Ozan PALA, Ministry of National Education

Summary

Introduction: When history of mathematics is investigated it can be seen that development processes of some of concepts are more painful than others. Being one of them "infinity" is a concept that humanity struggle with for a long time period (Yıldırım, 2016). Therefore, it can be said that mathematicians kept away from this concept at the beginning and only some philosophers (e.g. Aristotle and Zenon) worked on it (Akbulut & Akgün, 2005; Narlı & Narlı, 2012). On the other hand, it is accepted that the concept of infinity has gained a formal character thanks to studies of Cantor (Tsamir & Dreyfus, 2002).

It is clear that understanding of the concepts of Cantorian Set Theory are depend on many factors including readiness. Therefore, it can be seen that many studies in the mathematics education literature (e.g., Çelik & Akşan, 2013; Güven & Karataş, 2004; Jirotková & Litter, 2003; Kolar & Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala & Narlı, 2018; Singer & Voica, 2008; Tsamir, 1999) dealt with this issue in different contexts in terms of prospective teachers. On the other hand, it can be also said that these studies carried with prospective mathematics teachers are not mainly focused both the concept of countability and ~~the~~ proving activities. However, the countability is an important concept in set theory and proving activities can be used as an effective tool to assess understanding of this concept.

In the light of mentioned reasons, this study focused concept of countability, which compose a part of prospective teachers' understanding of the infinity concept, and it was aimed to examine their proof schemas in proving activities included this concept. The concept of proof scheme, which introduced by Harel & Sowder (1998), is referred to arguments that are used by individuals to convince themselves or others about trueness or falseness of a mathematical situation.

Method: Case study, which is one of qualitative research method, was used in this study. Also convenience sampling, which is one of the purposive sampling method, was preferred. For that purpose, this study was carried out with 100 sophomore prospective mathematics teachers studying at a state university. Before data collecting, a course including the subjects of Cantorian Set Theory was presented to participants by one of the researchers. This course lasted for 5 weeks and was recorded by using two cameras. After the course had finished a form including proving tasks about equivalence of infinity sets was developed and validated. In this study, it was focused to investigate prospective teachers' proof schemas related with countable sets, so the findings obtained from following questions were presented:

"Demonstrate that the combination of countably infinite number of countably infinite sets are countably infinite."

In the analysis process it was aimed to determine both prospective teachers' proof schemas and their proving approaches. To do that both descriptive analysis and content analysis, which are among qualitative analysis methods, were used together.

Findings: When the answers were examined it was determined that most of prospective teachers (%91) couldn't reach the formal proof. Also, it was seen that different proof schemas emerged in relation to proving process. Individuals, who reached the formal proof, could use *Cantorian Bijective Mapping Approach* by algebraic functions or explainable mappings. The proof schemes determined through analyzes and the general approaches adopted by the individuals with these schemes are presented in Table 1:

Table 1 Proof Schemes and Frequent Proving Approaches

Proof Scheme		Frequency	Proving Approach
External Conviction	*Authoritarian*	11	• Giving reference to an explanation of instructor • Re-constructing an example presented in the course before
	Ritual	9	• Creating a form in proof view
	Symbolic	12	• Creating an algebraic function • Creating an explainable mapping
Empirical Schemas	*Inductive*	36	• Testing the trueness of the theorem by forming examples
	Perceptual	15	• Making heuristic assumptions in algebraic operations • Making verbal explanations about trueness of the theorem
Analytical Schemas	*Transformational*	17	• Creating an algebraic function • Creating an explainable mapping • Making verbal explanations about trueness of the theorem
	Axiomatic	-	-

According to Table 1, it can be said that most of the prospective teachers (%51) have Empirical Proof Schemes and also Analytical Schema is the least observed (%17) proof scheme. In addition to these, “axiomatic” scheme which is one of Analytical Schemas was not encountered.

Discussion: When the findings of the study are taken into consideration, it can be interpreted that the concept of countability are not understood enough by prospective teachers. The fact that a significant part of the participants have external and empirical schemes supports this view. In mathematics education literature, there are studies emphasizing similar difficulties (such as misconceptions or heuristic approaches) of pre-service teachers' about the concept of infinity. (e.g., Çelik & Akşan, 2013; Güven & Karataş, 2004; Jirotková & Litter, 2003; Kolar & Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala & Narlı, 2018; Singer & Voica, 2008; Tsamir, 1999). It can be said that the findings of this study are parallel to the mentioned studies in many respects. In addition, this research supports the results of the studies (e.g., Narlı & Başer, 2008; Ünan & Doğan; 2011) that focused more particularly on the concept of countability.

According to the findings, it can be said that the prospective teachers can develop different proof schemes related to a theorem. In addition, it can be said that prospective teachers, who have same proof scheme, can adopt different proving approaches. On the other hand, when the study is taken into consideration as a whole, the general factors that prevent the prospective candidates from reaching the formal proof can be listed as follows: (i) misconceptions (ii) mistakes about mathematical language and notation (iii) Seeing the proof as a validation process and accepting the examples as equivalent to the proof (iv) Acceptance of intuitive deductions and informal approaches as evidence.

A more holistic view on the concept of mathematical proof can be developed through combining proof schemas with different theoretical frameworks such Proof Image (Kidron and Dreyfus, 2014).

Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılabilirlik Kavramına Yönelik İspat Şemalarının İncelenmesi

Ozan PALA [1], Serkan NARLI [2]

[1] Milli Eğitim Bakanlığı, İhsan Erturgut Ortaokulu, ozanpala@yahoo.com, https://orcid.org/0000-0002-8691-9979

[2] Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, serkan.narli@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8629-8722

Gönderme Tarihi : 12.10.2018 Kabul Tarihi : 08.12.2018

Doi: 10.17522/balikesirnef.506425

Özet - Bu çalışmada matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına dair yaklaşımlarının bir boyutunu oluşturan sayılabilirlik kavramına odaklanılmış ve bu kavrama ilişkin ispat şemalarının incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel türde ve betimsel olarak tasarlanan araştırmanın çalışma grubunu bir devlet üniversitesinde 2. sınıfa devam eden 100 matematik öğretmen adayı oluşturmuştur. Katılımcılar, Cantor Küme Teorisi'ne ait konuların ele alındığı bir ders sürecinde 5 hafta boyunca gözlemlenmiş ve sürecin sonunda sonsuz kümelerin denkliğine dair ispatlardan oluşan bir formda yer alan sorulara bireysel olarak yanıt vermişlerdir. Veriler hem betimsel analiz hem de içerik analizi ile incelenmiştir. Böylece hem sahip olunan ispat şemaları hem de belirli bir şemaya sahip olan bireylerin ispatlama yaklaşımları belirlenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının büyük kısmının birebir-örten eşleme yaklaşımına dayanan formel bir ispatı oluşturamadıkları görülmüştür. Ayrıca, bireylerin kavramsal anlayışları ile onların ispatlarında önemli bir boyutu oluşturan "ikna" bileşeni arasında önemli bir ilişkinin olduğu da belirlenmiştir. Ulaşılan bulgular, tablolar ve örnekler ile detaylandırılmıştır.

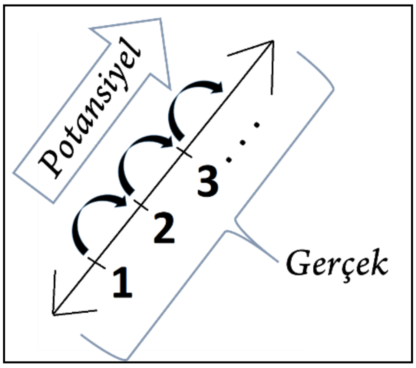
Anahtar Kelimeler: Sonsuzluk, Sayılabilirlik, İspat, İspat Şemaları, Matematik Eğitimi

----

Sorumlu Yazar: Ozan PALA, Milli Eğitim Bakanlığı

Giriş

Matematik tarihi incelendiğinde bazı kavramların gelişiminin diğerlerine göre daha sancılı olduğu görülebilir. Bunlardan biri olan "sonsuzluk" insanlığı uzun süre meşgul eden ve matematik bilimine buhranlı günler yaşatmış olan bir kavramdır (Yıldırım, 2016). Hem matematiğin hem de felsefenin ilgi alanına giren bu kavram, insanoğlunun zihnini zorlayan fikirleri içerisinde barındırmaktadır (İşleyen, 2013). Bu nedenle matematikçilerin uzun bir süre boyunca sonsuzluk ile uğraşmaktan kaçındıkları söylenebilir (Akbulut ve Akgün, 2005; Narlı ve Narlı, 2012). Öyle ki aritmetiğin pek çok alanı ile ilgilenmiş olan Pisagorcular'ın dahi sonsuzluk kavramı ile ilgilenmedikleri (Allen, 2000) ve hatta Gauss gibi bazı büyük matematikçilerin de sonsuzluğu mantıksız bir kavram olarak nitelendirdikleri bilinmektedir (Narlı ve Narlı, 2012). Bununla birlikte sonsuzluğu anlamlandırmak üzerine yapılan ilk çalışmaların Elalı Zenon (MÖ 490-430) ve Aristoteles (MÖ 384-322) gibi Antik Yunan felsefecilerine ait olduğu görülmektedir. Kavramının çelişkili yapısını ilk ortaya koyanlardan biri olan Zenon, sonsuzluğun var olması durumunda hareketin bir yanılgı olacağı fikrini ortaya atarak matematikçilerin yüzyıllar boyunca çözüm bulamayacağı bir çelişkiyi gözler önüne sermiştir (Akbulut ve Akgün, 2005). Bununla birlikte sonsuzluğu anlamak adına sunulmuş olan öncü sınıflamalardan biri de Aristoteles'in *potansiyel (potential) sonsuzluk* ve *gerçek (actual) sonsuzluk* fikirleri arasındaki ayrımı olarak bilinmektedir. Dubinsky, Weller, McDonald ve Brown'a (2005) göre "potansiyel" anlamda sonsuzluk daima devam eden bir süreç iken "gerçek" anlamda sonsuzluk ise bu potansiyel süreci kapsayan tek ve bütün bir nesnenin inşa edilebilmesidir. Örneğin, doğal sayıların ardı ardına eklenerek devam etmesi potansiyel bir süreci işaret ederken (Bozkuş, Uçar ve Çetin, 2015); bir doğru üzerine yer alan noktaların sayısı ise gerçek sonsuzluk fikrini içerisinde barındırmaktadır.



Şekil 1 Gerçek Sonsuz ve Potansiyel Sonsuz

Bununla birlikte Aristoteles, insan beyninin gerçek sonsuzluğu algılayamayacağını öne sürmüş ve bu nedenle sonsuzluğun ancak bir potansiyel olarak anlamlı olabileceğini ifade etmiştir (Dubinsky ve ark., 2005; Özmantar, 2010). Kavramın yapısal bir temele oturtulamayacağını açıkça ifade eden bu görüş, matematikçilerin sonsuzluğu bir nesne olarak görmekten kaçınmalarındaki kilit unsurlardan biri olarak yorumlanabilir (Tirosh, 1991). Sonsuzluğu matematiğin formal dünyasından dışlayan bu yaklaşım, "...bitmeyen süreçlerin bitmiş nesneler olarak ele alındığı gerçek sonsuzluk dünyasına adım atmaya çekinen" (Rucker, 1982) Leopold Kronecker (1823-1891) ve Henri Poincaré (1854-1912) öncülüğündeki matematikçilerin fikirlerinde açıkça gözlenebilmektedir. Felsefi açıdan "sezgici" bir yaklaşımı benimsemiş olan bu bilim insanlarının (Yıldırım, 2016) başı çektiği görüşün savunucularına göre sonsuzluğun matematiğe dâhil edilmesi sonucunda kimi tutarsız durumlar ortaya çıkabilmektedir. Örneğin, Gelileo Galilei (1564-1642) tarafından ilk olarak XVI. yy ‘da oluşturulan ve bir kümenin alt kümesi ile denk olabileceğini gösteren (Mamolo, 2009) aşağıdaki (bkz. Şekil 2) bijektif eşleme (birebir-örten) söz konusu tutarsızlıklardan biri olarak görülebilir:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 9 & \dots \end{array}}$$

Şekil 2 Galilei’nin Eşlemesi

Galilei, her tam kare sayının sadece bir kökü olabileceğini dikkate alarak bu eşlemenin bir paradoks doğurduğuna karar vermiştir. Bu nedenle sunulan eşleme literatürde Galilei Paradoksu olarak da bilinmektedir (Clark, 2002). O, ortaya koyduğu paradoksa formel bir çözüm önerememiş olsa da çalışmaları ile kendisinden sonra gelen Bolzano ve Cantor için bir zemin hazırlamıştır (Bozkuş, 2014). XVII. ve XVIII. yy’da fizik olaylarının açıklanması için geliştirilen “infinitesimal” (sonsuz küçük) kavramı ve devamında ilk defa Bolzano’nun (1871-1848) sonsuzluğu, sayı kavramını kullanmadan "*sonsuz küme*" şeklinde tanımlamayı başarması kavramın formel gelişimi açısından atılmış olan önemli adımlardandır (Akbulut ve Akgün, 2005). Bu gelişmelerin devamında, Dedekind‘in (1831-1916) sonsuz kümeler üzerine yaptığı çalışmaları devam ettiren (Pala ve Narlı, 2018) Rus asıllı Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) sonsuz kümeyi kendi öz alt kümelerinden en az biri ile bijektif eşlenebilen küme olarak tanımladığı modern küme teorisini ortaya koymuştur (Narlı ve Narlı, 2012). Bu nedenle sonsuzluk kavramının formel bir nitelik kazanmasının ve “gerçek sonsuzluk” fikrinin matematiğe girmesinin Cantor’un çalışmaları ile mümkün olduğu kabul edilmektedir (Tsamir ve Dreyfus, 2002). Cantor tarafından ortaya konan *Modern Küme Teorisi* ve özellikle bunun bir devamı olan *Sonlu Ötesi Sayılar Teorisi* bağlamında sonsuz kümeler “kardinal sayısı herhangi bir alt bölümünün kardinal sayısına denk olan küme” olarak tanımlanmakta (Ünan ve Doğan, 2011) ve sonlu ya da sonsuz iki kümenin denkliği aralarında tanımlanabilecek bijektif eşlemeler yardımı ile aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir:

$$A \sim B \Leftrightarrow \{f | f: A \to B, bijektif\} \neq \emptyset$$ (Güney ve Özkoç, 2015, s. 418)

Bu yeni denklik tanımından hareketle Cantor, kardinalite kavramını ve bunun devamı olarak da sonlu ötesi sayıları matematiğe kazandırmıştır (Pala ve Narlı, 2018). Ayrıca bu yeni teori ile birlikte kümelere getirmiş olduğu diğer önemli bir ayrım da sayılabilir (countable) ve sayılamaz (uncountable) kümeler arasındaki sınıflamadır (Özmantar, 2010). Cantor, doğal sayıların sayılabilirlik özelliğini dikkate almış (Özmantar, 2010) ve doğal sayılar ile bijektif eşlenebilen sonsuz kümelerin sayılabilir sonsuz olduğunu ifade etmiştir (Mamolo, 2009).

Sonsuzluk Kavramına "Pedagojik" Bir Bakış

Yukarıda sunulan açıklamalardan hareketle sonsuzluğun, öğretmen adaylarının XX.yy matematiğini anlamalarına ve özümsemelerine temel oluşturan önemli kavramlardan biri olduğu (Ünan ve Doğan, 2011) çıkarımı yapılabilir. Bununla birlikte Cantor Küme Teorisi ile ifade edilen kavramların bireyler tarafından anlamlandırılabilmesinin başta hazırbulunuşluk olmak üzere pek çok alt boyut ile ilişkilendirilebileceği söylenebilir. Bu nedenle matematik eğitimi literatüründe yer alan pek çok araştırmanın (ör., Çelik ve Akşan, 2013; Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979; Fischbein, 2001; Güven ve Karataş, 2004; Martin ve Wheeler, 1987; Monaghan, 2001; Narlı ve Narlı, 2012; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018; Tall, 1980; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir ve Dreyfus, 2002; Tsamir, 2001; Tsamir ve Tirosh, 1999) farklı düzeylerde bu konu üzerine eğildiği görülmektedir. Örneğin, Tall (1980) üniversite öğrencileri üzerinde limit kavramını kullanarak yaptığı çalışmanın sonucunda onların gerçek sonsuzluk fikrini yeterince düşünemediklerini belirlemiş ve bu durumun öğrencilerin sonsuzluğu ulaşılamayacak bir büyüklük olarak (potansiyel sonsuz) ele almalarından kaynaklandığını belirtmiştir. Tirosh ve Tsamir (1996) ise öğrencilerin sonsuz kümeleri karşılaştırmada verdikleri yanıtların belirli temsil biçimlerine göre (sayısal-yatay temsil, geometrik temsil vb.) çelişebileceği sonucuna ulaşmışlardır. Yazarlara göre yatay-sayısal temsil kullanıldığında öğrencilerin çoğu "bir küme ile alt kümesinin eleman sayısının eşit olamayacağı" sonucuna ulaşırken geometrik temsil kullanıldığında ise birçok birey bire-bir eşleme yaklaşımından yararlanarak "her kümedeki elemanların diğer kümedeki bir eleman ile eşlenebileceği" sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmaya ek olarak Tsamir ve Tirosh (1999) da öğrencilerin söz konusu iki temsil biçimine göre çelişen yanıtlarını kullanarak onların gerçek sonsuzluğa ilişkin yetersizliklerini fark etmelerini amaçlamış ve incelemeler sonucunda onların yanıtlarına genel olarak şu yaklaşımların rehberlik ettiğini belirlemişlerdir: (i) Bire-bir eşleme yaklaşımı (ii) Sonsuz kümelerin karşılaştırılamayacağı düşüncesi (iii) Tüm sonsuz kümelerin aynı sayıda elemana sahip olduğu düşüncesi (iv) Parça-bütün ilişkilerini dikkate alma yaklaşımı. Diğer bir çalışmada Tsamir (1999) öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırma süreçlerine odaklanmış ve Cantor küme teorisi ile ilgili ders almayan öğretmen adaylarında olduğu gibi bu dersi almış olan öğretmen adaylarının karar verme süreçlerinde dahi sezgisel yaklaşımın etkin olduğunu belirtmiştir. Pala ve Narlı (2018) ise öğretmen adaylarının ispatlarından hareketle onların sonsuz kümelerin denkliğini oluşturma süreçlerini incelemiş ve sonuç olarak *pre-formal* veya *formal* ispatların oluşturulabileceğini belirlemişlerdir.

Sonsuzluğa ilişkin ilk anlayışın "sonlu sayıda nesne içeren çokluklar" üzerindeki deneyimler ile şekillendiği açıktır (Tall, 2001). Bu nedenle, günlük hayattaki gözlem sonuçlarının sonsuz kümelere genellenmesinin, kavramın matematiksel gelişimi açısından önemli bir rol üstlendiği söylenebilir (Tall, 1980). Bu noktada Fischbein (2001) sonsuzluğun kavramsallaşma sürecini sezgisel açıdan yorumlamıştır. Söz konusu sezgiler eğitim öncesi informal yaşantılar yoluyla kazanılan birincil sezgiler ile eğitim yoluyla kazanılan ikincil sezgiler olarak sınıflanabilir ve bu iki sezginin kesişmesi bireyde tutarsızlıklara neden olabilir (Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979). Bu durum ise Fischbein (2001) tarafından sonlu gerçekliğe adapte olan şemaların sonsuzluk ile karşılaşması sonucunda çelişkili durumların ortaya çıkması şeklinde açıklanmaktadır. Ona göre potansiyel sonsuzluk fikri sezgiler ile çelişmediğinden bireyler tarafından anlamlandırılabilir ancak gerçek sonsuzluk fikrini içeren durumlar doğrudan sezgiler ile açıklanamayacağından bunların anlaşılması oldukça güçtür. Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde diğer pek çok çalışmada da (ör., Fischbein, Tirosh ve Hess, 1979; Güven ve Karataş, 2004; Monaghan, 2001; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018; Tirosh ve Tsamir, 1996) sezgisel yaklaşıma dair benzer bulgulara rastlandığı görülmektedir. Örneğin, Monaghan (2001) bireylerin sonsuzluğa ilişkin yaklaşımlarının "sürekli devam eden bir süreç" düşüncesi etrafında şekillendiğini ifade etmektedir.

Sunulan açıklamalar doğrultusunda sonsuzluk kavramının bireyler tarafından günlük yaşamda deneyimlenememesinin (Monoghan, 2001; Tall, 2001) ve doğrudan modellenememesinin (Pala, 2016) kavramın gelişimi açısından epistemolojik bir güçlük yarattığı yorumu yapılabilir. Bununla birlikte Alman matematikçi David Hilbert (1862-1943) tarafından ortaya atılan ve "*Hilbert'in Sonsuzluk Oteli*" olarak da bilinen aşağıdaki problem Cantor Küme Teorisi'nin içerdiği sonsuzluk fikrinin gerçek dünyaya uygulanmasına ilişkin bir örnek olarak ele alınabilir (Akbulut ve Akgün, 2005):

> Sonsuz sayıda odası olan ve boş yeri olmayan Büyük Otel'in yöneticisi olduğunuzu düşünün. Eğer her odada sadece bir kişinin kalmasına izin verilirse, yeni ve çok önemli bir konuğa şahsi bir odada nasıl yer verebilirsiniz? (Mamolo ve Zazkis, 2008)

Sayılabilir sonsuz kümelerin özelliklerini anlamayı gerektiren bu probleme verilebilecek yanıtların; matematiksel bilgi düzeyi başta olmak üzere, sonsuzluğa ilişkin anlayış ve sezgilere bağlı olarak farklılık göstereceği düşünülebilir. Örneğin sonsuzluğu bir potansiyel olarak gören bireyin, Hilbert Oteli Problemi'ne sezgisel bir anlayış doğrultusunda "süreç" bakış açısı ile yaklaşabileceği söylenebilir. Diğer yandan sonsuzluğu bir "nesne'' olarak gören bireyin ise aynı probleme Cantor yaklaşımı ile "elemanlar, kümeler ve fonksiyonlar" gibi matematiksel bileşenleri kullanarak daha yapısal bir çözüm getirmeye çalışabileceği düşünülebilir. Ancak her iki durumda da bireylerin söz konusu probleme çözüm getirdiklerine ikna olmalarını sağlayan yapıların ortaya çıkarılmasının, onların sonsuzluk kavramına ilişkin anlayışlarını daha derin analiz etmeye olanak sağlayabileceği açıktır. Bireylerin benzer gerekçelendirme süreçlerinde ulaştıkları sonuçları değerlendirerek bunların doğruluğunu ya da yanlışlığını belirleyebilmeleri matematiksel düşünmenin "ispat" kolu ile ilişkilendirilebilir (Pala ve Narlı, 2018).

Matematiksel İspat ve İspat Şemaları

İspat becerisi hem matematikçiler hem de matematik eğitimcileri için önemli bir aktivitedir (Alcock ve Weber, 2005). Çünkü ispatlar sayesinde hem bir önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı gösterilebilir hem de bunun nedeni açıklanabilir (Hanna, 2000; Tall, 1998). Bu açıdan bakıldığında ispatlar matematiksel bilgilerin içselleştirilmesini sağlayan temel mekanizmalardan biri olarak görülebilir. Bununla birlikte üniversite düzeyindeki bireylerin ispatın bileşenlerini belirleme ve bunu oluşturma konusunda güçlükler çektiği bilinmektedir (Jones, 2000). Örneğin Sarı, Altun ve Aşkar (2007) matematik öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde dışsal gerekçelere veya deneysel sonuçlara bağlı gerekçelere bağlı kaldıklarını ifade etmişlerdir. Moore (1994) ise üniversite öğrencilerinin matematiksel dil çerçevesinde düşüncelerini doğru biçimde sunamadıkları için ispatı oluşturamadıklarını belirtmiştir. Bununla birlikte Antonini ve Mariotti (2007) ispat yöntemlerinin etkili biçimde kullanılamadığını belirtirken Powers, Craviotto ve Grassl (2010) ise üniversite öğrencilerinin ispat içerisindeki anahtar noktaları belirleyemediğini ve dolayısı ile kendilerine sunulan bir ispatı değerlendiremediklerini ifade etmiştir. İspat becerisi ile ilgili benzer güçlüklere dair örneklere literatürde sıklıkla rastlanmaktadır (ör., Doruk ve Kaplan, 2017; Dreyfus, 1999; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Pala, 2016; Weber, 2006). Diğer yandan ileri düzey matematikte kanıt oluşturma oldukça önemli bir beceri olarak görüldüğünden öğrencilerin ispatlarının anlaşılabilmesi için onların ispatlama süreçlerinin incelenmesi gerektiği söylenebilir (Weber, 2001). İspatlama sürecine yön veren önemli bir bileşenin "ikna" olduğu düşünüldüğünde, kavramsal anlayışın ve ispat yaklaşımlarının daha iyi analiz edilebilmesi için

"İspat Şeması" çerçevesinden yararlanılabileceği düşünülebilir. Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konan ispat şeması kavramı, bireylerin matematiksel bir durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına ilişkin kendilerini ya da başkalarını ikna etmede kullandığı argümanlardır. Bu çerçevede yazarlar ispat şemalarının Şekil 3'de yer alan kategoriler ile sınıflanabileceğini ifade etmişlerdir:

İspat Şemaları (Harel & Sowder, 1998)

Dışsal Şemalar	Deneysel Şemalar	Analitik Şemalar
Ritüel İspat Şeması: Bir iddianın doğruluğu ya da yanlışlığı araştırılırken ispatın altında yatan nedenlerden çok biçimsel nedenlerden (*alışılagelmiş formlardan ve görünümden*) etkilenerek karar verilmesidir.	**Tümevarımsal İspat Şeması:** Bir önerme ispatlanırken bir veya daha fazla örnek durum için bu önermenin doğru olduğunun gösterilmesidir. Yani, önermenin sonlu sayıda durum için doğru olduğunun belirlenmesinin ile tüm durumlarda doğru olacağı genellemesinin yapılmasıdır.	**Dönüşümsel İspat Şeması:** Bu şemaya bireyler tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünme biçimlerinden yararlanabilirler ve özel örneklerin ötesine geçerek genellemeye ulaşırlar. Bu bireylerin ispatlama aktivitelerinde değişkenler ve inşa ettikleri diğer oluşumlar üzerinde manipülasyonlar yapmaları beklenir.
Otoriter İspat Şeması: Bireyin ispatın doğruluğuna karar verirken kişisel düşüncelerinden çok kendisi dışında kalan kitap ya da öğretmen gibi otoriteleri dikkate alarak karar vermesidir.	**Algısal İspat Şeması:** Algısal gözlemler yeterince olgunlaşmamış zihinsel imajlar aracılığı ile gerçekleştirilir. Yani birey iddianın doğru olduğunu sezebilir ancak beklenenin aksine bunu formal olarak tam ve doğru şekilde dönüştüremez.	**Aksiyomatik İspat Şeması:** Bu ispat şemasına sahip öğrenciler bir matematiksel gerekçelendirmenin başlama noktasının tanımsız terimler ve aksiyomlar olduğunun farkındadırlar ve böyle bir sistemde rahat biçimde çalışabilme yetisine sahiptirler.
Sembolik İspat Şeması: Bireyin ispat sürecinde sembolleri matematiksel anlamlarından uzak kullanmasıdır.		

Şekil 3 İspat Şemaları (Harel ve Sowder, 1998)

Problem Durumu

Sonsuzluk kavramının içerdiği alt boyutlar dikkate alındığında inceleme açısından çok geniş bir alan sunduğu söylenebilir. Matematik eğitimi literatüründe öğretmen adaylarının sonsuzluk algılarına (ör., Çelik ve Akşan, 2013; Jirotková ve Littler, 2003; Kolar ve Čadež, 2012; Maria, Thanasia ve Katerina, 2009; Sbaraglı, 2006) ve sonsuzluk sezgilerine (ör., Güven ve Karataş, 2004; Pala, 2016; Tsamir, 1999) odaklanan farklı çalışmalar bulunduğu görülmektedir. Bununla birlikte söz konusu çalışmaların çoğunlukla ispatlama aktivitelerine doğrudan odaklanmadığı da söylenebilir. Ayrıca literatür açısından önemli eksiklik de sonsuzluğun önemli alt boyutlarından biri olan "sayılabilirlik" kavramına yeterince yer verilmemiş olmasıdır. Oysaki bu kavram, küme teorisinde farklı sonsuzların ortaya konması açısından önemli bir kavramdır (Aztekin, 2013) ve bu nedenle öğretmen adayları tarafından nasıl anlamlandırıldığının belirlenmesi gerekmektedir.

Yukarıda sayılan sebepler ışığında, bu çalışmada öğretmen adaylarının sonsuzluğa dair anlayışlarının bir boyutunu oluşturan “sayılabilirlik” kavramına odaklanılmış ve bu kavramı içeren ispatlama aktivitelerindeki ispat şemalarının incelenmesi amaçlanmıştır. Farklı ispat yaklaşımlarına uygun ve esnek bir çerçeve sunan sayılabilirlik kavramının, ispat şemaları açısından zengin bir içerik sağlayabileceği düşünülmüştür. Burada ispatlama aktiviteleri ise “*kavrama dair anlayışı açığa çıkarmada*” uygun bir araç olarak değerlendirilmiştir. Çünkü ispat sürecini gerçekleştiren bir bireyin problem durumunu analiz ederek veriler arasında hipotezler kurması ve bunları test ederek mantıksal düşünme adımlarını gerçekleştirmesi gerekmektedir (Turğut, Yenilmez ve Uygan, 2013). Yapılacak çalışmalar sonucunda bireylerin yaklaşımlarında önemli bir boyutu oluşturan “ikna” bileşeninin anlamlandırılmasının ve böylece sayılabilirlik kavramına dair anlayışlarının açığa çıkarılmasının mümkün olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca bu sayede öğretmen adaylarının ispat yapabilme becerilerine odaklanan diğer çalışmaların (ör., Güler ve Ekmekçi, 2016; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Moore, 1994; Pala ve Narlı, 2018; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) sonuçlarına da katkı sağlanabilmesi hedeflenmiştir. Sayılan tüm bu sebepler doğrultusunda bu çalışmanın problemi “Matematik öğretmen adaylarının sayılabilir kümeleri içeren ispatlama aktivitelerinde oluşturdukları ispat şemaları nasıldır?*”* olarak belirlenmiştir.

Yöntem

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramını içeren durumlardaki ispat şemalarının belirlenmesi amaçlandığından nitel araştırma yaklaşımlarından “durum çalışması” deseni benimsenmiş ve bununla birlikte betimsel tarama modeli kullanılmıştır. Durum çalışmaları incelenen olguyu “niçin ve nasıl” soruları ile açıklama yeteneğine sahiptir (Yin, 2009). Bu bağlamda McMillan (2000) durum çalışmalarını birbirlerine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Bu yöntemde bilinmeyen bir gerçek keşfedilebilir ya da bir durum detaylı bir şekilde tanımlanabilir. Bununla birlikte durum çalışmalarından elde edilen sonuçların farklı özelliklere sahip durumlar için genellenmesi söz konusu değildir (McMillan, 2000). Diğer yandan bu çalışmanın betimsel boyutunda tarama modelinden yararlanılması uygun görülmüştür. Çünkü betimsel araştırmalarda verilen bir durum olabildiğince eksiksiz şekilde tanımlandığından (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2018) tarama modeli eğitim çalışmaları açısından elverişli bir yapı ortaya koymaktadır. Tarama modellerinde herhangi bir etkileme çabası güdülmeksizin bireyler ya da nesneler kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır (Karasar, 2007). Dolayısı ile bu tarz çalışmalarda bilimin tasvir işlevi ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Çalışma Grubu

Araştırma sürecinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesi tekniği (convenience sampling) tercih edilmiştir. Bu amaçla bir devlet üniversitesinde matematik eğitimi anabilim dalında öğrenim gören ve ikinci sınıfa devam eden 100 matematik öğretmen adayı ile çalışma çalışmanın gerçekleştirilmesi uygun görülmüştür. Sonsuzluk kavramını yoğun olarak içeren derslerin (Seçmeli I Mantık ve Analiz I) ikinci sınıfta işlendiği dikkate alınarak bu sınıf düzeyi tercih edilmiştir. Çalışmaya katılan bireyler araştırma öncesinde ispat temelli derslerden Genel Matematik ve Soyut Matematik derslerini tamamlamışlardır. Bununla birlikte araştırmanın gerçekleştirildiği dönemde de Seçmeli I Mantık, Lineer Cebir I ve Analiz I derslerini almaya devam etmişlerdir.

Veri Toplama Araçları ve Süreç

Veri toplama süreci öncesinde, araştırmacılardan biri tarafından Seçmeli I (Mantık) dersi öğretmen adaylarına bir dönem boyunca sunulmuş ve onların süreç öncesi hazırbulunuşlukları sağlanmıştır. Soyut Matematik dersinin devamı nitelinde olan bu ders başta eşgüçlülük kavramı olmak üzere sayılabilirlik, sayılamazlık ve kardinalite kavramları ile bunların uygulamalarını içermektedir. Toplamda 5 hafta süren ders süreci iki farklı kamera ile kaydedilmiştir. Konuların tamamlanmasının ardından öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ispatlama yaklaşımlarının belirlenebilmesi için açık uçlu dört sorudan oluşan bir ispat forumu geliştirilmiştir. Kapsam ve görünüş geçerliğinin sağlanabilmesi için uzman görüşünden faydalanılmıştır. Form üst düzey bilişsel becerilere odaklandığından soru sayısı sınırlı tutulmuştur. Ayrıca soruların Seçmeli I (Mantık) dersi içerisinde yer alan küme, fonksiyon, sonsuzluk, sınırsızlık ve sayılabilirlik gibi kavramları içerecek şekilde oluşturulmasına özen gösterilmiştir. Diğer yandan sunulan bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılabilir kümelere ilişkin ispat şemalarının belirlenebilmesine odaklanılmış ve bu nedenle aşağıdaki soruya ilişkin analizlerden elde edilen bulgular paylaşılmıştır:

"Sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi de sayılabilir sonsuzdur, gösteriniz."

Yukarıda sunulan sorunun, "sayılabilirlik" konusuna ilişkin alt kavramlar ile bunlar arasındaki ilişkileri çok boyutlu olarak incelemeye olanak sağlayabileceği uzman görüşü ile belirlenmiştir. Çalışmanın ana veri kaynağını bu soruya verilen yazılı cevaplar oluşturmaktadır.

Bununla birlikte bazı cevapların detaylandırılabilmesi için gözlem verilerinden de yararlanmıştır.

Verilerin toplanmasının ardından inceleme sürecine geçilmiştir. Analiz sürecinde hem öğretmen adaylarının ispat şemalarının hem de ispatlama yaklaşımlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bunun için nitel analiz yöntemlerinden betimsel analiz ve içerik analizi yöntemleri bir arada kullanılmıştır. İlk olarak öğretmen adaylarının sayılabilir kümeler bağlamındaki ispatları Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konan ispat şemaları ile çerçevesi bağlamında yorumlanmıştır. Bunun için betimsel analiz yöntemine başvurulmuştur. Bu yaklaşımda, veriler önceden belirlenen temalara göre özetlenerek yorumlanır ve daha sonra neden-sonuç ilişkileri irdelenerek birtakım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Diğer yandan katılımcıların ispat şemalarına göre dağılımının oluşturulmasının ardından sonra her bir şema kendi içerisinde incelenmiş ve öğretmen adayları tarafından kullanılan ispatlama yaklaşımları içerik analizi ile belirlenmiştir. Yıldırım ve Şimşek'e (2013) göre içerik analizi ile veri grubunu açıklayacak genel kavram ve ilişkileri açıklayan temaların oluşturulması beklenir. Bu sayede öğretmen adaylarının ispatlarında hâkim olan temel yöntemler kategorileştirilebilmiştir. Bu aşamada kodlayıcılar arasındaki güvenilirlik yaklaşık %90 olarak hesaplanmıştır. Tüm bu işlemlerin sonucunda öğretmen adaylarının ispat şemaları ile her bir şemada kullanılan ispatlama yaklaşımlarının karşılaştırılması mümkün olmuştur.

Bulgular ve Yorum

Bu bölümde, öğretmen adaylarının ispatlarının Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konan ispat şemaları bağlamında incelenmesinden edinilen bulgular sunulacaktır. Soruya verilen yanıtlar incelendiğinde öğretmen adaylarının büyük bir bölümünün (%91) formel ispata ulaşamadığı belirlenmiştir. Ayrıca ispat sürecine ilişkin farklı şemaların ortaya çıktığı görülmüştür. Bununla birlikte formal ispatı oluşturabilen bireyler ise Cantor tarafından ortaya konan bijektif eşleme yaklaşımını izah edilebilir eşlemeler ya da kurallı fonksiyonlar ile kullanabilmişlerdir. Analizler sonucunda belirlenen ispat şemaları ve bu şemalara sahip bireylerin benimsedikleri genel yaklaşımlar aşağıda yer alan Tablo 1'de sunulmuştur:

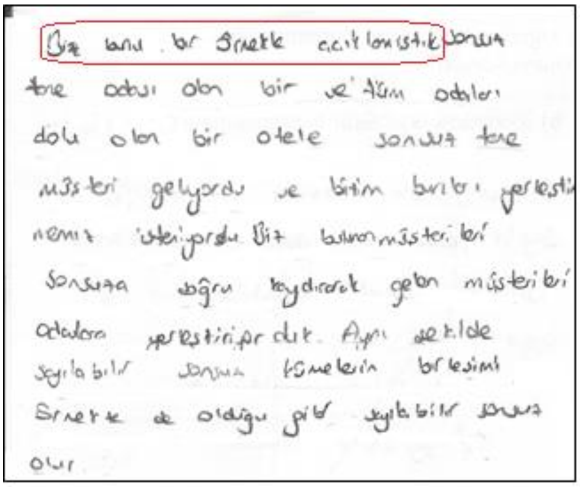
Tablo 1 İspat Şemaları ve Sık Gözlenen Yaklaşımlar

	İspat Şeması	Frekans	Gözlenen İspat Yaklaşımları
Dışsal İspat Şemaları	*Otoriter*	11	• Öğretim elemanının bir açıklamasını referans gösterme • Derste sunulan bir örneği tekrar oluşturma
	Ritüel	9	• İspat görünümünde bir form oluşturma
	Sembolik	12	• Kurallı cebirsel bir fonksiyon oluşturma • İzah edilebilir bir eşleme oluşturma
Deneysel İspat Ş.	*Tümevarımsal*	36	• Örnekler oluşturarak teoremin doğruluğunu test etme
	Algısal	15	• Cebirsel işlemlerde sezgisel kabullerde bulunma • Teoremin doğruluğu ile ilgili sözel açıklamalarda bulunma
Analitik İspat Şemaları	*Dönüşümsel*	17	• Kurallı cebirsel bir fonksiyon oluşturma • İzah edilebilir bir eşleme oluşturma • Teoremin doğruluğu ile ilgili sözel açıklamalarda bulunma
	Aksiyomatik	-	-

Sunulan tabloya göre öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun (%51) Deneysel İspat Şeması'na sahip olduğu ve bununla birlikte Analitik İspat Şeması'nın en az gözlenen (%17) ispat şeması olduğu söylenebilir. Diğer yandan yapılan analizlerde analitik ispat şemalarından "aksiyomatik ispat şemasına" rastlanılmamıştır. İspat şemalarının alt kategorileri ile ilgili örnekler ve açıklamalar aşağıda detaylı olarak paylaşılacaktır.

Dışsal İspat Şemaları

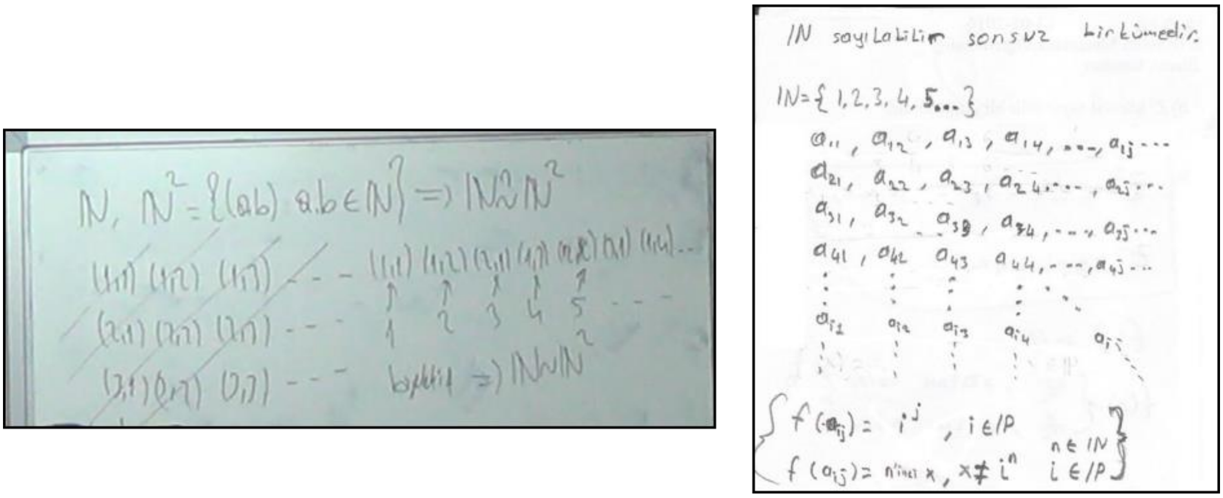
Analizler sonucunda öğretmen adaylarının %32'lik bölümünün dışsal ispat şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu şemaya sahip bireylerin, bir iddianın altında yatan sebepleri araştırmak yerine kendilerini ikna edecek sebepleri dışsal kaynakların arayışına girdikleri söylenebilir. Bu kategorilerden ilki olan Otoriter İspat Şeması, katılımcıların %11'inde gözlenmiştir. Söz konusu şemaya sahip bireylerin, yanıtlarında genel olarak öğretim elemanının dersteki açıklamalarını veya örneklerini tekrarladıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından birinin yaklaşımı aşağıda yer alan Şekil 4 'te sunulmuştur.


Biz bunu bir örnekle açıklamıştık sonsuz
tane odası olan bir ve tüm odaları
dolu olan bir otele sonsuz tane
müşteri geliyordu ve bizim bunları yerleşti-
remiz [illegible] bir bulunan müşterileri
sonsuza doğru kaydırarak gelen müşterileri
odalara yerleştiriyorduk. Aynı şekilde
sayılabilir sonsuz kümelerin birleşimi
örnekte de olduğu gibi sayılabilir sonsuz
olur

Şekil 4 Otoriter İspat Şemasına Bir Örnek

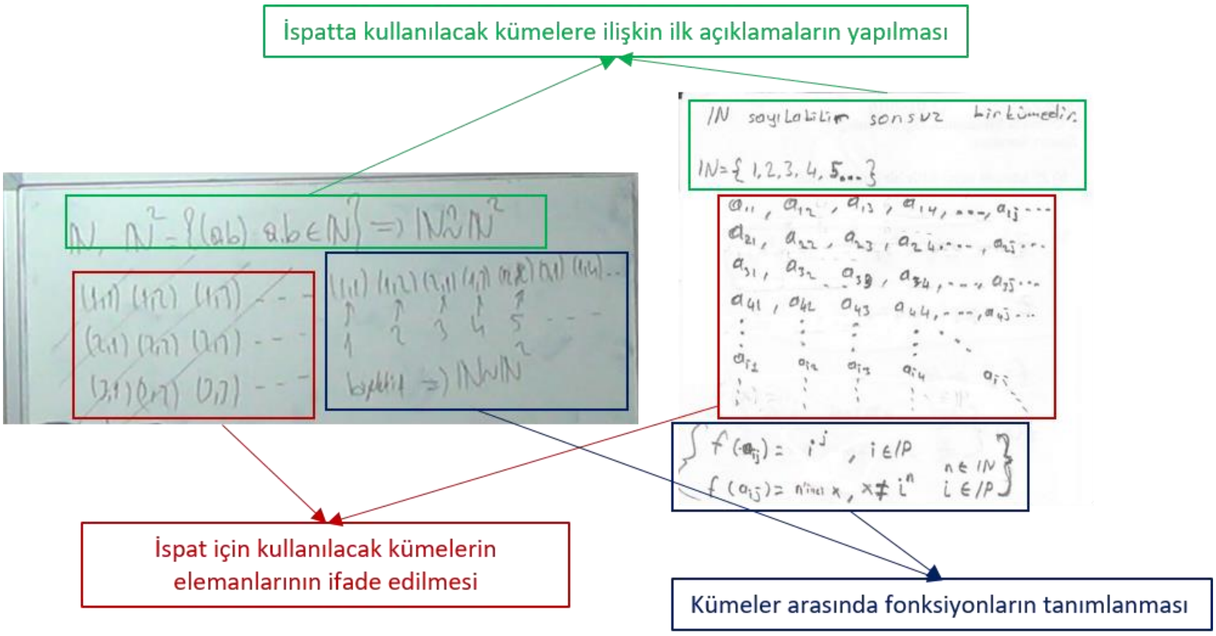
Bu öğretmen adayının, öğretim elemanı tarafından ders içerisinde daha önceden sunulmuş olan Hilbert Oteli Analojisini yorumlamadan doğrudan bir argüman olarak kullandığı ve yaptığı bu sözel açıklamayı ispata eşdeğer tuttuğu yorumu yapılabilir. Dolayısı ile bu öğretmen adaylarının ispatlarında "ikna" olmalarını sağlayan temel faktörün, kendilerinden daha uzman olarak gördükleri bilgi kaynaklarından yaptıkları "aktarımlar" olduğu söylenebilir. Çünkü bu bireyler, kurdukları ilişkilerin neden doğru olduğunu açıklamaksızın olduğu gibi "aktarımda bulunmayı" yeterli görmüşlerdir.

Bununla birlikte bazı öğretmen adaylarının da ispat sürecine biçimsel açıdan yaklaştıkları belirlenmiştir. Ritüel İspat Şeması'na sahip oldukları değerlendirilen ve çalışma grubunun %9'luk kısmını oluşturan bu bireylerin tamamının ders sürecinde öğretim elemanı tarafından sınıfta oluşturulan ispatın biçimsel formuna olarak benzer yapıda bir ispat oluşturma çabasına girdikleri belirlenmiştir. Ders sürecinde öğretim elemanı tarafından sınıfta sunulan ispatlardan biri ile biçimsel olarak bu tarzda oluşturulan yanıtlardan biri aşağıda yer alan Şekil 5'de sunulmuştur:



Şekil 5 Öğretim Elemanı ve Öğretmen Adayı Tarafından Oluşturulan İki Farklı İspat

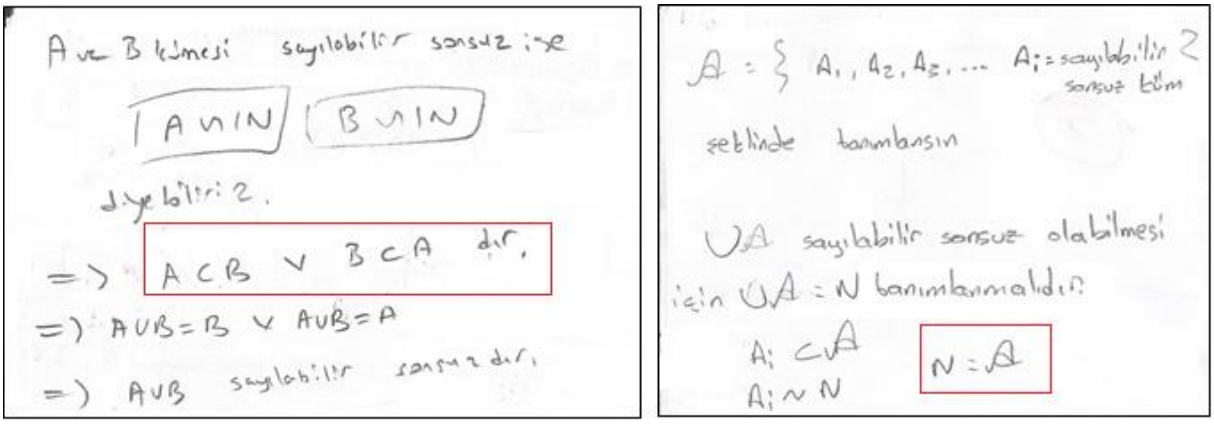
Sunulan iki örnek incelendiğinde, öğretmen adayının derste aşinalık kazandığı ispat biçimini bir ritüel (alışkanlık) olarak gördüğü yorumu yapılabilir. Bu iki ispat karşılaştırıldığında gözlenen biçimsel benzerlikler aşağıda yer alan Şekil 6'da ifade edilmiştir:



Şekil 6 Öğretim Elemanı ile Öğretmen Adayının İspatlarındaki Biçimsel Benzerlik

Bu noktada, öğretmen adayının seçtiği kümeler arasındaki denkliği gösterebilmek için fonksiyon kavramından yararlanması gerektiğinin bilincinde olduğu sonucuna ulaşılabilir. Diğer yandan bu fonksiyonun kümeler arasında nasıl tanımlanacağı ya da hangi özellikleri sağlaması gerektiği yeterince dikkate alınmamıştır. Buradan hareketle söz konusu öğretmen adayının ispatta bulunması gereken bir takım unsurları belirlediği (elemanlar, kümeler ve fonksiyonlar vb.) ve bunları bir akış yansıtacak görünüm altında sunarak ispatı tamamladığını varsaydığı söylenebilir. Diğer yandan kullandığı kavram ve semboller arasında herhangi bir bağlantı kurmamış ve bunlara dair bir açıklama da sunmamıştır. Örneğin ispatta olması gerektiğini düşündüğü çok değişkenli fonksiyonun işlevinin veya anlamının ne olduğu ifade edilmemiştir. Bu sebeplerle ispatlama aktivitesine, fonksiyon oluşturulması gereken bir süreç alışkanlığı ile yaklaştığı ve kendisini "ikna" eden temel faktörün de ispatın biçimsel görünümü olduğu yorumu yapılabilir.

Son olarak yapılan analizlerde bazı öğretmen adaylarının da matematiksel sembollerin, tanımların ve algoritmaların biçimsel özelliklerine odaklanmamakla birlikte bunları anlamlarından uzak ve hatalı biçimde kullanarak ispatı oluşturmaya çalıştıkları gözlenmiştir. Çalışma grubunun %12'lik kısmını oluşturan ve Sembolik İspat Şeması'na sahip oldukları belirlenen bu bireylerin teoremde yer alan kavram ve ilişkileri yeterince kavrayamadıkları söylenebilir. Bu öğretmen adaylarından ikisinin vermiş olduğu yanıtlar aşağıda yer alan Şekil 7'de sunulmuştur:

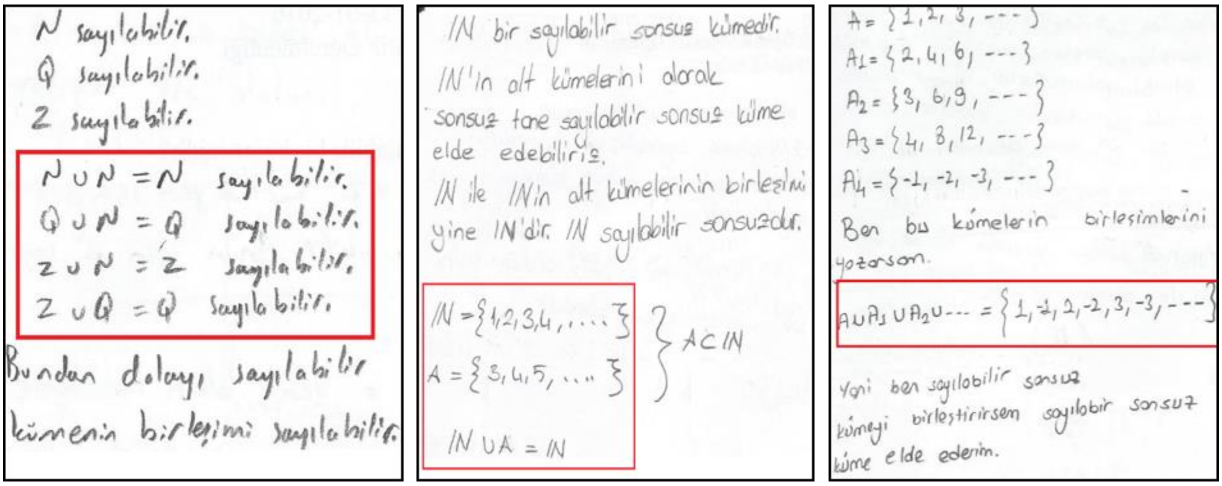


Şekil 7 Sembolik İspat Şeması'na İlişkin Örnekler

Sunulan yaklaşımları kullanan bireyler, denklik kavramının içerdiği ilişkileri veya bu ilişkileri ifade eden matematiksel sembolleri hatalı olarak kullanmışlardır. Şekil 7'de bulunan birinci ispatı (sol taraftaki) oluşturan birey iki kümenin sayılabilir olması durumunda birbirlerinin alt kümesi olması gerektiği sonucuna varmıştır. Şekil 7'de bulunan ikinci ispatı (sağ taraftaki) oluşturan birey ise sayılabilir sonsuz kümelerden oluşan bir ailenin birleşiminin doğal sayılara eşit olması gerektiği çıkarımında bulunmuştur. Bir önceki ispat şemasından farklı olarak bu şemaya sahip bireyler ispatın biçiminden çok içeriğine odaklanmışlar ve bu sebepler düşüncelerinin altında yatan nedenleri sözel ya da sembolik temsiller ile açıklama ihtiyacı hissetmişlerdir. Ancak ispatlar, matematiksel kavram ve sembollerin anlamlarına yeterince odaklanılmadan inşa edilmiştir. Eşgüçlülük konusu çerçevesinde oluşturulan ispatlarda bazı kavramlara (küme, alt küme, fonksiyon, küme işlemleri, sayılabilirlik, kardinalite vb.) ve bazı sembollere ($\cup,\cap,\subset,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\in,\sim$ vb.) daha sık ihtiyaç duyulduğu dikkate alındığında; söz konusu öğretmen adaylarının ispatlarında “ikna” olmalarını sağlayan temel faktör, diğer bilgi kaynaklarında sıkça kullanılan kavram ve sembollere kendi ispatlarında yer vermiş olmaları ile açıklanabilir.

Deneysel İspat Şemaları

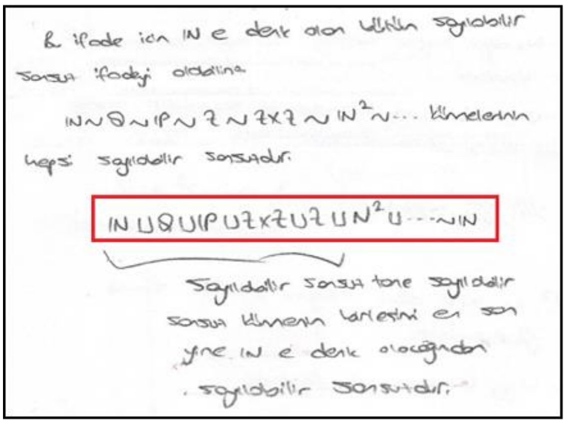
Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının büyük bölümünün (%51) deneysel ispat şemalarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu öğretmen adaylarının ikna süreçlerine rehberlik eden temel faktörlerin sayılabilir kümeler kullanılarak oluşturulan örnekler ve sayılabilir kümelerin denklik ilişkilerine yönelik sezgisel kabuller olduğu görülmüştür. Söz konusu kategorilerden ilki olan Tümevarımsal İspat Şeması, tüm çalışma grubu içerisinde en çok gözlenen şema (%36) olarak belirlenmiştir. Bu şemaya sahip öğretmen adaylarının, söz konusu problemi ispatlamak için örnekler oluşturmayı tercih ettikleri ve sonlu sayıda örnek durumu ispat için yeterli kabul ettikleri görülmüştür. Bununla birlikte oluşturulan örneklerin de nitelik açısından farklılık gösterdiği söylenebilir. Çünkü bazı öğretmen adayları teoremin doğruluğunu gösteren “doğru” örnekler oluşturabilirken bazıları ise bunu başaramamıştır. Örneğin, öğretmen adaylarından bazıları sonlu sayıda sayılabilir kümeye odaklanmış ve bunların birleşiminin sayılabilir olmasından hareketle teoremi kanıtladıklarını ifade etmişlerdir. Bahsedilen yaklaşımlardan bazıları aşağıda yer alan Şekil 8’de sunulmuştur:

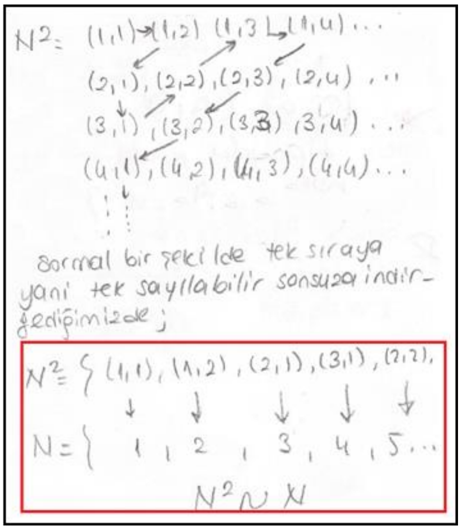


Şekil 8 Sonlu Sayıda Kümeyi Dikkate Alanlar

Oysaki ispatı istenen teoremin “sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz küme” arasındaki ilişkiye odaklandığı ve bu nedenle yukarıda yer alan yaklaşımların teoremin doğruluğuna dair uygun örnekler sunmadığı sonucuna ulaşılabilir.

Buna ek olarak, teoremin içerdiği ilişkilerin doğru biçimde yorumlanması ile oluşturulan “doğrulayıcı” örneklerin ise karmaşıklık açısından farklı düzeylerde oldukları belirlenmiştir. Söz konusu örneklerden ikisi aşağıda yer alan Şekil 9‘da sunulmuştur:



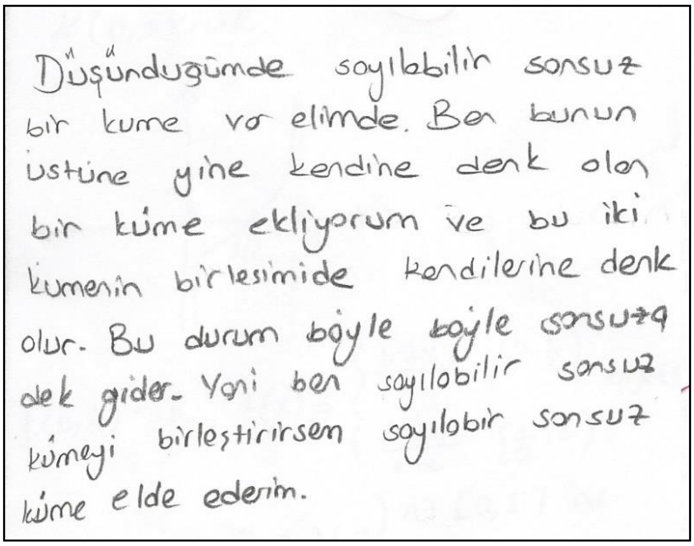


Şekil 9 Teoremi Doğrulayan Farklı Karmaşıklıktaki İki Örnek

Sunulan örnekleri oluşturan öğretmen adaylarının yaklaşımları incelendiğinde genel bir sonuca özel örneklerden hareketle ulaşmaya çalıştıkları söylenebilir. Bununla birlikte birinci öğreğin (sol tarafta) ikinci örneğe (sağ tarafta) kıyasla teoremin özünde yatan ilişkileri daha az açıklayıcı olduğu yorumu da yapılabilir. Çünkü sağ taraftaki örneği oluşturan birey $\mathbb{N}^2$ kümesinin, her biri sonsuz elemandan oluşan sonsuz satırdan oluştuğunu dikkate almış ve bu kümeyi oluşturan sıralı ikililerin uygun bir dizilimini (köşegen eşleme yaklaşımı ile) oluşturarak $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile bijektif eşlemeyi başarabilmiştir. $\mathbb{N}^2$ kümesinin bu gösterimi sayılabilir sonsuz tane sayılabilir sonsuz kümeyi içerisinde barındırdığından, oluşturulan örneğin teoremin özündeki ilişkileri açıklayıcı nitelikte olduğu söylenebilir. Ancak burada, $\mathbb{N}^2$ kümesi teoremin doğruluğunu gösteren özel bir delil olmaktan öteye geçememektedir. Dolayısı ile tüm kümeleri kapsayıcı genel bir ilişkinin ortaya konamadığı ve ispatın formel olarak oluşturulamadığı yorumu yapılabilir.

Yapılan analizler sonucunda bazı öğretmen adaylarının ise teoremin doğruluğunu gösterebilmek için sezgisel kabullere dayalı bir yaklaşımı benimsedikleri belirlenmiştir. Algısal

İspat Şeması'na sahip oldukları belirlenen ve çalışma grubunun %15'lik bölümünü oluşturan bu bireylerden birinin yaklaşımı örnek olarak aşağıda yer alan Şekil 10'da sunulmuştur:

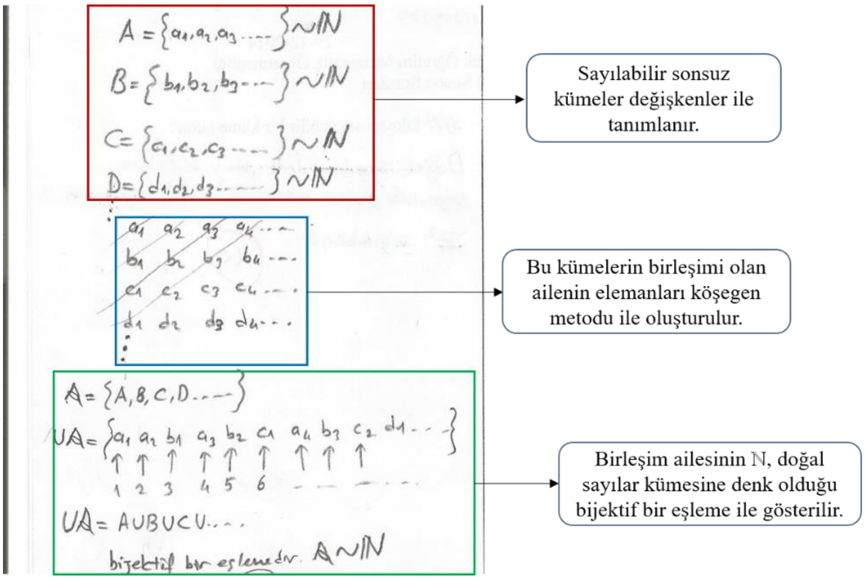

Düşündugümde sayılbilir sonsuz bir kume var elimde. Ben bunun üstüne yine kendine denk olan bir küme ekliyorum ve bu iki kümenin birlesimide kendilerine denk olur. Bu durum böyle böyle sonsuza dek gider. Yani ben sayılabilir sonsuz kümeyi birleştirirsem sayılabir sonsuz küme elde ederim.

Şekil 10 Algısal İspat Şeması'na Sahip Öğretmen Adaylarından Birinin Yaklaşımı

Sunulan örnek incelendiğinde, öğretmen adayının öncelikle sayılabilir sonsuz iki kümenin birleşiminin sayılabilir olduğunu sözel temsiller ile açıklamaya çalıştığı ve bunun devamında sezgisel bir genelleme ile teoremin daima geçerli olacağı varsayımına ulaştığı yorumu yapılabilir. Bu nedenle benzer yaklaşımları benimseyen öğretmen adaylarının sezgileri ile teoremi doğrulayabildikleri ancak bunu formal matematiksel bir yapı içerisinde bunu ifade edemedikleri sonucuna ulaşılabilir.

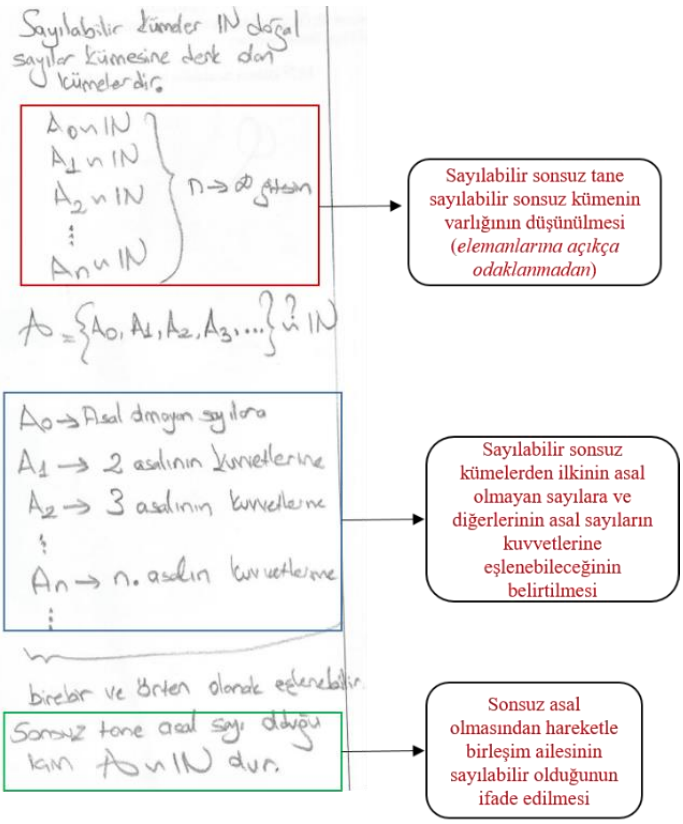
Analitik İspat Şemaları

Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının %17'lik bölümünün Analitik İspat Şeması'na sahip oldukları belirlenmiştir. Söz konusu şemaya sahip öğretmen adaylarının çıkarımsal düşünme biçimine sahip oldukları ve yaklaşımlarını kabul edilebilir mantıksal önermeler yolu ile yapılandırabildikleri görülmüştür. Diğer yandan bu çalışmanın katılımcıları arasında "*aksiyomatik*" ispat şemasına sahip birey bulunmamaktadır. Başka bir ifade ile katılımcıların hiçbiri tanımsız kavramlar ve aksiyomlar ile başlatılan bir ispat sürecini yürütmemişlerdir. Formal ispata ulaşabilen (%9) öğretmen adaylarının tamamının bilinen aksiyomları ve yardımcı teoremleri temel alan tümdengelimsel bir yaklaşım benimsedikleri görülmüş ve bu nedenle Dönüşümsel İspat Şeması'na sahip oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte bu katılımcıların büyük bölümünün ispatlarında cebirsel bir yaklaşım benimsedikleri ve kurallı fonksiyonlar yardımı ile teoremin doğruluğunu göstermeye çalıştıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından birinin ispatı örnek olarak aşağıda yer alan Şekil 11'de sunulmuştur:



Şekil 11. Dönüşümsel İspat Şeması: Cebirsel Temsillere Dayalı Bir Yaklaşım Örneği

Buna ek olarak, bazı öğretmen adaylarının da cebirsel manipülasyonları kullanmamakla birlikte kümeler ve fonksiyonlar gibi matematiksel nesneleri içeren izah edilebilir bir bijektif eşlemeyi sözel temsiller ile desteklenmiş bir form içerisinde sundukları görülmüştür. Bu yaklaşımlardan biri de örnek olarak aşağıda yer alan Şekil 12'de sunulmuştur:



Şekil 12 Dönüşümsel İspat Şeması: Sözel Temsiller İle Desteklenmiş Bir Yaklaşım Örneği

Söz konusu öğretmen adaylarının tümdengelimsel akıl yürütme çerçevesinde formal matematiksel bilgi ile tutarlı bu yaklaşımları da Dönüşümsel İspat Şeması içerisinde sınıflanmıştır. Çünkü Dede ve Karakuş (2014) tarafından da vurgulandığı gibi Dönüşümsel İspat Şeması'nın sadece cebirsel manipülasyonlar ile kısıtlanması kısıtlanamayacağı ve bunlara ek olarak dönüşüme dayalı gözlemleri, nesneler üzerindeki işlemleri ve işlemlerin sonuçlarının tahmini de içerebileceği söylenebilir. Son olarak yapılan analizlerde dönüşümsel ispat şemasına sahip oldukları belirlenen bazı öğretmen adaylarının da (%8) fonksiyon kavramını içeren cebirsel bir yaklaşımı benimsemelerine karşın çeşitli sebeplerle (*fonksiyonun tanım ve değer kümesinin belirlenememesi, kuralın yanlış oluşturulması, birebir-örten şartlarının sağlanamaması vb.*) teoremin formal kanıtına ulaşamadıkları görülmüştür.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramını içeren bir ispatlama sürecinde oluşturdukları ispat şemaları incelenmiştir. Çalışmanın bulguları dikkate alındığında katılımcıların sadece küçük bir bölümünün kavrama ilişkin formal anlayış geliştirerek Cantor tarafından önerilen bijektif eşleme yaklaşımını kullanabildikleri söylenebilir. Bu noktada sonsuzluk kavramı ve bunun özelinde de sayılabilirliğin öğretmen adayları tarafından yeterince anlamlandırılamadığı yorumu yapılabilir. Çalışmanın katılımcılarının önemli bir kısmının dışsal ve deneysel şemalara sahip olması bu görüşü destekler niteliktedir. Matematik eğitimi literatüründe de öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramına ilişkin benzer güçlüklerini konu alan çalışmalara rastlamak mümkündür (ör., Çelik ve Akşan, 2013; Güven ve Karataş, 2004; Jirotková ve Litter, 2003; Kolar ve Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018; Singer ve Voica, 2008; Tsamir, 1999). Bu çalışmanın bulgularının bahsedilen çalışmalara pek çok açıdan paralellik gösterdiği söylenebilir. Örneğin, literatürde yer alan pek çok çalışmada olduğu gibi (Güven ve Karataş, 2004; Jirotková ve Litter, 2003; Kolar ve Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018; Tsamir,1999) bu çalışmada da öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramı ile ilgili bazı yanılgılarına sahip oldukları ve bu nedenle de ispatı oluşturamadıkları (bkz. Şekil 7) belirlenmiştir. Bununla birlikte çalışmanın bulgularının, öğretmen adaylarının sonsuzluğa ilişkin sezgisel yaklaşımlarına yer verilen diğer çalışmalara da (Kolar ve Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018; Tirosh, 1999) benzerlik gösterdiği söylenebilir. Örneğin, Tsamir (1999) öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırmada sezgisel yaklaşımlardan yararlanabileceklerini belirtirken; Pala ve Narlı (2018) ise onların sezgisel kabulleri temel alan ispatlar ortaya koyabileceklerine dair örnekler sunmuşlardır. Bu çalışmanın katılımcılarının bir bölümünde gözlenen Algısal İspat Şeması'na sahip öğretmen adayları sayılabilir sonsuz kümelerin denkliğini göstermek için çoğunlukla sözel açıklamalara dayanan sezgisel çıkarımlarından yararlanmışlardır. Dolayısı ile yukarıda bahsedilen çalışmaların sonuçlarının desteklendiği söylenebilir. Ayrıca bu çalışma, özel olarak sonsuzluğun bir alt boyutu olan sayılabilirlik kavramına odaklanmış olan çalışmaların (ör., Narlı ve Başer, 2008; Ünan ve Doğan; 2011) sonuçlarını da desteklenmektedir. Örneğin, Ünan ve Doğan'ın (2011) çalışmasına katılan öğretmen adaylarının önemli bir bölümünün kendilerine sunulan kümelerden sayılabilir olanları doğru olarak belirleyemedikleri görülmüştür. Benzer olarak Narlı ve Başer'in (2008) deneysel çalışmasına katılan öğretmen adaylarının bir bölümünün de sayılabilir kümeleri anlamlandıramadıklarını, bunları tanımlayamadıklarını ve sayılamaz olanlar ile karıştırdıklarını belirlenmiştir. Bu çalışmada gözlenen Dışsal İspat Şemaları'nın da çoğunlukla sayılabilirlik kavramına ilişkin yetersiz anlayışları içerdiği dikkate alındığında, yukarıda bahsedilen çalışmaların sonuçlarının desteklendiği yorum yapılabilir.

Çalışmanın İspatlama ve İspat Şemaları Açısından Değerlendirilmesi

Elde edilen bulgulara göre, aynı düzeydeki öğretmen adaylarının bir teorem ile ilgili olarak farklı ispat şemaları geliştirebildikleri söylenebilir. Ayrıca aynı şemaya sahip öğretmen adaylarının farklı ispat yaklaşımları benimseyebileceklerine dair örnekler de sunulmuştur. Örneğin Dönüşümsel İspat Şeması'nı kullanan öğretmen adaylarından bazılarının cebirsel ağırlıklı temsillerden yararlandığı (bkz. Şekil 11) ve bir kısmının da sözel ağırlıklı temsillerden yararlandığı (bkz. Şekil 12) belirlenmiştir. Bu durum, Harel (2001) tarafından ifade edilen "*kavramsal anlayışın, ispatlama aktiviteleri ve ispat şeması üzerinde etkili olduğu*" bulgusu ile desteklenmektedir. Çünkü söz konusu öğretmen adaylarının ispatları incelendiğinde (aynı şemaya sahip olsalar bile) farklı kavramlar arasındaki ilişkilere odaklanmış oldukları sonucuna ulaşılabilir. Diğer yandan katılımcıların sadece %9'unun istenen ispatı oluşturabildikleri dikkate alındığında öğretmen adaylarının ispatlama becerilerinin istenen düzeyde olmadığı çıkarımı da yapılabilir. Bu sonuç bir çok araştırmanın sonuçlarında da desteklemektedir (ör., Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Pala ve Narlı, 2018; Sarı-Uzun ve Bülbül, 2013; Stylianides ve Stylianides, 2009; Zazkis, 2014). Bu noktada çalışma bir bütün olarak ele alındığında öğretmen adaylarının formal ispata ulaşmalarını engellediği düşünülen genel faktörler şöyle sıralanabilir: (i) Kavram yanılgıları, (ii) Matematiksel dil ve notasyonların yerinde kullanılamaması, (iii) İspatlamanın bir doğrulama işlemi olarak görülmesi ve örneklerin ispata eşdeğer tutulması, (iv) Sezgisel kabullerin ve informal yaklaşımların birer delil olarak kabul edilmesi

Bununla birlikte katılımcılar tarafından sunulan yaklaşımların, ispat şemaları kategorilerine (Harel ve Sowder, 1998) göre dağılımı aşağıda yer alan Tablo 2'de sunulmuştur:

Tablo 2 Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarına Göre Dağılımı

İspat Şeması	Öğretmen Adaylarının Frekansı
Dışa Bağlı İspat Şeması	32
Deneysel İspat Şeması	51
Analitik İspat Şeması	17

Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemek amacı ile gerçekleştirilen çalışmalara rastlamak mümkündür. Bu çalışma farklı ispat şemaları içermesi açısından literatürde yer alan pek çok çalışmaya (ör., Çontay, 2017; Doruk ve Kaplan, 2017; Harel, 2001; İskenderoğlu, 2010; İskeneroğlu, Baki ve İskenderoğlu, 2010; Oflaz, Bulut ve Akçakın, 2016; Pence, 1999; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) benzerlik göstermektedir. Ayrıca söz konusu çalışmaların çoğunlukla ispat şemalarının farklı boyutlarına odaklanacak şekilde tasarlandığı söylenebilir. Örneğin Sarı, Altun ve Aşkar (2007) ile Doruk ve Kaplan (2017) öğretmen adaylarının ispat şemaları ile akademik başarıları arasındaki ilişkiye odaklanmış ve az sayıdaki başarılı öğretmen adayının dönüşümsel şemaya sahip olduğunu belirlemişlerdir. Her ne kadar bu çalışmada akademik başarı doğrudan bir değişken olarak incelenmiş olmasa da katılımcıların küçük bir bölümünün (%9) ispata ulaşabilmesi açısından bahsedilen çalışmalara benzerlik gösterdiği söylenebilir. Diğer yandan bu çalışmada Analitik İspat Şemaları'ından Aksiyomatik İspat Şeması'na rastlanmamıştır. Bu durumun bazı olası nedenleri aşağıda listelenmiştir:

- Sunulan teoremin bilinen aksiyomatik yapı içerisinde daha önceden tanımlanmış kavramlar yoluyla anlaşılmasının ve ispatlanmasının mümkün olması.
- Sunulan teoremin ispat için tanımsız terimlerden veya aksiyomlardan başlama ihtiyacı doğurmaması.
- Öğretmen adaylarının ön bilgi düzeylerinin, kullanılan kavramlara ilişkin tanımların niteliğini veya sistemin aksiyomatik yapısını sorgulayacak düzeyde olmaması.

Buna paralel olarak literatürde yer alan bazı çalışmalarda da (ör., Çontay, 2017; Doruk ve Kaplan, 2017; Oflaz, Bulut ve Akçakın, 2016; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007;) aksiyomatik şemanın ortaya çıkmadığı görülmüştür. Diğer yandan yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının büyük bölümünün (%51) sunulan teoremi örnekler ya da sezgiler ile doğrulayabilecekleri Deneysel İspat Şeması'na sahip oldukları belirlenmiştir. Bu çalışmaya paralel olarak İskeneroğlu, Baki ve İskenderoğlu'nun (2010) çalışmasında da Deneysel İspat Şemaları'na sahip katılımcıların sayısı diğer iki kategoriye oranla fazla bulunmuştur.

Öneriler

Doğruyu ve yanlışı birbirinden ayırmak bilimsel düşüncenin temel unsurlarından biridir. Bu ise geçerli bir muhakeme süreci ile üretilen delillerin etkin kullanılabilmesini yani ispat becerisini gerektirir. Öğretmen adayları, geleceğin öğretmenleridir. Bu nedenle onların ispatlama becerilerinin gelişimi, ileride rehberlik edecekleri öğrencilerde bu beceriyi nasıl biçimlendireceklerini doğrudan etkileyecektir. Dolayısı ile öğretmen adaylarının ispat becerilerinin geliştirilmeli ve buna engel olan faktörler anlaşılarak ortadan kaldırılmalıdır. Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konmuş olan ispat şemalarının bu bağlamda önemli bir teorik çerçeve oluşturduğu söylenebilir. Çünkü tıpkı bu çalışmada gözlendiği gibi bireylerin ispat şemalarının, onların ispatlama eylemleri ile doğrudan bağlantılı olduğu söylenebilir. Dolayısı ile öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenmesinin, öğrencilere sunabilecekleri ispat eğitimi hakkında bilgiler verebileceği yorumu yapılabilir. Dahası, onların ispat şemalarında gözlenen yetersizliklerin farklı konular bağlamında belirlenmesi ve üniversitede sunulan ispat temelli derslere bu çerçeve doğrultusunda yön verilmesi sayesinde geleceğin matematik eğitimine büyük bir yatırım yapılabilir. Bunlara ek olarak ispat şemalarının eğitime konu olan diğer değişkenler (sınıf düzeyi, cinsiyet, akademik başarı vb.) ya da "*ispat imajı*" (Kidron ve Dreyfus, 2014) gibi farklı teorik çerçeveler ile birlikte değerlendirilmesi sayesinde "matematiksel ispat" kavramına ilişkin daha bütüncül bir bakış açısı geliştirilebilir.

Kaynakça

Akbulut, K. ve Akgün, L. (2005). Matematik ve Sonsuzluk. Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi. Sayı 11, 548-559.

Alcock, L., ve Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior,* 24, 125–134. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003

Allen, G. D. (2000). The history of infinity. http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/infinity/infinity.pdf 26.08. 2018 tarihinde erişilmiştir.

Antonini, S. ve Mariotti, M.A. (2007). Indirect proof: an interpreting model. *In Proceedings of the 5th CERME Conference*, Larnaca, Cyprus, 2007, pp. 541-550.

Aztekin, S. (2013). Matematiksel bir kavram olarak sonsuzluk ve ötesi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Edt.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (ss. 500-516) (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Bozkuş, F. (2014). Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışları. Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi. Bolu: Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. http://tez.yok.gov.tr/ adresinden edinilmiştir.

Bozkuş, F., Toluk-Uçar, Z. ve Çetin, İ. (2015). Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluğu kavrayışları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 506-531.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2018). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (24. Baskı). Ankara: Pegem Yayınları.

Clark, M. (2002). *Paradoxes from A to Z,* New York, NY: Routledge.

Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 166-190.

Çontay, E. G. (2017). Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları. Yayınlanmış Doktora Tezi. Denizli: Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. http://tez.yok.gov.tr/ adresinden edinilmiştir.

Dede, Y., ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 47-71.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Analiz Alanında Yaptıkları İspatların Özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Sayı: 44, 467-498

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 85-109.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58* (3), 335-359.

Fischbein, E., Tirosh, D. ve Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 309-329.

Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219–236.

Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.

Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut Matematik*, İzmir: Dinozor Kitabevi.

Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 65 -73.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell ve R. Zazkis (Eds.), *The learning and teaching of number theory* (pp. 185-212). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., ve Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput ve E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: AMS

İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları. Yayınlanmış Doktora Tezi. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. http://tez.yok.gov.tr/ adresinden edinilmiştir.

İskenderoğlu, T., Baki, A. ve İskenderoğlu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 531-536.

İşleyen, T. (2013). Ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk algıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *21*(3), 1235-1252.

Jirotková, D. ve Littler, G. (2003). Student's Concept of Infinity in the Context of a Simple Geometrical Construct. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 126-132.

Karasar, N. (2007). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (17.baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Kidron, I. ve Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(3), 297-321.

Kolar, V. M. ve Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Mamolo, A. (2009). Glimpses of infinity: intuitions, paradoxes, and cognitive leaps (Doctoral Thesis, Simon Fraser University, Burnaby, Canada). http://summit.sfu.ca/item/9325 adresinden 02.08.2018 tarihinde erişilmiştir.

Mamolo, A. ve Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a Window to Infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167-182.

Narlı, S. ve Baser, N. (2008). Cantorian Set Theory and teaching prospective teachers. *International Journal of Environmental ve Science Education*, *3*(2), 99-107.

Narlı, S. ve Narlı, P. (2012). Sonsuz Sayı Kümeleri Işığında İlköğretim Öğrencilerinin Sonsuzluk Algı ve Yanılgılarının Belirlenmesi, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, Sayı 33, sayfa: 123-137.

Maria, K., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C. ve George, P. (2009). *Teachers' perceptions about infinity: a process or an object?*. Proceedings of CERME 6 sunulan bildiri (28 January- 1 February, Lyon, France, ss.1771-1780).

Martin, W. G. ve Wheeler, M. M.: (1987), 'Infinity concepts among preservice elementary school teachers', *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* France, pp. 362–368.

McMillan, J. H. (2000). *Educational research: Fundamentals for the consumer* (4th ed.). New York: Longman.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 48, Nos. 2-3., 239-257.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249—266.

Oflaz, G., Bulut, N. ve Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152.

Özmantar, F.(2010). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H.Akkoç (Ed.). *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 151-180) İçinde, (2.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

Pala, O. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi.* Advance online publication. doi: 10.16949/turkbilmat.414818

Pence, B. (1999). Proof schemes developed by prospective elementary prospective teachers enrolled in intuitive geometry. In F. Hitt ve M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-First annual meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 429-435). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Powers, R. A., Craviotto, C. ve Grassl, R. M. (2010). Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 501-514.

Rucker, R., (1982), *Infinity and the mind*, Birkhauser Boston Inc., Cambridge, Ma.

Sarı Uzun, M., ve Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyi. *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 372-390.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.

Sbaraglı, S., (2006). Primary school teachers’ beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 5(2), 49-76.

Singer, F. M. ve Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(3), 188-205.

Stylianides, G. J., ve Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3).

Tall, D. O. (1980). The Notion of Infinite Measuring Number and its Relevance in The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

Tall, D. (1998). *The cognitived evelopmento f proof. Is mathematicapl rooffor all orfor some?* Presentation at the conference of the University of Chicago School Mathematics Project, Chicago.

Tall, D.O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 199-238.

Tirosh, D. (1991). "The role of students' intuition of infinity in teaching the Cantorian theory" in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 199-214.

Tirosh, D., ve Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematics in Scienceve Technology*, 27(1), 33-40.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinitesets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 209– 234.

Tsamir, P. (2001). When The Same is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2-3), 289-307.

Tsamir, P. ve Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1-23.

Tsamir, P. ve Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30 (2), 213-219.

Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137-157.

Ünan, Z., ve Doğan, M. (2011). Sonlu ve Sayılabilir Sonsuz Kümeler ve Sayılamayan Sonsuz Kümelerin Bir Modellemesi. *NWSA: Education Sciences*, 6(2), 1938-1950.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.

Weber, K. (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F. Hitt, G. Harel ve A. Selden (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VI* (pp. 197-232). RUMEC.

Yıldırım, C. (2016), *Matematiksel Düşünme*, 12. Basım, İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (2009) *Case Study Research: Design and Methods*, fourth edition, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zazkis, D. (2014). Proof-scripts as a lens for exploring students' understanding of odd/even functions. *The Journal of Mathematical Behavior,* Volume 35, September 2014, pages 31-43.