GÜFBED/*GUSTIJ* (2019) 9 (1): 143-154
DOI: 10.17714/gumusfenbil.410726 Araştırma Makalesi / *Research Article*

E^n Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklem ve Çözümü

Differential Equation Characterizing Spherical Curves in E^n and Solution of This Equation

Tuba AĞIRMAN AYDIN*[1,a], Mehmet SEZER[2,b]
[1] *Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Alanları Eğitimi, Matematik Bölümü, 69000, Bayburt*
[2] *Celal Bayar Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 45140, Manisa*

• Geliş tarihi / *Received*: 29.03.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 29.06.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 22.07.2018

Öz
Bu çalışmada biz öncelikle n- boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısına göre küresel eğrileri karakterize eden n. mertebeden lineer, değişken katsayılı diferansiyel denklem elde ettik. Katsayıları eğrilik ve torsiyon fonksiyonlarına bağlı bu diferansiyel denklem her birim hızlı düzgün küresel eğri tarafından sağlanır. Bu tip denklemleri genellikle analitik olarak çözmek mümkün değildir, bu yüzden biz başlangıç koşulları kullanarak, sıralama noktaları ve Taylor polinomlarına dayalı bir nümerik metot sunduk. Bizim metodumuzla öncelikle, n-boyutlu Öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemin çözülmesi problemini, cebirsel denklemlerin bir sisteminin çözülmesi problemine indirgedik ve sonra Taylor polinomlarının genel terimlerinde bu denklemin yaklaşık çözümünü elde ettik.

Anahtar kelimeler: Frenet çatısı, Küresel eğriler, Lineer Diferansiyel Denklemler, Taylor matrix sıralama metodu

Abstract
In this study, we considered an n^{th} order linear differential equation with variable coefficients characterizing spherical curves according to Frenet frame in Euclidean n-Space E^n. This equation whose coefficients are related to special function, curvature and torsion, is satisfied by the position vector of any regular unit velocity spherical curve. These type equations are generally impossible to solve analytically and so, for approximate solution we presented a numerical method based on Taylor polynomials and collocations points by using initial conditions. Our method reduces the solution of problem to the solution of a system of algebraic equations and the approximate solution is obtained in terms of Taylor polynomials.

***Keywords**: Frenet frame, Linear differential equations, Spherical curves, Taylor matrix and collocation method*

*[a] Tuba AĞIRMAN AYDIN; tubagirman@hotmail.com; Tel: (0553) 682 10 49; orcid.org/0000-0001-8034-0723
[b] orcid.org/0000-0002-7744-2574

1. Giriş

Euler'in düzlemde tanımladığı eğri kavramı Fujiwara (1914) tarafından üç boyutlu Öklid uzayına taşınmıştır. Bu çalışmadan kısa bir süre sonra sabit genişlikli eğrilerin küre üzerindeki tanımına ulaşılmıştır (Blaschke, 1917). Wong (1963), genel bir eğrinin bir küre üzerinde bulunması koşulunun global bir formülasyonunu vermiştir. Bu formülasyon diferansiyel geometri üzerine yazılan kitaplarda bir eğrinin bir küre üzerinde yatması için bir gerek ve yeter koşul olarak yerini almıştır. Reuleaux (1963) aynı yıllarda yaptığı çalışmada, bu eğrilerin kinematik ve mühendislik uygulamalarına ışık tutmuştur. Gluck (1966) tarafından yapılan çalışma, Öklid uzayında eğrilerin yüksek mertebeden eğriliklerini geometri dünyasına kazandırmıştır. Bir küresel eğriyi karakterize eden diferansiyel denklemin açık olarak çözülebilirliği gösterilmiş ve bu çözüm eğrinin eğrilik yarıçapı ve burulması cinsinden ifade edilmiştir (Breuer ve Gottlieb, 1971). Wong (1972), küresel eğrilerin açık bir karakterizasyonuna ulaşmıştır. Dannon (1981), eğrilerin integral karakterizasyonu üzerine çalışma yapmıştır. Ayrıca Sezer (1989), E^3 - sabit genişlikli eğrileri ve E^4- küresel eğrileri için elde ettiği Frenet benzeri bir diferansiyel denklem sisteminin integral karakterizasyonlarını vermiş ve bu karakterizasyonları, bir uzay eğrisinin kapalılığı (periyodikliği) ile ilgili bir kriter belirlemede uygulamaya koymuştur (Sezer, 1989b).

Aynı zamanda, şimdiye kadar yapılan çalışmalarda, küresel eğrilerle ilgili diferansiyel denklem sistemleri, lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve integral denklemlere dönüştürülmüş, fakat tam çözümlerine ulaşılamamıştır (Akdoğan, 2001; Sezer, 1996).

Biz öncelikle, üçüncü mertebeden, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için Taylor polinomlarını kullanarak bir Taylor matris sıralama metodu geliştirdik. Ardından 4-boyutlu Öklid uzayında merkezil bir küre üzerinde yatan, keyfi hızlı küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemleri elde ettikten sonra çözümleri üzerinde çalıştık (Aydın, 2014). Bu çalışmamızda E^n de birim hızlı küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemleri elde edip, geliştirdiğimiz Taylor matris sıralama metodunu kullanarak bu denklemlerin yaklaşık çözümlerine ulaştık.

Diferansiyel denklem bazında ele aldığımız küresel eğriler çeşitli mekanizmaların işletilmesinde kullanıldığından, bu çalışmamızın sonuçları, makina mühendisliği, kinematik gibi alanlarda yapılan çalışmalarda kullanılabilir. Ayrıca bu eğriler için elde ettiğimiz çözümler literatürde önemli bir boşluğu dolduracaktır.

2. Önbilgiler

2.1.Tanım: $I = \{t: a < t < b\}$ olmak üzere $\alpha: I \subseteq R \to E^n$ şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir α fonksiyonuna E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan bir eğri, $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir. Bu eğrinin $d\alpha(t)/dt$ türevi her yerde sıfırdan farklı ise bu eğriye regüler (düzgün) eğri denir (Hacısalihoğlu, 1993).

2.2. Tanım: $M \subset E^n$ eğrisi, $\alpha: I \to E^n$ ve $s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \ldots, \alpha_n(s))$ şeklinde verilsin. Bu durumda
$\psi = \{\alpha'(s), \alpha''(s), \ldots, \alpha^{(r)}(s)\}$
sistemi lineer bağımsız ve $\forall\, \alpha^{(k)}, k > r$ için
$\alpha^{(k)} \in S_p\{\psi\}$
olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortanormal sistemine eğrinin Frenet çatısı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \ldots, V_r(m)\}$ sistemine ise $m \in M$ noktasındaki Frenet çatısı denir. Burada $V_i, 1 \le i \le r$ ye Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 1993).

2.3. Teorem: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında $k_i(s)$ eğrilik fonksiyonu ile Frenet r-ayaklısı arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur. (Hacısalihoğlu, 1993).

1) $V_1'(s) = k_1(s) V_2(s)$
2) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$
3) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$

2.4. Taylor Matris Sıralama Yöntemi: m. mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^{m} R_k(x) \rho^{(k)}(x) = h(x) \qquad a \le x \le b$$

tipindeki diferansiyel denklemin, başlangıç, sınır veya karışık koşullar altında

$$\rho(x) \cong \sum_{n=0}^{N} a_n (x-c)^n, \quad a_n = \frac{\rho^{(n)}(c)}{n!}, \quad a \le c \le b$$

ile tanımlanan $x = c$ noktası civarında kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda yaklaşık çözümlerini bulmak için geliştirilmiştir (Sezer, 1996). Burada $R_k(x)$, $h(x)$ ve dolayısıyla $\rho(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında türevlenebilir (Taylor serisine açılabilir) fonksiyonlardır. a_n, $n = 0,1,\ldots,N$ katsayıları bulunması gereken Taylor katsayıları olarak tanımlanmaktadır. Bu yöntemin temeli; bilinmeyen $\rho(x)$ fonksiyonu kesilmiş Taylor serisi açılımı ve türevlerinin matris formlarını ve $x_i = a + \frac{b-a}{N} i,\ i = 0,1,\ldots,N$ standart sıralama noktalarını kullanarak, diferansiyel denklemi bir cebirsel matris denklemine, dolayısıyla a_n Taylor katsayılı bir cebirsel sisteme indirgemeye dayanmaktadır. Böylece verilen bir diferansiyel denklem veya diğer fonksiyonel denklemlerin belli koşullar altında kesilmiş (sonlu) Taylor serisi formunda yaklaşık çözümlerini bulma problemi, cebirsel bir matris denkleminin çözümünü bulma problemine dönüştürülmüş olmaktadır.

3. E^n Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemin Elde Edilmesi

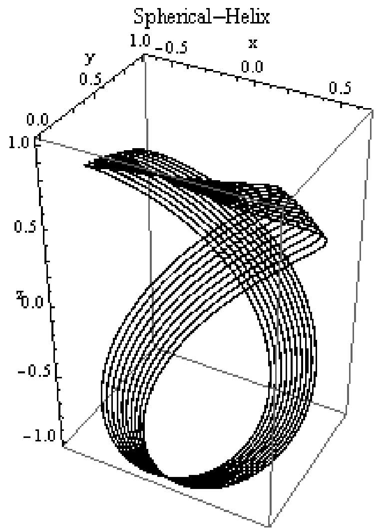
3.1. Tanım: $\vec{C} \in R^4$ olmak üzere,

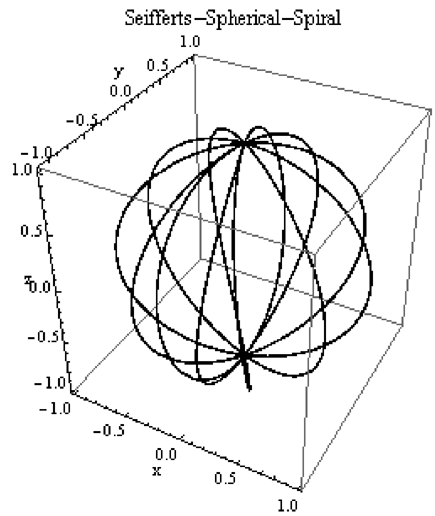
$$d(\vec{X},\vec{C}) = \|\vec{X} - \vec{C}\| = r$$

eşitliğini sağlayan $\vec{X} \in R^4$ noktalarının kümesine C merkezli ve r yarıçaplı, 3-boyutlu hiper küre denir ve S^3 ile gösterilir. (Hacısalihoğlu, 2000).

3.2. Tanım: $X: I \to R^4$, düzgün bir eğri ve S^3, E^4 te bir hiper küre olsun. Eğer $X \subset S^3$ ise X eğrisine R^4 uzayında küresel eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

3.3. Örnek:





Şekil 1. Uzayda küresel eğri

Elementer diferansiyel geometri üzerine hazırlanan kitaplarda, E^3' te bir eğrinin eğrilik($\varkappa$) ve burulmasının(τ)

$$[\tau^{-1}(\varkappa^{-1})']' + \tau\varkappa^{-1} = 0 \qquad (1)$$

diferansiyel denklemini sağlaması, eğrinin bir kürede bulunması için bir gerek ve yeter koşul olarak verilir. Bu ifadede eğrilik ve burulmanın hiçbir yerde sıfır olamayacağı ön koşulu aşikardır. Bu diferansiyel denklemden yola çıkılarak E^3 küresel eğrileri için frenet benzeri bir denklem sistemi gözlemlenmiş ardından bu eğriler E^4' e taşınarak gözlemin doğruluğu ispatlanmıştır (Dannon, 1981).

Bu düşünceden hareketle E^n küresel eğrilerini karakterize eden diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

α eğrisi, E^n Öklid uzayında birim hızlı bir küresel eğri olsun. Öncelikle bu α eğrisi için E^n' de Frenet vektör alanları aşağıdaki gibi alınsın.

$$T_1'(s) = k_1(s)T_2(s)$$
$$T_i'(s) = -k_{i-1}(s)T_{i-1}(s) + k_i(s)T_{i+1}(s), \qquad 1 < i < n$$
$$T_n'(s) = -k_{n-1}(s)T_{n-1}(s)$$

Burada s yay uzunluğu parametresi ve $k_j(s)$; $j = 1,2,\ldots,(n-1)$ eğrinin eğrilikleridir.

$\alpha \subset E^n$ eğrisiyle sonsuz yakın $n+1$ ortak noktası olan, $\overrightarrow{x_0}$ merkezli, a yarıçaplı oskülatör (eğrilik) küresi, $\alpha(s)$ eğrinin üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir (Cheng-Chung, 1981)

$$S^{n-1} = \{\alpha;\ \alpha \subset E^n, \langle \alpha(s) - x_0, \alpha(s) - x_0 \rangle = a^2\}$$

Burada $f(s) = \langle \alpha(s) - x_0, \alpha(s) - x_0 \rangle - a^2 = 0$ olsun. α eğrisi ile S^{n-1} oskülatör (eğrilik) küresinin $n+1$ ortak noktasının olması, aşağıdaki ifadeyle mümkündür.

$$f(s) = f'(s) = f''(s) = \cdots = f^{(n)}(s) = 0$$

Şimdi bu düşünceden hareketle f(s) fonksiyonunun n. mertebeye kadar tekrarlayan diferansiyelleri dikkate alınsın ve kolaylık olması açısından $\overrightarrow{x_0}$ noktası $\vec{0}$ noktasına yerleştirilsin.

$$f(s) = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle - a^2 = 0$$
$$\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha(s), T_1(s) \rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{f_1(s)} = \langle -\alpha(s), T_1(s) \rangle = 0$$
$$\langle \alpha'(s), T_1(s) \rangle + \langle \alpha(s), T_1{}'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha(s), k_1(s) T_2(s) \rangle = -1$$
$$\langle \alpha(s), T_2(s) \rangle = -1/k_1(s) \Rightarrow \boldsymbol{f_2(s)} = \langle -\alpha(s), T_2(s) \rangle = \rho(s)$$

Burada $\rho(s) = 1/k_1(s)$ eğrinin eğrilik yarıçapı olarak tanımlanır.

$$\langle \alpha'(s), T_2(s) \rangle + \langle \alpha(s), T_2{}'(s) \rangle = \langle \alpha(s), -k_1(s)T_1(s) + k_2(s)T_3(s) \rangle = -\rho'(s)$$
$$\langle \alpha(s), T_3(s) \rangle = -1/k_2(s).\rho'(s) \Rightarrow \boldsymbol{f_3(s)} = \langle -\alpha(s), T_3(s) \rangle = 1/k_2(s).\rho'(s)$$
$$\langle \alpha'(s), T_3(s) \rangle + \langle \alpha(s), T_3{}'(s) \rangle = (-1/k_2(s).\rho'(s))'$$
$$\langle \alpha(s), T_4(s) \rangle = -1/k_3(s).[(1/k_2(s)).\rho''(s) + (1/k_2(s))'.\rho'(s) + k_2(s).\rho(s)]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{f_4(s)} = \langle -\alpha(s), T_4(s) \rangle = 1/k_3(s).[(1/k_2(s)).\rho''(s) + (1/k_2(s))'.\rho'(s) + k_2(s).\rho(s)]$$

1. Sonuç: Dikkat edilirse elde edilen bu ifadede

$$f_4(s).k_3(s) = [(1/k_2(s)).\rho''(s) + (1/k_2(s))'.\rho'(s) + k_2(s).\rho(s)]$$

eşitliği, E^3 öklid uzayında bir eğrinin bir kürede bulunması için bir gerek ve yeter koşul olarak verilir.

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha'(s), T_4(s) \rangle + \langle \alpha(s), T_4{}'(s) \rangle \\
&\quad = \{-1/k_3(s).[(1/k_2(s)).\rho''(s) + (1/k_2(s))'.\rho'(s) + k_2(s).\rho(s)]\}' \\
&\langle \alpha(s), T_5(s) \rangle \\
&\quad = -1/k_4(s)\{(1/k_3(s).k_2(s)).\rho'''(s) \\
&\quad + [(1/k_3(s).k_2(s))' + 1/k_3(s).(1/k_2(s))'].\rho''(s) \\
&\quad + [(1/k_3(s).(1/k_2(s))')' + k_2(s)/k_3(s) + k_3(s)/k_2(s)].\rho'(s) \\
&\quad + (k_2(s)/k_3(s))'.\rho(s)\} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{f_5(s)} = \langle -\alpha(s), T_5(s) \rangle \\
&\quad = 1/k_4\{(1/k_3(s).k_2(s)).\rho'''(s) \\
&\quad + [(1/k_3(s).k_2(s))' + 1/k_3(s).(1/k_2(s))'].\rho''(s) \\
&\quad + [(1/k_3(s).(1/k_2(s))')' + k_2(s)/k_3(s) + k_3(s)/k_2(s)].\rho'(s) \\
&\quad + (k_2(s)/k_3(s))'.\rho(s)\}
\end{aligned}$$

2. Sonuç: Burada da yukarıdakine benzer bir sonuç elde edilir.

$$f_5(s).k_4(s) = (1/k_3(s).k_2(s)).\rho'''(s) + [(1/k_3(s).k_2(s))' + 1/k_3(s).(1/k_2(s))'].\rho''(s) + [(1/k_3(s).(1/k_2(s))')' + k_2(s)/k_3(s) + k_3(s)/k_2(s)].\rho'(s) + '.\rho(s)$$

eşitliği, E^4 uzayında bir eğrinin bir kürede bulunması için bir gerek ve yeter koşul olarak verilir.

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha'(s), T_5(s) \rangle + \langle \alpha(s), T_5{}'(s) \rangle = -1/k_5(s)\{(1/k_4(s).k_3(s).k_2(s)).\rho^{(4)}(s) \\
&+[(1/k_4(s).k_3(s).k_2(s))' + 1/k_4(s).(1/k_3(s).k_2(s))' \\
&+1/k_4(s).k_3(s).(1/k_2(s))'].\rho'''(s) \\
&+[k_4(s)/k_3(s).k_2(s) + (1/k_4(s).(1/k_3(s).k_2(s))')' \\
&+(1/k_4(s).k_3(s).(1/k_2(s))')' \\
&+k_3(s)/k_4(s).k_2(s) + k_2(s)/k_4(s).k_3(s) + 1/k_4(s).(1/k_3(s).(1/k_2(s))')'].\rho''(s) \\
&[k_4(s)/k_3(s).(1/k_2(s))' + (k_3(s)/k_4(s).k_2(s))' \\
&+(k_2(s)/k_4(s).k_3(s))' + (1/k_4(s).(1/k_3(s).(1/k_2(s))')')' \\
&+1/k_4(s).(k_2(s)/k_3(s))'].\rho'(s) \\
&+[k_4(s).k_2(s)/k_3(s) + (1/k_4(s).(k_2(s)/k_3(s))')'].\rho(s)\} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{f_6(s)} = \langle -\alpha(s), T_6(s) \rangle =
\end{aligned}$$

$1/k_5(s)\{(1/k_4(s).k_3(s).k_2(s)).\rho^{(4)}(s)$
$+[(1/k_4(s).k_3(s).k_2(s))' + 1/k_4(s).(1/k_3(s).k_2(s))'$
$+ 1/k_4(s).k_3(s).(1/k_2(s))'].\rho'''(s)$
$+[k_4(s)/k_3(s).k_2(s) + (1/k_4(s).(1/k_3(s).k_2(s))')'$
$+(1/k_4(s).k_3(s).(1/k_2(s))')' +$
$k_3(s)/k_4(s).k_2(s) + k_2(s)/k_4(s).k_3(s) +$
$1/k_4(s).(1/k_3(s).(1/k_2(s))')'].\rho''(s)$
$+[k_4(s)/k_3(s).(1/k_2(s))' + (k_3(s)/k_4(s).k_2(s))' +$
$(k_2(s)/k_4(s).k_3(s))' + (1/k_4(s).(1/k_3(s).(1/k_2(s))')')'$
$+ 1/k_4(s).(k_2(s)/k_3(s))'].\rho'(s) +$
$[k_4(s).k_2(s)/k_3(s) + (1/k_4(s).(k_2(s)/k_3(s))')'].\rho(s)\}$

işlemlere bu şekilde devam edilirse, nihai olarak $\mathrm{f}_{n-2}(\mathrm{s})$, $\mathrm{f}_{n-1}(\mathrm{s})$ ve $\mathrm{f}_{n}(\mathrm{s})$ fonksiyonları yaklaşık olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$\boldsymbol{f_{n-2}(s)} = \langle -\alpha(s), T_{n-2}(s)\rangle$
$= 1/k_{n-3}(s)\{[1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s)].\rho^{(n-4)}(s) +$
$[(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s))'$
$+ 1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))' +$
$1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).(1/.k_{n-6}(s).k_{n-7}(s)\dots k_2(s))' + \cdots +$
$1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-5)}(s) +$
$[\big(k_{n-4}^2(s) + k_{n-5}^2(s) + \cdots + k_2^2(s)\big)/\big(k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s)\big) +$
$(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).(1/k_{n-6}(s).k_{n-7}(s)\dots k_2(s))')' + \cdots +$
$(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s).k_{n-7}(s)\dots k_3(s).(1/k_2(s))')' +$
$1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).(1/k_{n-6}(s)\dots(1/k_2(s))')\dots)')'].\rho^{(n-6)}(s)$
$[\Big(\Big(k_{n-5}^2(s) + k_{n-6}^2(s) + \cdots + k_2^2(s)\Big)/\Big(k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s)\Big)\Big)' +$
$(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).(1/k_{n-6}(s)\dots(1/k_2(s))')\dots)')')' +$
$k_{n-4}(s)/k_{n-5}(s).\big(1/k_{n-6}(s)\big)' + 1/k_{n-4}(s).\big(k_{n-6}(s)/k_{n-5}(s)\big)']$
$.\rho^{(n-7)}(s) + \cdots + D_2.\rho''(s) + D_1.\rho'(s) + D_0.\rho(s)$

$\boldsymbol{f_{n-1}(s)} = \langle -\alpha(s), T_{n-1}(s)\rangle$
$= 1/k_{n-2}(s)\{[1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s)].\rho^{(n-3)}(s) +$
$[(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s))'$
$+ 1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s))' +$
$1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/.k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))' + \cdots +$
$1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-4)}(s) +$
$[(k_{n-3}^2(s) + k_{n-4}^2(s) + \cdots + k_2^2(s))/(k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s)) +$
$(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))')' + \cdots +$
$(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_3(s).(1/k_2(s))')' +$
$1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\dots(1/k_2(s))')\dots)')'].\rho^{(n-5)}(s)$
$[\Big(\Big(k_{n-4}^2(s) + k_{n-5}^2(s) + \cdots + k_2^2(s)\Big)/\Big(k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s)\Big)\Big)' +$
$(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\dots(1/k_2(s))')\dots)')')' +$
$k_{n-3}(s)/k_{n-4}(s).\big(1/k_{n-5}(s)\big)' + 1/k_{n-3}(s).\big(k_{n-5}(s)/k_{n-4}(s)\big)']$
$\rho^{(n-6)}(s) + \cdots + E_2.\rho''(s) + E_1.\rho'(s) + E_0.\rho(s)$

$\langle \alpha'(s), T_{n-1}(s)\rangle + \langle \alpha(s), {T_{n-1}}'(s)\rangle =$
$\langle \alpha(s), -k_{n-2}(s)T_{n-2}(s) + k_{n-1}(s)T_n(s)\rangle =$
$-[1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\dots k_2(s)].\rho^{(n-2)}(s) -$
$[(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\dots k_2(s))' +$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s))' +$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s))' +$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/.k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))' + \cdots +$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-3)}(s) -$
$[(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s))')' +$

$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')'+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/.k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')'+\cdots+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))')'+$
$(k_{n-3}^2(s)+k_{n-4}^2(s)+\cdots+k_2^2(s))/(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')'+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')'+\cdots+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')']$
$.\rho^{(n-4)}(s)-$
$[((k_{n-3}^2(s)+k_{n-4}^2(s)+\cdots+k_2^2(s))/(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s)))'+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')')'+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')')'+\cdots+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')')'+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')')'+$
$\left(\left(k_{n-4}^2(s)+k_{n-5}^2(s)+\cdots+k_2^2(s)\right)/\left(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s)\right)\right)'+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')')'+$
$k_{n-3}(s)/k_{n-2}(s).k_{n-4}(s).\left(1/k_{n-5}(s)\right)'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).\left(k_{n-5}(s)/k_{n-4}(s)\right)'].\rho^{(n-5)}(s)$
$-\cdots-F_2.\rho''(s)-F_1.\rho'(s)-F_0.\rho(s)$
$\boldsymbol{f_n(s)}=\langle-\alpha(s),T_n(s)\rangle=1/k_{n-1}(s).\{[1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s)].\rho^{(n-2)}(s)$
$+[(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))'+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/.k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))'+\cdots+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-3)}(s)+$
$[(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))')'+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')'+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/.k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')'+\cdots+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))')'+$
$(k_{n-3}^2(s)+k_{n-4}^2(s)+\cdots+k_2^2(s))/(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')'+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')'+\cdots+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')'+$
$k_{n-2}(s)/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s)].\rho^{(n-4)}(s)+$
$[((k_{n-3}^2(s)+k_{n-4}^2(s)+\cdots+k_2^2(s))/(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s)))'+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')')'+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')')'+\cdots+$
$(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')')'+$
$(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')\ldots)')')'+$
$\left(\left(k_{n-4}^2(s)+k_{n-5}^2(s)+\cdots+k_2^2(s)\right)/\left(k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s)\right)\right)'+$
$1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')')'+$
$k_{n-3}(s)/k_{n-2}(s).k_{n-4}(s).\left(1/k_{n-5}(s)\right)'+$
$1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).\left(k_{n-5}(s)/k_{n-4}(s)\right)'+$
$k_{n-2}(s)/k_{n-3}(s)\,(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))'+$
$k_{n-2}(s)/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))'+$
$k_{n-2}(s)/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).(1/.k_{n-6}(s).k_{n-7}(s)\ldots k_2(s))'+\cdots+$
$k_{n-2}(s)/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-5)}(s)+$
$+\cdots+(F_2+D_2).\rho''(s)+(F_1+D_1).\rho'(s)+(F_0+D_0).\rho(s)+$

3. Sonuç: Burada $f_n(s).k_{n-1}(s)$ eşitliği, E^{n-1} uzayında bir eğrinin bir kürede bulunması için bir gerek ve yeter koşul belirler.

$\boldsymbol{f_n'(s)} = -\langle \alpha'(s), T_n(s)\rangle - \langle \alpha(s), T_n{}'(s)\rangle = \langle -\alpha(s), -k_{n-1}(s)T_{n-1}(s)\rangle =$
$[1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s)].\rho^{(n-1)}(s) +$
$[(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/.k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))' + \cdots +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))'].\rho^{(n-2)}(s) +$
$[(1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/.k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')' + \cdots +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))')' +$
$(k_{n-3}^2(s) + k_{n-4}^2(s) + \cdots + k_2^2(s))/(k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s)) +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')' + \cdots +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\ldots k_2(s))')'$
$+ \cdots +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s).\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')'$
$+ 1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\ldots(1/k_2(s))')^{\cdots})')'$
$+k_{n-2}(s)/k_{n-1}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s)].\rho^{(n-3)}(s) +$
$+ \cdots + G_2.\rho''(s) + G_1.\rho'(s) + G_0.\rho(s)$

Diğer taraftan $f_{n-1}(s) = \langle -\alpha(s), T_{n-1}(s)\rangle$ olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$f_n'(s) = -k_{n-1}(s)f_{n-1}(s)$
$f_n'(s) + k_{n-1}(s)f_{n-1}(s) = 0$

4. Sonuç: Bu elde edilen $f_n'(s) + k_{n-1}(s)f_{n-1}(s) = 0$ eşitliği, E^n uzayında bir eğrinin bir kürede bulunması için bir gerek ve yeter koşul belirler. Daha açık bir ifadeyle burada E^n öklid uzayında küresel eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem elde edilmiş oldu. Bu denklem aşağıdaki gibi $(n-1)$. mertebeden, değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklemdir.

$$R_{n-1}(s)\rho^{(n-1)} + R_{n-2}(s)\rho^{(n-2)} + R_{n-3}(s)\rho^{(n-3)} + \ldots + R_1(s)\rho' + R_0(s)\rho = 0 \qquad (1)$$

4. E^n Uzayında Küresel Eğrileri Karakterize Eden Diferansiyel Denklemin Çözümü

$h(s)=0$ iken (1) diferansiyel denkleminin aşağıdaki ifadeye denk olduğu açıktır.

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k(s)\rho^{(k)}(s) = h(s) \qquad (2)$$

Burada $R_k(s)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\boldsymbol{R_{n-1}(s)} = 1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s)$
$\boldsymbol{R_{n-2}(s)} = (1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/.k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))' + \cdots +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))'$
$\boldsymbol{R_{n-3}(s)} = (1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/.k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')' + \cdots +$
$(1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s)\ldots k_3(s)(1/k_2(s))')' +$
$(k_{n-3}^2(s) + k_{n-4}^2(s) + \cdots + k_2^2(s))/(k_{n-1}(s).k_{n-2}(s)\ldots k_2(s)) +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\ldots k_2(s))')' +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_2(s))')' + \cdots +$
$1/k_{n-1}(s).(1/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\ldots k_3(s).(1/k_2(s))')' +$

$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_2(s))')' +$
$1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s).k_{n-6}(s)\dots k_2(s))')' +$
$\dots + 1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).(1/k_{n-3}(s).k_{n-4}(s).k_{n-5}(s)\dots k_3(s).(1/k_2(s))')'$
$+ 1/k_{n-1}(s).k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).(1/k_{n-4}(s).(1/k_{n-5}(s)\dots(1/k_2(s))')^{\cdots})' +$
$k_{n-2}(s)/k_{n-1}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s) +$
$k_{n-1}(s)/k_{n-2}(s).k_{n-3}(s).k_{n-4}(s)\dots k_2(s)$

Bu şekilde devam ederek $R_{n-4}(s),\dots,R_2(s),R_1(s),R_0(s)$ hesaplanır. Şimdi (1) denkleminin $0 \le s \le b$ aralığında,

$$\rho(s) = \sum_{m=0}^{N} a_m s^m \tag{3}$$

şeklinde kesilmiş Taylor serisi formunda,

$$\begin{aligned}
\rho(0) &= p_0 \\
\rho'(0) &= p_1 \\
\rho''(0) &= p_2 \\
&\vdots \\
\rho^{(n-3)}(0) &= p_{n-3} \\
\rho^{(n-2)}(0) &= p_{n-2}
\end{aligned}$$

şeklinde genel Taylor polinomlarının başlangıç koşulları altında bir yaklaşık çözümünün olduğu kabul edilsin. Burada $N = n$ olarak alınsın ve bu yaklaşık çözüm matris formunda aşağıdaki gibi gösterilsin.

$$\rho(s) = S(s)A$$

Burada $S(s)$ ve A matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S(s) = [1 \quad s \quad s^2 \quad s^3 \quad s^4 \quad \dots \quad s^n], A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n]^t$$

Diğer taraftan $\rho(s)$ nin türevleri için,

$$\begin{aligned}
\rho'(s) &= S(s)BA \\
\rho''(s) &= S(s)B^2A \\
\rho'''(s) &= S(s)B^3A \\
&\vdots \\
\rho^{(n-3)}(s) &= S(s)B^{n-3}A \\
\rho^{(n-2)}(s) &= S(s)B^{n-2}A \\
\rho^{(n-1)}(s) &= S(s)B^{n-1}A
\end{aligned}$$

olacak şekilde $(n+1)x(n+1)$ tipinde B, B^2, B^3,…, B^{n-3}, B^{n-2} ve B^{n-1} matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$B = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1).(n-2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n.(n-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$B^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1).(n-2).(n-3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n.(n-1).(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$B^{n-3}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (n-3)! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-2)! & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (n-1)!/2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & n!/6 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{n-2}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (n-2)! & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1)! & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n!/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (n-1)! & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n! \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi bütün bu ifadeler (1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\{R_{n-1}(s)S(s)B^{n-1}+R_{n-2}(s)S(s)B^{n-2}+R_{n-3}(s)S(s)B^{n-3}+\cdots+ R_3(s)S(s)B^3+R_2(s)S(s)B^2+R_1(s)S(s)B+R_0(s)S(s)\}A=h(s) \tag{4}$$

elde edilir. Matris formundaki bu denklemde belirlenen aralığın $s=s_i\,,\ i=0,1,\dots,n$ sıralama noktaları kullanılırsa,

$$s_0=0,\ s_1=b/n\,,\ s_2=2b/n\,, s_3=3b/n\,,\ \dots, s_n=b$$

olmak üzere $k=0,1,2,\dots,n-1$ için aşağıdaki matrisler elde edilir.

$$R_k(s)=\begin{bmatrix} R_k(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & R_k(b/n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k(2\,b/n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_k((n-1)\,b/n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_k(b) \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (b/n) & (b/n)^2 & \cdots & (b/n)^{n-1} & (b/n)^n \\ 1 & (2b/n) & (2\,b/n)^2 & \cdots & (2\,b/n)^{n-1} & (2b/n)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (n-1)\,b/n & ((n-1)\,b/n)^2 & \cdots & ((n-1)\,b/n)^{n-1} & ((n-1)\,b/n)^n \\ 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} & b^n \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan (4) denkleminde

$$\{R_{n-1}(s)S(s)B^{n-1}+R_{n-2}(s)S(s)B^{n-2}+R_{n-3}(s)S(s)B^{n-3}+\cdots+ R_3(s)S(s)B^3+R_2(s)S(s)B^2+R_1(s)S(s)B+R_0(s)S(s)\}=W$$

olarak alınırsa denklem

$$WA=H\rightarrow[W\ ;\ H] \tag{5}$$

şekline dönüşür. W matrisini hesaplanıp denklem artırılmış matris şeklinde yazılır. Diğer taraftan (1) denkleminin genel Taylor polinomlarının başlangıç koşulları altında yaklaşık çözümünün bulunabilmesi için koşulların matris denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho(0)\ =S(0)A=\ p_0$$

$\rho'(0) = S(0)BA = p_1$
$\rho''(0) = S(0)B^2A = p_2$
$\rho'''(0) = S(0)B^3A = p_3$
$\vdots$
$\rho^{(n-3)}(0) = S(0)B^{n-3}A = p_{n-3}$
$\rho^{(n-2)}(0) = S(0)B^{n-2}A = p_{n-2}$

Buradan koşulların matris denkleminin artırılmış matris formunda ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$U_0 = [\,0! \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ;\ p_0\,]$
$U_1 = [\,0 \quad 1! \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ;\ p_1\,]$
$U_2 = [\,0 \quad 0 \quad 2! \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ;\ p_2\,]$
$\vdots$
$U_{n-2} = [\,0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad (n-2)! \quad 0 \quad 0\ ;\ p_{n-2}\,]$

olmak üzere aşağıdaki artırılmış matris elde edilir.

$$U = \begin{bmatrix} 0! & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & p_0 \\ 0 & 1! & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & p_1 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-2)! & 0 & 0 & ; & p_{n-2} \end{bmatrix}$$

Burada $P = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-2} \end{bmatrix}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik aşikardır.

$$UA = P \ \rightarrow\ [\,U\ ;\ P\,] \tag{6}$$

(5) ve (6) eşitliklerinden $W^*A = H^*$ elde edilir.

$$[\,W^*;\ H^*] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0(n-2)} & w_{0(n-1)} & w_{0n} & ; & h_0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1(n-2)} & w_{1(n-1)} & w_{1n} & ; & h_1 \\ 0! & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & ; & p_0 \\ 0 & 1! & \cdots & 0 & 0 & 0 & ; & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (n-2)! & 0 & 0 & ; & p_{n-2} \end{bmatrix}$$

Burada;

$w_{00} = R_0(0),\ \ w_{01} = R_1(0), \ldots,\ w_{0(n-2)} = (n-2)!\,R_{n-2}(0)$
$w_{0(n-1)} = (n-1)!\,R_{n-1}(0),\ w_{0n} = 0, w_{10} = R_0(b/n),$
$w_{11} = (b/n).R_0(b/n) + R_1(b/n), \ldots,$
$w_{1(n-2)} = (b/n)^{n-2}.R_0(b/n) + (n-2).(b/n)^{n-3}.R_1(b/n) +$
$(n-2).(n-3).(b/n)^{n-4}.R_2(b/n)$
$+(n-2).(n-3).(n-4).(b/n)^{n-5}.R_3(b/n) + \cdots +$
$(n-2)!\,(b/n).R_{n-3}(b/n) + (n-2)!\,R_{n-2}(b/n),$
$w_{1(n-1)} = (b/n)^{n-1}.R_0(b/n) + (n-1).(b/n)^{n-2}.R_1(b/n) +$
$(n-1).(n-2)\,.(b/n)^{n-3}.R_2(b/n)$
$+(n-1).(n-2).(n-3)\,(b/n)^{n-4}.R_3(b/n) + \cdots +$
$(n-1)!\,(b/n).R_{n-2}(b/n) + (n-1)!\,R_{n-1}(b/n),$
$w_{1n} = (b/n)^n.R_0(b/n) + n.(b/n)^{n-1}.R_1(b/n) +$
$n.(n-1)\,.(b/n)^{n-2}.R_2(b/n) + n.(n-1).(n-2).(b/n)^{n-3}.R_3(b/n)$
$+ \cdots + (n!/2)\,.(b/n)^2.R_{n-2}(b/n) + n!\,(b/n).R_{n-1}(b/n)$

olarak hesaplanır. Ayrıca h_0 ve h_1 sıfırdır. Böylece bilinmeyenler matrisi $A = {W^*}^{-1}H^*$ olarak bulunur. Buna göre $A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \ldots \quad a_n]^t$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$a_0 = p_0\ , a_1 = p_1\ , a_2 = (1/2!)\,p_2\ , \ldots, a_{n-2} = [1/(n-2)!]\,p_{n-2}\ ,$
$a_{n-2} = 1/(n-2)!\,p_{n-2}$
$a_{n-1} = \big(w_{00}w_{1n} - w_{0n}w_{10}/w_{1(n-1)}w_{0n} - w_{1n}w_{0(n-1)}\big).p_0\ +$
$\big(w_{11}w_{00} - w_{01}w_{1n}/w_{1n}w_{0(n-1)} - w_{1(n-1)}w_{0n}\big).p_1\ + \cdots +$
$1/(n-2)!\,\big(w_{1(n-2)}w_{0n} - w_{0(n-2)}w_{1n}/w_{1n}w_{0(n-1)} - w_{1(n-1)}w_{0n}\big).p_{n-2}$
$a_n = \big(w_{00}w_{1(n-1)} - w_{10}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)} - w_{1(n-1)}w_{0n}\big).p_0\ +$
$\big(w_{01}w_{1(n-1)} - w_{11}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)} - w_{1(n-1)}w_{0n}\big).p_1$

$+\cdots+1/(n-2)!$
$.\left(w_{0(n-2)}w_{1(n-1)}-w_{1(n-2)}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right).p_{n-2}$

Bu a_m bilinmeyenleri (3) eşitliğinde yerine konulursa;

$\rho(s)=p_0\ +p_1 s+\ (1/2!)\,p_2\ s^2+\cdots+1/(n-2)!\,p_{n-2}\ s^{n-2}+$
$[\left(w_{00}w_{1n}-w_{0n}w_{10}/w_{1(n-1)}w_{0n}-w_{1n}w_{0(n-1)}\right).p_0\ +$
$\left(w_{11}w_{00}-w_{01}w_{1n}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right).p_1\ +\cdots+$
$1/(n-2)!\left(w_{1(n-2)}w_{0n}-w_{0(n-2)}w_{1n}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right).$
$p_{n-2}\ ].s^{n-1}+$
$[\left(w_{00}w_{1(n-1)}-w_{10}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right).p_0\ +$
$\left(w_{01}w_{1(n-1)}-w_{11}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right).p_1+\cdots+$
$1/(n-2)!\left(w_{0(n-2)}w_{1(n-1)}-w_{1(n-2)}w_{0(n-1)}/w_{1n}w_{0(n-1)}-w_{1(n-1)}w_{0n}\right)$
$p_{n-2}].s^n$

elde edilir. Bulunan bu ifade $\alpha\subset E^n$ küresel eğrisinin eğrilik yarıçapı ve aynı zamanda bu eğriyi belirleyen f_2 fonksiyonudur. Benzer yöntemle aynı başlangıç koşulları altında, diğer f_i fonksiyonları bulunur.
Böylece E^n küresel eğrilerini karakterize eden (1) diferansiyel denkleminin çözüm kümesine ulaşılmış olur.

5. Sonuç ve Öneriler

(1) diferansiyel denkleminden n=3 özel halinde,

$R_2(s)=1/k_2(s)=1/\tau(s)$
$R_1(s)=(1/k_2(s))'=(1/\tau(s))'$
$R_0(s)=k_2(s)=\tau(s)$

olmak üzere aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$R_2(s)\rho''+R_1(s)\rho'+R_0(s)\rho=0 \qquad (7)$$

Bu denklem E^3 uzayında küresel eğrileri karakterize eden $\rho(s)$ fonksiyonuna bağlı diferansiyel denklemdir. $\forall\, n\geq 2$ değeri için küresel eğrileri karakterize eden değişken katsayılı, lineer, homojen bir diferansiyel denklem elde edilebilir. Ayrıca her bir boyut için elde edilen denklemler aynı metotla çözüme kavuşturulabilir.

Herhangi bir uzayda küresel eğrilerin geometrik özelliklerinin yorumlanabilmesi bu eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem ya da denklem sistemleri ile mümkündür. Bu çalışmada öncelikle küresel eğrilerin n boyutlu Öklid uzayında karşılığı olan diferansiyel denklem ilk kez açıkça elde edilmiştir. Ardından elde edilen bu denklemin bir integral karakterizasyonu değil yaklaşık bir çözümü bulunmuştur. Bu çözüm ile küresel eğrilerin geometrik özelliklerini Öklid uzayı adına her boyutta irdelemek mümkündür. Ayrıca benzer çalışmalar aynı uzayda farklı özel eğri tipleri için de yapılabilir. Diğer taraftan küresel eğri kavramı farklı uzaylarda ele alınarak elde edilen denklem ya da denklem sistemleri aynı veya farklı yöntemlerle çözülebilir. Belirlenen sıralama noktalarında, verilen başlangıç koşullarına dayalı ve matrisler yardımıyla elde edilen bu yaklaşık çözüm bu eğri tipinin daha iyi anlaşılması ve değişik uygulama alanlarında kendine kolaylıkla yer edinebilmesi adına önemlidir.

Kaynaklar

Aydın, T.A., 2014. Differential Equations Characterizing Curves Of Constant Breadth And Spherical Curves In E^n –Space And Their Solutions, Doktora Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla

Blaschke, W., 1917. Leipziger Berichte, 67, 290s.

Bruer, S. ve Gottlieb, D., 1971. Explicit Characterization of Spherical Curves, Proc. Amer. Math. Soc., 27 (1), 126-127.

Cheng-Chung, H., 1981. A Differential Geometric Criterion For A Space Curve To Be Closed, Proc. Amer. Math. Soc., 81, (4), 357-361.

Dannon, V., 1981. Integral Characterizations And The Theory of Curves, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (4), 600-602.

Euler, L., 1778-1780. De Curvis Trangularibis, Acta Acad. Petropol., 3-30.

Fujivara, M., 1914. On Space Curves Of Constant Breadth, Thoku Math. J., 5, 179-184.

Gluck. H., 1966. Higher Curvatures Of Curves In Euclidean Space, Proc. Amer. Math. Montly, 73, 699-704.

Hacısalihoğlu, H.H., 1993. Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 269s.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998. Lineer Cebir-Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 480s.

Hacısalihoğlu, H.H., 2000. Diferansiyel Geometri-Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 340s.

Karamete A., 1996. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Sıralama Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 43.

Karger, A. ve Novak, J., 1985. Space Kinematics And Lie Groups, Gordon And Breach Science Publishers.

Mağden, A., 1990. R^4 – Uzayında Bazı Özel Eğriler Ve Karakterizasyonları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 34.

Reuleaux, F., 1963. The Kinematics Of Machinery, Trans. By Kennedy A.B.W., Dover Pub., New York.

Sezer, M., 1989a. Frenet Benzeri Bir Diferansiyel Denklem Sisteminin İntegral Özellikleri Ve Uygulamaları, II. Ulusal Matematik Sempozyumu, 25 - 28 Eylül 1989, İzmir, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Baskı İşleri, Bildiriler Kitabı, 1. Cilt, 435-444.

Sezer, M., 1989b. Differential Equations Characterizing Space Curves Of Constant Breadth And A Criterion For These Curves, Doğa TU J. Math., 13 (2), 70-78.

Sezer, M., 1989c. Differential Equations And Integral Characterizations For E^4 Spherical Curves, Doğa TU J. Math., 13 (3), 125-131.

Sezer, M., 1996. A Method For The Approximate Solution Of The Second Order Linear Differential Equations In Terms Of Taylor Polynomials, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 27 (6), 821- 834.

Wong, Y-C., 1963. A Global Formulation Of The Condition For A Curve To Lie In A Sphere, Monatsh. Math., 67 (4): 363-365

Wong, Y-C., 1972. On An Explicit Characterization Of Spherical Curves, Proc. Amer. Math. Soc., 34 (1), 239-242.