

ARAŞTIRMA MAKALESİ

Dual Lorentziyen Birim Küresel Timelike Eğrilerin Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi**Burak Şahiner¹, Mustafa Kazaz¹, Hasan Hüseyin Uğurlu²**¹Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa.²Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, Ankara.

e-posta:burak.sahiner@cbu.edu.tr, mustafa.kazaz@cbu.edu.tr, hugurlu@gazi.edu.tr

Geliş Tarihi:28.04.2017

; Kabul Tarihi:10.08.2018

Anahtar kelimeler

Eğrilik teorisi; Dual Darbouxçatısı; Dual Lorentziyen uzay; Robot uç-işlevci; Robot yörünge planlaması

Özet

Bu çalışmada, Lorentziyen uzayda hareket eden bir robot uç-işlevcinin hareketi, robot uç-işlevciye sabitlenmiş bir doğru tarafından oluşturulan spacelike regle yüzeye dual uzayda karşılık gelen dual Lorentziyen birim küresel timelike eğrilerin eğrilik teorisi kullanılarak incelenmiştir. Bu inceleme ile robot yörünge planlamasında önemli rol oynayan robot uç-işlevcinin zamana bağlı lineer ve açılma hızı ile lineer ve açılma ivmesi belirlenmiştir.

Examining Motion of a Robot End-effector Using Curvature Theory of Dual Lorentzian Unit Spherical Timelike Curves**Keywords**

Curvature theory; Dual Darboux frame; Dual Lorentzian space; Robot end-effector; Robot trajectory planning

Abstract

In this paper, motion of a robot end-effector which moves in Lorentzian space is examined using the curvature theory of dual Lorentzian unit spherical timelike curves which correspond to a spacelike ruled surface generated by a line fixed in the robot end-effector. In this way, time dependent linear and angular velocities and accelerations which play important roles in robot trajectory planning.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Robot uç-işlevciler taşımacılık, boyama, tıp, askeri alanlar gibi birçok sahada yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle son zamanlarda göz ameliyatı ve bomba imha gibi hassas hareketin öneme sahip olduğu alanlarda kullanılması, robot uç-işlevcilerin hassas yörünge planlaması alanındaki çalışmaların önem kazanmasına neden olmuştur. Robot yörüngelerinin planlanması alanındaki en önemli problemlerden biri, robot uç-işlevci hareketinin zamana bağlı diferansiyel özelliklerinin belirlenmesidir. Bu diferansiyel özellikler robot yörünge planlamasında önemli rol oynayan lineer ve açılma hızı ile lineer ve açılma ivmesidir.

Bir robot uç-işlevci uzayda belirli bir yol boyunca hareket ederken uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı olan bir doğru bir regle yüzey çizer. İlk kez Ryuh ve Pennock (Ryuh ve Pennock 1988, Ryuh 1989, Ryuh ve Pennock 1990) robot uç-işlevci hareketini, uç-işlevciye bağlı doğrunun oluşturduğu regle yüzey ve spin açısı denilen ek bir parametre ile ifade etmişler ve regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özelliklerini belirlemişlerdir. Böylece robot uç-işlevcinin kinematığı ile regle yüzeylerin diferansiyel geometrisi arasında önemli bir bağlantı kurmuşlardır.

Robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özelliklerinin belirlenmesi alanındaki çalışmalar

sadece Öklid uzayında sınırlı kalmamış Lorentz uzayında da çalışılmıştır. Ekici ve diğerleri Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevcinin hareketini timelikedoğuranlıtimelike regle yüzeylerin eğrilik teorisini kullanarak incelemişlerdir (Ekici ve ark. 2008). Ayyıldız ve Turhan ise yörüngesi bir null eğri olan bir robot uç-işlevcinin Lorentz uzaydaki hareketinin diferansiyel özelliklerini belirlemişlerdir (Ayyıldız ve Turhan 2012).

Bu çalışmada Lorentziyen uzayda hareket eden bir robot uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı bir doğrunun oluşturduğu yüzeyin spacelike regle yüzey olduğu varsayılır. E.Study dönüşümünden, bu spacelike regle yüzeye bir dualLorentziyen birim küresel timelike eğri karşılık gelir. Bu dual eğrinin dualDarboux çatısı ile robot uç-işlevci üzerinde tanımlanacak olan dual araç çatısı arasında ilişki kurularak robot uç-işlevci hareketinin zamana bağlı diferansiyel özellikleri belirlenir. Robot uç-işlevcinin lineer ve açısal hızı ile lineer ve açısal ivmesi olan bu diferansiyel özellikler robot yörünge planlanmasında önemli rol oynarlar.

2. Temel Kavramlar

Bu bölümde Lorentziyen uzay, dual uzay, dualLorentziyen uzay ve bu uzayların temel kavramları kısaca tanıtılacaktır.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere, \mathbb{R}^3 reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

biçiminde Lorentziyen iç çarpım tanımlanırsa, \mathbb{R}^3 uzayına 3 boyutlu Lorentz uzayı denir ve \mathbb{R}_1^3 ile gösterilir (O'Neill 1983). $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ ya da $\mathbf{a} = 0$ ise \mathbf{a} vektörüne spacelike; $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0$ ise \mathbf{a} vektörüne timelike; $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ ve $\mathbf{a} \neq 0$ ise \mathbf{a} vektörüne lightlike (null) vektör denir (O'Neill 1983). \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-a_2 b_3 + a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

biçiminde tanımlanır (Turgut 1995).

\mathbf{a} ve \mathbf{b} iki timelike vektör olsun. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cosh \theta$ olacak şekilde $\theta \geq 0$ reel sayısına \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (Ratcliffe 2006).

Bir dual sayı $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ biçiminde tanımlanabilir. a ve a^* reel sayılarına sırasıyla dual sayının reel ve dual kısmı denir. ε ise $\varepsilon^2 = 0$ özelliğini sağlayan dual birimdir (Veldkamp 1976). Dual sayıların kümesi ID ile gösterilir. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\bar{b} = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$\bar{a} + \bar{b} = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*)$$

ve

$$\bar{a} \bar{b} = ab + \varepsilon(ab^* + a^*b)$$

biçiminde tanımlanır (Blaschke 1945, Hacısalihoğlu 1983). Reel kısmı sıfır olan dual sayılarda bölme işlemi tanımlı olmadığından ID kümesi bir cisim değil halkadır. $n > 1$ için $\varepsilon^n = 0$ olduğundan bir dual değişkenli $f(\bar{a})$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımı

$$f(\bar{a}) = f(a + \varepsilon a^*) = f(a) + \varepsilon a^* f'(a),$$

biçimindedir. Burada $f'(a)$, $f(a)$ fonksiyonunun a ya göre türevidir (Bottema ve Roth 1979).

Dual sayılara benzer şekilde, $\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere bir dual vektör $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ biçiminde tanımlanır (Schaaf 1988). Dual vektörler kümesine ID halkası üzerinde dual uzay ya da ID -modül denir ve ID^3 ile gösterilir.

$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ ve $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{b}^*$ dual vektörlerinin dualLorentziyen iç çarpımı ve vektörel çarpımı sırasıyla

$$\langle \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \varepsilon (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^* \rangle + \langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b} \rangle)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \varepsilon (\mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \times \mathbf{b}),$$

biçiminde tanımlanır (Uğurlu ve Çalışkan 1996). Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Lorentziyen iç çarpımı ve \times , Lorentziyen vektörel çarpımı gösterir. \mathbf{a} timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) ise $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ dual vektörüne timelike (sırasıyla spacelike, timelike) dual vektör denir (Uğurlu ve Çalışkan 1996). Dual

Lorentziyen vektörlerin kümesine dual Lorentziyen uzay denir ve ID_1^3 ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

$\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olmak üzere $\langle a, a \rangle = 1$ ve $\langle a, a^* \rangle = 0$ özelliklerini sağlayan \tilde{a} dual vektörüne birim dualspacelike vektör denir. Birim dualspacelike vektörlerin kümesine dual Lorentziyen birim küre denir ve \tilde{S}_1^2 ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

\tilde{a} ve \tilde{b} iki dualtimelike vektör olsun. $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = -\|\tilde{a}\| \|\tilde{b}\| \cosh \bar{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına, \tilde{a} ve \tilde{b} dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

ID^3 dual uzayın birim dual vektörleri, IR^3 çizgiler uzayının yönlü doğrularına birebir karşılık gelir (Guggenheimer 1956). Bu karşılık getirmeye E.Study dönüşümü denir (Study 1903). IR^3 çizgiler uzayı yerine IR_1^3 Lorentziyen uzay alınır, E.Study dönüşümü şu şekilde ifade edilebilir: “ \tilde{S}_1^2 Lorentziyen birim dual kürenin spacelike birim vektörleri, IR_1^3 Lorentziyen uzayın yönlü spacelike doğrularına birebir karşılık gelir” (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

3. Robot Uç-işlevci ve Dual Araç Çatısı

Ryuh ve Pennock (1988, 1990), Öklidyen uzayda robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özelliklerini incelemek için, uç-işlevci üzerinde bir araç çatısı tanımlamışlardır. Bu bölümde, (Ryuh ve Pennock 1988, Ryuh ve Pennock 1990) çalışmalarında tanımlanan araç çatısına benzer şekilde, Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci için araç çatısı tanımlanacaktır. Daha sonra, araç çatısındaki vektörler yerine yönlü doğrular alınarak robot uç-işlevci üzerinde bir dual araç çatısı tanımlanacaktır. Dual araç çatısı, hareketin diferansiyel özelliklerinin belirlenmesinde önemli bir rol oynayacaktır.

Araç çatısı, robot uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı, üç ortogonal birim vektörden oluşur. Şekil 1 de gösterildiği gibi, bu vektörler: O yönlenme vektörü, A yaklaşım vektörü ve N normal vektördür. Araç çatısının orijinine araç merkez noktası denir. Bu çalışmada, robot uç-işlevcinin, A yaklaşım vektörü timelike, O yönlenme vektörü ve N normal vektör spacelike olacak şekilde kısıtlı bir hareket yaptığı varsayılmaktadır. Araç çatısını oluşturan vektörlerin farklı Lorentziyen karakterleri için, benzer işlemler yapılarak istenen sonuçlar elde edilebilir.

Robot uç-işlevci Lorentziyen uzayda hareket ederken araç merkez noktasından geçen ve O spacelike yönlenme vektörüne paralel olan bir doğru bir regle yüzey çizer. Bu regle yüzey

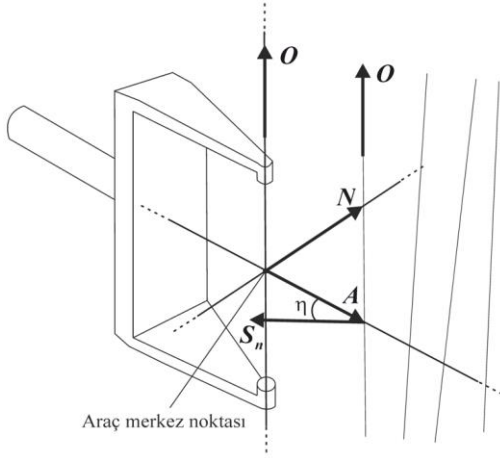
$$X(t, v) = \alpha(t) + v R(t),$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada α regle yüzeyin dayanak eğrisi ve aynı zamanda robot uç-işlevcinin izlediği yörüngedir. R , O yönlenme vektörüne paralel olan regle yüzeyin ana doğrularının sabit büyüklüklü yön vektörüdür ve R ye doğuran denir. t ise zaman parametresidir. R vektörü O yönlenme vektörüne paralel olduğundan, bir spacelike vektördür. Bu çalışmada $X(t, v)$ regle yüzeyinin spacelike regle yüzey olduğu varsayılmaktadır.

Hareket esnasında A timelike yaklaşım vektörü regle yüzeye daima dik olmayabilir. A timelike yaklaşım vektörü ile dayanak eğrisi üzerindeki timelike yüzey normal (S_n ile gösterilsin) arasında bir hiperbolik açı olabilir (bkz. Şekil 1). Bu açıya hiperbolik spin açısı denilebilir ve η ile gösterilebilir. Böylece, altı serbestlik derecesine sahip robot uç-işlevci hareketi, beş bağımsız parametre ile ifade edilen bir spacelike regle yüzey ve hiperbolik spin açısı ile tam olarak ifade edilebilir.

Şimdi, araç çatısının birim vektörleri yerine yönlü doğrular olarak dual araç çatısını tanımlayalım. Bu doğrular, araç merkez noktasından geçen ve O spacelike yönlenme vektörüne, A timelike yaklaşım vektörüne ve N spacelike normal vektörüne paralel olan doğrulardır. E.Study dönüşümünden, bu doğrulara üç birim dual vektör karşılık gelir. Bu birim dual vektörler \tilde{O} , \tilde{A} ve \tilde{N} ile gösterilebilir ve

sırasıyla dual yönlenme vektörü, dual yaklaşım vektörü ve dual normal vektör olarak isimlendirilebilirler.



Şekil 1. Bir robot uç-işlevcinin dual araç çatısı ve spin açısı.

4. Robot Uç-işlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri

Spacelike ve timelike regle yüzeylerin dualDarboux çatıları, Önder ve Uğurlu (2013, 2015) tarafından detaylı bir şekilde verilmiştir. Bu bölümde, (Önder ve Uğurlu 2013, Önder ve Uğurlu 2015) çalışmalarında izlenen prosedür kullanılarak, robot uç-işlevci hareketi sırasında oluşan spacelike regle yüzeye karşılık gelen dualLorentziyen birim küresel timelike eğrinin dualDarboux çatısı verilecektir. Daha sonra, dualDarboux çatısı ile dual araç çatısı arasında ilişki kurularak robot uç-işlevci hareketinin zamana bağlı diferansiyel özellikleri belirlenecektir.

Lorentziyen uzayda robot uç-işlevci hareketi sırasında uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı olan doğrunun çizdiği spacelike regle yüzeyi, işlem kolaylığı olması bakımından, zaman parametresi yerine regle yüzeyin doğuranlarının küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu parametresi cinsinden

$$\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$$

biçiminde ifade edelim. Burada $\boldsymbol{\alpha}$ regle yüzeyin dayanak eğrisi (robot uç-işlevcinin izlediği yol), \mathbf{R} regle yüzeyin ana doğrularının sabit büyüklüklü spacelike yön vektörü, s , doğuranların küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu parametresidir ve

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right\| dt$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca dualDarboux çatısının üzerinde tanımlı olduğu $\mathbf{X}(s, v)$ regle yüzeyinin boğaz çizgisi \mathbf{c} ile gösterilir ve $\mu = \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{R}' \rangle$ olmak üzere

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha} + \mu \mathbf{R}$$

biçiminde ifade edilebilir.

E. Study dönüşümünden, robot uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı olan bir doğrunun oluşturduğu spacelike regle yüzey, dualLorentziyen birim küre üzerinde bir timelike eğriye karşılık gelir. Bu dual eğri $\tilde{\mathbf{e}}(s) = \mathbf{e}(s) + \varepsilon \mathbf{e}^*(s)$ biçiminde ifade edilebilir. Burada \mathbf{e} , doğuran yönünde birim spacelike vektördür, \mathbf{e}^* , \mathbf{e} vektörünün orijine göre moment vektörüdür ve $\mathbf{e}^* = \mathbf{c} \times \mathbf{e}$ eşitliği ile bulunabilir.

Dual Lorentziyen birim küresel timelike eğrinin dualDarboux çatısı regle yüzeyin boğaz çizgisinden geçen ve birbirine dik olan üç doğruya oluşur. Bu üç doğruya karşılık gelen üç birim dual vektör vardır ve dualDarboux çatısının birinci birim dual vektörü dual eğrinin kendisidir. Dual eğrinin dual yay uzunluğu, $\Delta = \det(\mathbf{c}', \mathbf{e}, \mathbf{t})$ olmak üzere

$$\bar{s} = \int_0^s \left\| \tilde{\mathbf{e}}'(u) \right\| du = \int_0^s (1 + \varepsilon \Delta) du = s + \varepsilon \int_0^s \Delta du .$$

biçiminde verilebilir (Önder ve Uğurlu 2015). Dual Darboux çatısının ikinci ve üçüncü birim dual vektörleri sırasıyla

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{d\tilde{\mathbf{e}}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}'}{1 + \varepsilon \Delta} = \mathbf{t} + \varepsilon(\mathbf{c} \times \mathbf{t}).$$

ve

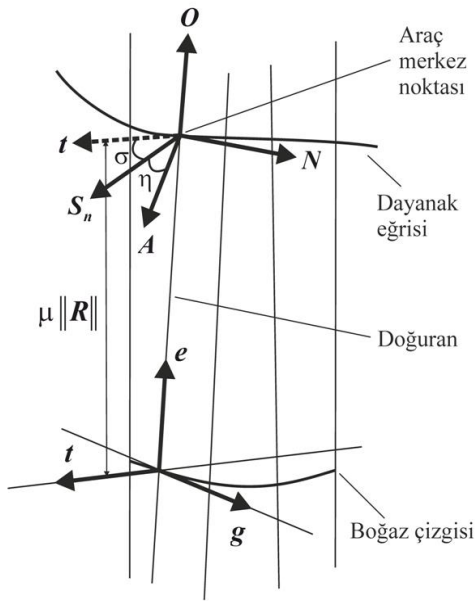
$$\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{e}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{c} \times \mathbf{g}).$$

biçiminde bulunabilir (Önder ve Uğurlu 2015). Burada $\mathbf{t} = \mathbf{e}'$ bir timelike vektör ve $\mathbf{g} = -\mathbf{e} \times \mathbf{t}$ bir spacelike vektör ve \mathbf{c} regle yüzeyin boğaz çizgisidir. Dual Darboux çatısının türev formülleri

$$\frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\bar{\gamma}$ ya dualjeodezik eğrilik denir.

\tilde{A} ve \tilde{t} birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ^* , \tilde{A} ve \tilde{t} birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklık, yani doğuran üzerinde boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan $\mu \|R\|$ dir, φ ise bu doğrular arasındaki hiperbolik açıdır. φ hiperbolik açısı, hiperbolik spin açısı ile regle yüzeyin dayanak eğrisi ve boğaz çizgisi üzerindeki timelike normaller arasındaki hiperbolik açının toplamına eşittir, yani $\varphi = \eta + \sigma$ dir.



Şekil 2. Robot uç-işlevci hareketi sırasında dayanak eğrisi ve boğaz çizgisi arasındaki ilişki.

Dual Lorentziyen birim küresel timelike eğrinin dualDarboux çatısı ile robot uç-işlevcinin dual araç çatısı arasında

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde bir ilişki vardır. Denklem (4.2) nin türevi alınıp denklem (4.1), bu türevde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} \\ \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix},$$

elde edilir. Burada $\bar{\delta} = \bar{\varphi}' + \bar{\gamma}$ dir ve türevler dual yay uzunluğu parametresi \bar{s} ye göre alınmıştır.

Denklem (4.2) kullanılarak dual araç çatısının türev formülleri yine dual araç çatısı cinsinden

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \bar{\varphi} & -\sinh \bar{\varphi} \\ \sinh \bar{\varphi} & 0 & \bar{\delta} \\ \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}.$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{O} - \sinh \bar{\varphi} \tilde{A} + \cosh \bar{\varphi} \tilde{N}$$

olarak bulunur. Denklem (4.2) kullanılarak dual araç çatısının dual ani dönme vektörü, dualDarboux çatısının elemanları cinsinden

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{e} + \tilde{g} \quad (4.3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Robot uç-işlevci hareketindeki dual araç çatısının dual ani dönme vektörü $\tilde{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$, dual küresel hareketin dual hız vektörü olan dualPfaff vektörü (Hacısalıhoğlu 1972) ile aynı rolü oynar. Dolayısıyla \tilde{w}_o , robot uç-işlevci hareketinin dual hız vektörü olarak ele alınabilir. Böylece Lorentziyen uzayda hareket eden bir robot uç-işlevcinin hareketinin,

dual araç çatısının $\frac{\tilde{w}_o}{\|\tilde{w}_o\|}$ ekseninde $\|\tilde{w}_o\|$ dual

açısı ile bir dönmesinden ibaret olduğu söylenebilir. Bu dual hareket, Lorentziyen uzayda hem öteleme hem de dönme hareketine karşılık gelir. Böylece, dual araç çatısının ani dönme vektörünün reel ve dual kısımları olan w_o ve w_o^* sırasıyla robot uç-işlevci hareketinin ani açısal hız vektörü ve ani lineer hız vektörüne karşılık gelir. Denklem (4.3) reel ve dual kısımlarına ayrılırsa

$$w_o = -\delta e + g \quad (4.4)$$

ve

$$w_o^* = -\delta e^* - \delta^* e + g^* \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada w_o ve w_o^* vektörleri, R nin küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu parametresi olan s cinsinden bulunmuştur. Robot uç-işlevci hareketinin zamana bağlı diferansiyel özelliklerini belirlemek için (4.4) ve (4.5) de verilen ani açısal ve lineer hız vektörleri, t zaman parametresi ile ilişkilendirilmelidir. Şimdi Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevcinin zamana bağlı lineer ve açısal hızlarını aşağıdaki sonuç ile verebiliriz.

Sonuç 4.1. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. Robot uç-işlevcinin lineer ve açısal hızları sırasıyla

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{w}_O^* \dot{s} \quad (4.6)$$

ve

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{w}_O \dot{s} \quad (4.7)$$

biçimindedir. Burada \mathbf{w}_O^* ve \mathbf{w}_O , sırasıyla (4.5) ve (4.4) denklemlerinde verildiği gibidir ve nokta, zamana göre türevi gösterir, yani $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ dir.

(4.3) denkleminin türevi alınır ve (4.1) denklemi kullanılırsa, dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün türevi

$$\tilde{\mathbf{w}}_O' = -\bar{\delta}' \tilde{\mathbf{e}} - \bar{\varphi}' \tilde{\mathbf{t}} \quad (4.8)$$

olarak elde edilebilir. (4.8) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$\mathbf{w}_O' = -\delta' \mathbf{e} - \varphi' \mathbf{t} \quad (4.9)$$

ve

$$\mathbf{w}_O^{*'} = -\delta' \mathbf{e}^* - \delta^{*'} \mathbf{e} - \varphi' \mathbf{t}^* - \varphi^{*'} \mathbf{t} \quad (4.10)$$

bulunur. Burada \mathbf{w}_O' ve $\mathbf{w}_O^{*'}$ sırasıyla ani açısal hız vektörü ve ani lineer ivme vektörüdür. Bu vektörler de zaman parametresi ile ilişkilendirilerek Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevcinin lineer ve açısal ivmelerine ilişkin sonuç aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 4.2. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. Robot uç-işlevcinin lineer ve açısal ivmeleri sırasıyla

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{w}_O^* \ddot{s} + \mathbf{w}_O^{*'} \dot{s}^2 \quad (4.11)$$

ve

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{w}_O \ddot{s} + \mathbf{w}_O' \dot{s}^2 \quad (4.12)$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{w}_O^{*'}$ ve \mathbf{w}_O' sırasıyla (4.10) ve (4.9) denklemlerinde verildiği gibidir ve $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$ dir.

Şimdi bir robot uç-işlevci hareketinde karşılaşılabilecek bazı özel durumları ele alacağız. Bu özel durumlardan biri, robot uç-işlevci hareketi

boyunca η hiperbolik spin açısının sabit kalma durumudur. Daha özel olarak, η hiperbolik spin açısı sıfır da olabilir, yani hareket boyunca robot uç-işlevci, regle yüzeye Lorentz anlamda daima dik olabilir. Bir diğer özel durum ise, robot uç-işlevcinin izlediği yörünge regle yüzeyin boğaz çizgisi olması durumudur, yani regle yüzeyin dayanak eğrisi ile boğaz çizgisi aynı eğridir. Dolayısıyla dayanak eğrisi ile boğaz çizgisi arasındaki uzaklık ve bu eğriler üzerindeki yüzey normaleri arasındaki açı sıfırdır. Bu özel durumlar için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.3. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. η hiperbolik spin açısı sabit ise robot uç-işlevcinin lineer ve açısal hızları sırasıyla

$$\mathbf{v}_L = (-\sigma' + \gamma) \mathbf{e}^* - \delta^* \mathbf{e} + \mathbf{g}^* \dot{s}$$

ve

$$\mathbf{v}_A = (-\sigma' + \gamma) \mathbf{e} + \mathbf{g} \dot{s}$$

biçimindedir.

Sonuç 4.4. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. η hiperbolik spin açısı sabit ise robot uç-işlevcinin lineer ve açısal ivmeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_L = & (-\sigma' + \gamma) \mathbf{e}^* - \delta^* \mathbf{e} + \mathbf{g}^* \dot{s} \\ & + (-\sigma'' + \gamma') \mathbf{e}^* - \delta^{*'} \mathbf{e} - \sigma' \mathbf{t}^* - \varphi^{*'} \mathbf{t} \dot{s}^2 \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{a}_A = (-\sigma' + \gamma) \mathbf{e} + \mathbf{g} \ddot{s} + (-\sigma'' + \gamma') \mathbf{e} - \varphi' \mathbf{t} \dot{s}^2$$

biçimindedir.

Sonuç 4.5. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. robot uç-işlevcinin izlediği yörünge regle yüzeyin boğaz çizgisi ise robot uç-işlevcinin lineer ve açısal hızları sırasıyla

$$\mathbf{v}_L = (-\eta' + \gamma) \mathbf{e}^* - \gamma^* \mathbf{e} + \mathbf{g}^* \dot{s}$$

ve

$$\mathbf{v}_A = (-\eta' + \gamma) \mathbf{e} + \mathbf{g} \dot{s}$$

biçimindedir.

Sonuç 4.6. Lorentz uzayda hareket eden bir robot uç-işlevci hareketi, $\mathbf{X}(s, v) = \boldsymbol{\alpha}(s) + v \mathbf{R}(s)$ spacelike regle yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin. robot uç-işlevcinin izlediği yörünge regle yüzeyin boğaz çizgisi ise robot uç-işlevcinin lineer ve açısal ivmeleri sırasıyla

$$\mathbf{a}_L = (-\eta' + \gamma) \mathbf{e}^* - \gamma^* \mathbf{e} + \mathbf{g}^* \dot{s} \\ + (-\eta'' + \gamma') \mathbf{e}^* - \gamma'^* \mathbf{e} - \eta' \mathbf{t}^* \dot{s}^2$$

ve

$$\mathbf{a}_A = (-\eta' + \gamma) \mathbf{e} + \mathbf{g} \dot{s} + (-\eta'' + \gamma') \mathbf{e} - \eta' \mathbf{t} \dot{s}^2$$

biçimindedir.

Örnek 4.7. Bir robot uç-işlevcinin Lorentziyen uzaydaki hareketi, $\mathbf{X}(t, v) = (t, v \cosh t, v \sinh t)$ denklemlili ikinci tip helikoid yüzeyi (Dillen ve Sodsiri 2005) ve η hiperbolik spin açısı ile verilsin (bkz. Şekil 3). Bu yüzey $-1 < v < 1$ için bir spacelike regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğuranları sırasıyla $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, 0, 0)$ ve $\mathbf{R}(t) = (0, \cosh t, \sinh t)$ dir. $\boldsymbol{\mu} = \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{R}' \rangle = 0$

olduğundan bu regle yüzeyin dayanak eğrisi aynı zamanda boğaz çizgisidir, yani $\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha}$ dır. E.Study dönüşümünden, bu regle yüzeye karşılık gelen bir dual Lorentziyen birim küresel timelike eğri vardır. Bu dual eğri

$\tilde{\mathbf{e}}(s) = (0, \cosh s, \sinh s) + \varepsilon(0, s \sinh s, s \cosh s)$ olarak elde edilir. Burada s , doğuranların küresel gösterge eğrisinin yay uzunluğu parametresidir. Dual eğrinin Darboux çatısının birinci birim dual

vektörü, $\tilde{\mathbf{e}}(s)$ dual eğrisidir. Dual Darboux çatısının ikinci ve üçüncü birim dual vektörleri sırasıyla $\tilde{\mathbf{t}}(s) = (0, \sinh s, \cosh s) + \varepsilon(0, s \cosh s, s \sinh s)$ ve

$$\tilde{\mathbf{g}}(s) = (1, 0, 0)$$

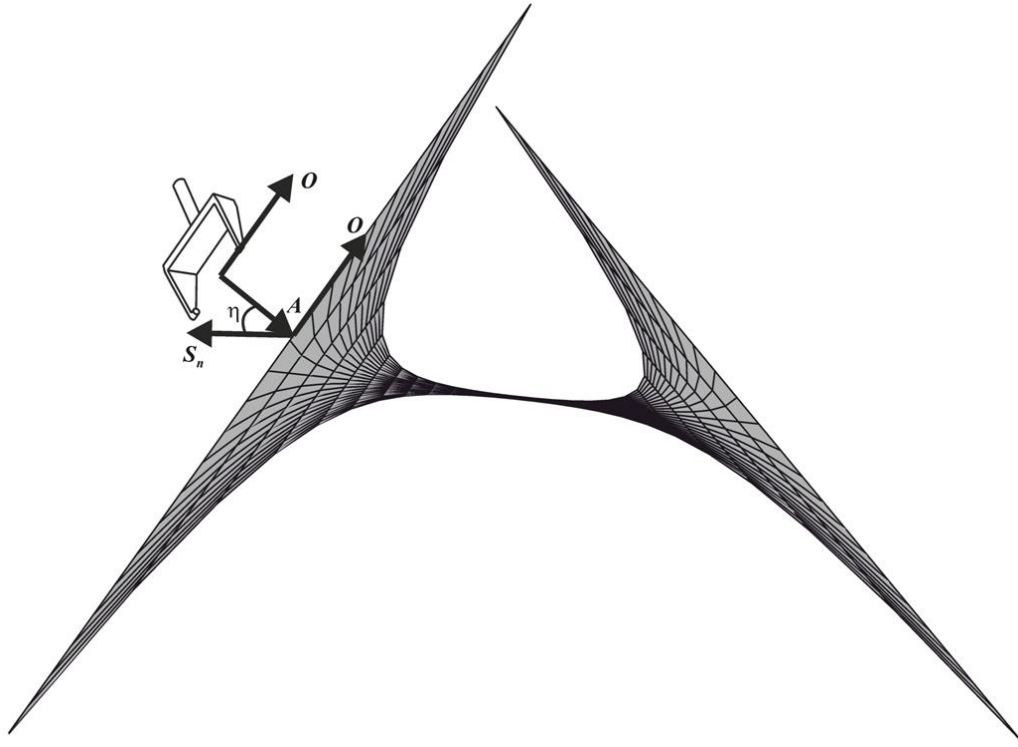
biçiminde bulunur. Denklem (4.1) kullanılarak, dual jeodezik eğrilik $\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* = 0 + \varepsilon 0$ olarak bulunur. Dayanak eğrisi aynı zamanda boğaz çizgisi olduğundan, dayanak eğrisi ve boğaz çizgisi arasındaki uzaklık $\varphi^* = 0$ dır ve bu iki eğri üzerindeki yüzey normaleri arasındaki açı $\sigma = 0$ dır. Böylece $\bar{\varphi} = \eta$ ve $\bar{\delta} = \eta'$ olarak bulunur. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{w}_0 + \varepsilon \mathbf{w}_0^* = (1, -\eta' \cosh s, -\eta' \sinh s) \\ + \varepsilon(0, -\eta' s \sinh s, -\eta' s \cosh s)$$

biçiminde bulunur. Robot uç-işlevcinin açısal ve lineer hızı \mathbf{w}_0 ve \mathbf{w}_0^* vektörlerinin sırasıyla (4.7) ve (4.6) denklemlerinde yerine yazılması ile bulunabilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün türevi alınarak

$$\tilde{\mathbf{w}}_0' = \mathbf{w}_0' + \varepsilon \mathbf{w}_0^{*'} \\ = (0, -\eta'' \cosh s - \eta' \sinh s, -\eta'' \sinh s - \eta' \cosh s) \\ + \varepsilon(0, -\eta'' s \sinh s - \eta' s \cosh s, -\eta'' s \cosh s - \eta' s \sinh s)$$

bulunur. Robot uç-işlevcinin açısal ve lineer ivmesi ise \mathbf{w}_0' ve $\mathbf{w}_0^{*'}$ vektörlerinin sırasıyla (4.12) ve (4.11) denklemlerinde yerine yazılması ile bulunabilir.



Şekil 3. İkinci tip helikoid yüzeyi ve η hiperbolik spin açısı ile verilen bir robot uç-işlevci hareketi.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, bir robot uç-işlevci hareketinin, robot uç-işlevciye bağlı bir doğru tarafından oluşturulan spacelike regle yüzeye karşılık gelen dual Lorentziyen birim küresel timelike eğrinin eğrilik teorisi kullanılarak incelenebileceği gösterilmiştir. Robot uç-işlevci hareketinin zamana bağlı diferansiyel özellikleri olan lineer ve açısal hızlar ile lineer ve açısal ivmeler belirlenmiştir. Bu diferansiyel özellikler, robot yörünge planlamasında önemli rollere sahiptir. Kullanılan dual yöntem sayesinde, iki parametreye sahip bir spacelike regle yüzey, dual uzayda bir parametrelili bir Lorentziyen birim küresel timelike eğri olarak ele alınır. Böylece kullanılan formüller daha basit bir şekilde ifade edilebilir ve parametre fazlalığından kaçınılır. Bu çalışmanın Lorentz uzayda robot yörünge planlaması alanına katkı sağlayacağına inanılır. Literatürde var olan reel uzaydaki regle yüzeylerin eğrilik teorisi kullanımı ile bu çalışmada anlatılan dual uzaydaki bir Lorentziyen birim küresel eğrinin eğrilik teorisi kullanımı arasında hesaplama sürelerini kıyaslayacak bir bilgisayar programı oluşturulması, ilerideki çalışma konularından biri olabilir.

Kaynaklar

- Ayyıldız, N. and Turhan, T., 2012. A Study on a ruled surface with lightlike ruling for a null curve with Cartan frame. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **49(3)**, 635-645.
- Blaschke, W., 1945. *Differential Geometrie und Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*. Dover, New York.
- Bottema, O. and Roth, B., 1979. *Theoretical Kinematics*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 558.
- Dillen, F. and Sodsiri, W., 2005. Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry*, **83**, 10-21.
- Ekici, C., Ünlütürk, Y., Dede, M. and Ryuh, B.S., 2008. On motion of robot end-effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike ruling. *Mathematical Problems in Engineering*, **2008**, Article ID 362783.

- Guggenheimer, H.W., 1956. Differential Geometry. McGraw-Hill, New York, 378.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1972. On the pitch of a closed ruled surface. *Mechanism and Machine Theory*, **7**, 291-305.
- Hacısalihoğlu, H.H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi*, Ankara, 338.
- O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press*, London, 468.
- Önder, M. and Uğurlu, H.H., 2013. Dual Darboux frame of a timelike ruled surface and Darboux approach to Mannheim offsets of timelike ruled surfaces. *Proceeding of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, **83(2)**, 163-169.
- Önder, M. and Uğurlu, H.H., 2015. Dual Darboux frame of a spacelike ruled surface and Darboux approach to Mannheim offsets of spacelike ruled surfaces. *Natural Science and Discovery*, **1(1)**, 29-41.
- Ratcliffe, J.G., 2006. Foundations of Hyperbolic Manifolds. *Springer*, New York, 779.
- Ryuh, B.S., 1989. Robot trajectory planning using the curvature theory of ruled surfaces. Doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Ind, USA.
- Ryuh, B.S. and Pennock, G.R., 1988. Accurate motion of a robot end-effector using the curvature theory of ruled surfaces. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **110(4)**, 383-388.
- Ryuh, B.S. and Pennock, G.R., 1990. Trajectory planning using the Ferguson curve model and curvature theory of a ruled surface. *Journal of Mechanical Design*, **112**, 377-383.
- Schaaf, J.A., 1988. Curvature theory of line trajectories in spatial kinematics. Doctoral dissertation, University of California, Davis.
- Study, E., 1903. *Geometrie der Dynamen*. Leipzig.
- Turgut, A., 1995. Spacelike and timelike ruled surfaces in 3-dimensional Minkowski space. Doctoral dissertation, Ankara University, Ankara.
- Uğurlu, H.H. and Çalışkan, A., 1996. The study mapping for directed spacelike and timelike lines in Minkowski 3-space IR_1^3 . *Mathematical and Computational Applications*, **1(2)**, 142-148.
- Veldkamp, G.R., 1976. On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, **2**, 141-156.