



## Polimer-Viskoelastik Malzemeli Boru Hatlarındaki Eğilme Dalgalarının Dispersiyonu

### Dispersion of Flexural Waves in Polymer-Viscoelastic Material Pipelines

Tarık Koçal <sup>1\*</sup> 

<sup>1</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi Gemi Makineleri İşletme Mühendisliği Bölümü, İstanbul, TÜRKİYE  
Sorumlu Yazar / Corresponding Author \*: [tkocal@yildiz.edu.tr](mailto:tkocal@yildiz.edu.tr)

Geliş Tarihi / Received: 15.12.2018

DOI:10.21205/deufmd.2019216221

Kabul Tarihi / Accepted: 16.01.2019

Araştırma Makalesi/Research Article

Atf şekli/ How to cite: KOÇAL, T. (2019). Polimer-Viskoelastik Malzemeli Boru Hatlarındaki Eğilme Dalgalarının Dispersiyonu. DEUFMD, 21(62), 577-586.

#### Öz

Bu makale çalışmasında korozyondan korunmak amacıyla viskoelastik malzemeden yapılmış deniz aşırı geçecek petrol boru hatlarının tahribatsız muayenelerinde kullanılmak üzere eğilme dalgalarının boru üzerindeki yayılımından bahsedilmektedir. Araştırmalar parçalı homojen cisim modeli kapsamında viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Nümerik araştırmalarda kullanılmak üzere fraksiyonel eksponansiyel operatörler aracılığıyla borunun bünye denklemleri çıkarılmıştır. Dispersif sönüm durumu için dalganın yayılımının birinci mod sonuçları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre boru malzemesinin viskoelastisitesinin artmasıyla eğilme dalgalarının yayılım hızında düşüşe neden olduğu saptanmıştır. Aynı zamanda boru iç çapı ile borunun cidar kalınlığı arasındaki oranın dalga yayılımında önemli bir rol aldığı gözlemlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Eğilme dalgaları, Reolojik Parametre, Viskoelastik Malzeme, Dalga Dispersiyonu

#### Abstract

This paper is about propagating of the bending waves on the pipes which are used in non-destructive inspection of offshore oil pipelines made from viscoelastic materials to protect from corrosion. The investigations were made using exact equations of the viscoelasticity theory in the context of a piecewise homogeneous body model. The constitutive equations of the pipe were obtained through fractional exponential operators for use in numerical investigations. For the dispersive attenuation cases, the first mode results of the waveguide propagation were obtained. According to the results obtained, it was found that the increase of the viscoelasticity of the pipe material caused the decrease of the propagation velocity of the bending waves. At the same time, it is observed that the ratio between the pipe inner diameter and the wall thickness of the pipe plays an important role in wave propagation.

**Keywords:** Bending (flexural) waves, Reological Parameter, Viscoelastic Material, Wave Dispersion

## 1. Giriş

Viskoelastik malzemelerde güdümlü dalgaların dispersiyonu ve sönümü ile ilgili yapılan çalışmalar; teorik anlamda olduğu kadar uygulama alanında da çok büyük bir öneme sahiptir. Deniz aşırı sıvı aktarılmasında kullanılan borular korozyondan etkilenmemesi için polimer-viskoelastik malzemeden yapılmaktadır. Bu boruların tahribatsız testleri için dalga yayılım dispersiyonu ve sönüm kurallarının bilinmesi gerekmektedir.

Bu konudaki ilk çalışmalar elastik sabitlerinin frekanstan bağımsız ve kompleks olduğu durumda viskoelastik katmanda Lamb dalgalarının yayılımı Weiss [1] ve Tamm ile Weiss [2] tarafından yapılmıştır. Coquin [3] aynı problemi frekansa bağımlı kompleks elastik modülü kullanarak plaka malzemesinin küçük kayıplara sahip olduğu varsayımı ile çalışmıştır.

Viskoelastik plaka üzerinde Lamb dalgalarının yayılımı Chervinko ve Senchenkov [4] tarafından da çalışılmıştır. Yazdıkları makalede plaka malzemesinin az sıkıştırılabilir ve Poisson oranının sabit olduğu durumu incelemişlerdir. Bunlara ek olarak Simonetti [5] iki katmanlı viskoelastik + elastik plakadaki Lamb dalga yayılımını incelemiştir. Tüm bunların sonuçları Rose'un monografisinde detaylandırılmıştır [6].

Barshinger ve Rose da yapmış oldukları makalede polimer viskoelastik katmanla kaplanmış elastik metal içi boş silindirdeki aksel simetrik boyuna güdümlü dalga dispersiyonundan ve sönümünden bahsetmişlerdir [7].

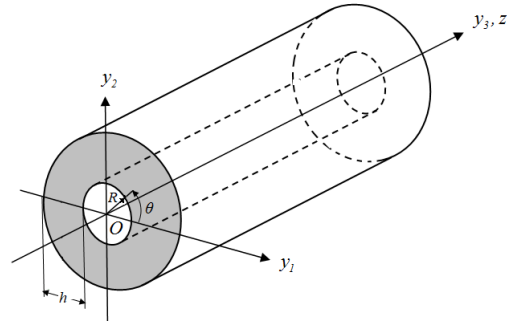
Akbarov ve Kepceler [8], üç katlı içi boş silindir için burulma dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. Bu çalışmada viskoelastik malzemeden yapılmış borudaki aksel simetrik burulma dalga yayılımı, Rabotnov [9] tarafından fraksiyonel eksponansiyel operatörler ile verilen reolojik bağıntılar kullanılarak araştırılmıştır. İncelemeler parçalı homojen cisim modeli ve viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Akbarov ve ark. fraksiyonel eksponansiyel operatörler yardımıyla birçok durum için viskoelastik malzemeden yapılmış çok katmanlı silindirlerde boyuna dalga dispersiyonunun ve dalganın sönümünün sonuçlarını elde etmişlerdir [10,11].

Yukarıdakilerden de anlaşıldığı gibi şimdiye kadar polimer-viskoelastik içi boş silindirlerde eğilme dalgalarının dispersiyonu ve bu dispersiyona silindir malzemesinin reolojik

parametrelerinin etkisi incelenmemiştir. Bu makalede ilk kez bu konu ile ilgili bir araştırma ele alınmaktadır.

## 2. Problemin Formülasyonu

Problemde Şekil 1'de görülen tek katlı boru ele alınmıştır. Borunun iç yarıçapı  $R$  ile et kalınlığı da  $h$  ile simgelenmiştir. Borunun malzemesi homojen, izotropik ve kalıtsal lineer viskoelastik olduğu varsayılmıştır. Hesaplamalar+daki konum saptamalarında silindirik sistem koordinatları  $Or\theta z$  kullanılmış olup borunun  $Oz$  eksenini boyunca sonsuz uzunluğa sahip olduğu varsayılmıştır.



Şekil 1. Tek katlı boru geometrisi

Viskoelastik malzemeler için doğrusal hareket denklemlerini kullanarak  $Oz$  eksenini boyunca eğilme dalgalarının yayılımı incelenmiştir.  $Or\theta z$  silindirik koordinat sisteminde ele alınan durum için korunum denklemlerini ve mekanik bağıntıları yazacak olursak,

Hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} T_{rz} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Bünye denklemleri:

$$\begin{aligned} T_{(ii)} &= \lambda^* \varepsilon + 2\mu^* \varepsilon_{(ii)}, (ii) = rr; \theta\theta; zz, \\ T_{r\theta} &= 2\mu^* \varepsilon_{r\theta}, T_{rz} = 2\mu^* \varepsilon_{rz}, T_{z\theta} = 2\mu^* \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda^*$  ve  $\mu^*$  viskoelastik operatörleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\left\{ \frac{\lambda_1^*}{\mu_1^*} \right\} \varphi(t) = \left\{ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right\} \varphi(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right\} (t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (3)$$

Bu denklemdeki  $\lambda_0$  ve  $\mu_0$  ifadeleri Lamé sabitlerinin  $t \rightarrow 0$ 'daki anlık değeridir,  $\lambda_1(t)$  ile  $\mu_1(t)$  ise boru malzemesinin kalıtsal-viskoelastik özelliklerini tanımlayan çekirdek fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Şekil 1'e göre sınır koşullarını yazacak olursak:

$$\begin{aligned} T_{rr}|_{r=R} &= 0, \quad T_{r\theta}|_{r=R} = 0, \quad T_{rz}|_{r=R} = 0, \\ T_{rr}|_{r=R+h} &= 0, \quad T_{r\theta}|_{r=R+h} = 0, \quad T_{rz}|_{r=R+h} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Viskoelastik malzemeden yapılmış bir borudaki eğilme dalgalarının yayılımı probleminin formülasyonu, denklem (3)'teki keyfi çekirdek fonksiyonları  $\lambda_1(t)$  ve  $\mu_1(t)$ 'lerin verilmesi ile tamamlanır.

### 3. Çözüm Metodu

$Oz$  eksenini boyunca yayılım gösteren eğilme dalga dispersiyonunu göz önüne alarak, yer değiştirme ve şekil değiştirmeleri  $e^{i(kz-\omega t)}$  'li şekilde aşağıdaki gibi gösterebiliriz (burada  $k$  dalga sayısını ve  $\omega$  ise dairesel frekansı simgelemektedir).

$$\begin{aligned} u_{(i)}(r, \theta, z, t) &= v_{(i)}(r, \theta) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (i) = r; \theta; z, \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta, z, t) &= \gamma_{r\theta}(r, \theta) e^{i(kz-\omega t)}, \\ \varepsilon_{rz}(r, \theta, z, t) &= \gamma_{rz}(r, \theta) e^{i(kz-\omega t)}, \\ \varepsilon_{z\theta}(r, \theta, z, t) &= \gamma_{z\theta}(r, \theta) e^{i(kz-\omega t)}, \\ \varepsilon_{(ii)}(r, \theta, z, t) &= \gamma_{(ii)}(r, \theta) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (ii) = rr; \theta\theta; zz, \\ \varepsilon &= s e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Denklem (6)'daki  $\gamma$  ifadeleri denklem (7)'de verilmiştir:

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right), \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} v_\theta \right), \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{r \partial \theta} \right), \\ \gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Viskoelastik malzemeler için yüksek hassasiyette doğru sonuçlar veren

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \approx \int_{-\infty}^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (8)$$

dönüşümünü (2) ve (3)'teki denklemlerde kullanıp gerekli matematiksel dönüşümleri yapacak olursak bünye denklemlerini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} T_{(ii)} &= (A s + 2M \gamma_{(ii)}) e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{(ii)} e^{i(kz-\omega t)}, \\ (ii) &= rr; \theta\theta; zz, \\ T_{r\theta} &= 2M \gamma_{r\theta} e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{r\theta} e^{i(kz-\omega t)}, \\ T_{rz} &= 2M \gamma_{rz} e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{rz} e^{i(kz-\omega t)}, \\ T_{z\theta} &= 2M \gamma_{z\theta} e^{i(kz-\omega t)} = \sigma_{z\theta} e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Burada

$$A = \lambda_0 + \lambda_{1c} + i\lambda_{1s}, \quad M = \mu_0 + \mu_{1c} + i\mu_{1s}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\lambda_{1c}}{\mu_{1c}} \right\} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right\} (\xi) \cos(\omega\xi) d\xi, \\ \left\{ \frac{\lambda_{1s}}{\mu_{1s}} \right\} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right\} (\xi) \sin(\omega\xi) d\xi \end{aligned} \quad (11)$$

olarak tanımlanır. Denklem (11)'de tanımlanan kompleks sabitler ile  $A$  ve  $M$ 'nin gerçek ve reel kısımları elde edilir. Viskoelastik sistemin tüm alan denklemleri elastik bir sistemin elastik modülleri  $\lambda_0$  ve  $\mu_0$  ile elastik kompleks modülleri  $A$  ve  $M$ 'nin değiştirilmesiyle elde edilebilir. Bu ifadenin önceki çalışmalarda kullanılmış ve ispat edilmiş dinamik uygunluk ilkesi [12] olduğunu bilmekteyiz.

(6) - (9)'daki verilen problemin çözümü için Guz'un [13-14] çalışmalarında verilen

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi - ik \frac{\partial}{\partial r} X, \quad v_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} \Psi - ik \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} X,$$

$$v_z = (A + M)^{-1} \left( (A + 2M) \Delta_1 - k^2 M + \omega^2 \rho \right) X, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (12)$$

ifadelerinden yararlanalım. Burada denklem  $\Psi$  ve  $X$  fonksiyonları aşağıdaki denklemlerin çözümünden elde edilir:

$$\left( \Delta_1 - k^2 + \omega^2 \frac{\rho}{\mu} \right) \Psi = 0 \quad \left[ \left( \Delta_1 - k^2 \right)^2 + \frac{\rho(A+3M)(\Delta_1 - k^2)\omega^2 + (\rho)^2\omega^4}{M(A+2M)} \right] X = 0. \quad (13)$$

Bu makalede eğilme dalgalarını ele aldığımız için  $\Psi$  ve  $X$  fonksiyonlarını

$$\Psi = \psi_p(r) \sin p\theta, \quad X = \chi_p(r) \cos p\theta. \quad (14)$$

(14)'teki ifadeleri (13)'teki denklemlerde yerine yazarak

$$\begin{aligned} (\Delta_{1p} + (\zeta_1)^2) \psi_p &= 0, \\ (\Delta_{1p} + (\zeta_2)^2) (\Delta_{1p} + (\zeta_3)^2) \chi_p &= 0, \\ \Delta_{1p} &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} - \frac{p^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. Buradaki  $\zeta_1$

$$(\zeta_1)^2 = k^2 \left( \frac{\rho}{M} \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - 1 \right), \quad (16)$$

formülüyle hesaplanabilir fakat  $(\zeta_2)^2$  ve  $(\zeta_3)^2$  ifadelerini elde etmek için aşağıdaki denklemin çözümü gerekmektedir.

$$\begin{aligned} M(\zeta)^4 - k^2(\zeta)^2 \left[ \rho \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - (A+2M) + \frac{M}{A+2M} \left( \rho \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - M \right) \right] + \\ \frac{(A+M)^2}{A+2M} + k^4 \left( \frac{\rho}{A+2M} \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - 1 \right) \left( \rho \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - M \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

(16) ve (17)'deki  $\omega/k$  oranı dalga yayılımının kompleks faz hızıdır.

Sonuç olarak (15) - (17)'deki denklemlerden  $\psi_p$  ve  $\chi_p$  için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} \psi_p &= A_{1p} J_p(\zeta_1 kr) + B_{1p} Y_p(\zeta_1 kr), \\ \chi_p &= A_{2p} J_p(\zeta_2 kr) + A_{3p} J_p(\zeta_3 kr) + \\ &B_{2p} Y_p(\zeta_2 kr) + B_{3p} Y_p(\zeta_3 kr). \end{aligned} \quad (18)$$

Bu ifadelerdeki  $A_{1p}, A_{2p}, A_{3p}, B_{1p}, B_{2p}$  ve  $B_{3p}$  bilinmeyen sabitlerdir, ve  $J_p(x)$  ile  $Y_p(x)$  ise  $p$ 'inci derece sırasıyla birinci ve ikinci türden Bessel fonksiyonlarıdır.

(18)'de verilen ifadeleri (14)'te yerine koyarsak ve (12), (9) ve (7)'deki ifadeleri kullanırsak  $A_{1p}, A_{2p}, A_{3p}, B_{1p}, B_{2p}$  ve  $B_{3p}$  bilinmeyen sabitlerini içeren yer değiştirme ve gerilme genliklerini elde ederiz.

Bulunan yer değiştirme ve gerilme genlikleri ifadelerini (5)'teki sınır koşullarında yerine yazarak

$$\det \|\beta_{lm}(p)\| = 0, \quad l; m = 1, 2, \dots, 6, \quad (19)$$

dispersiyon denklemi elde edilir.  $(\beta_{lm}(p))$  matrisi Ek A'da açık olarak verilmiştir.

#### 4. Nümerik Sonuçlar ve Tartışmalar

Viskoelastik malzemelerde zamana göre harmonik dalga yayılımının incelenmesinde  $k$  kompleks olarak ele alınmalıdır.

$$k = k_1 + ik_2 = k_1(1 + \beta), \quad \beta = \frac{k_2}{k_1}. \quad (20)$$

$k_2$  (veya (20)'deki  $\beta$ ) dalga sayısı,  $k$ 'nın imajiner kısmı ele alınan dalga genliğinin sönümünü tanımlar ve  $\beta$  da sönüm katsayısı olarak adlandırılır. Dalgaların faz hızını aşağıdaki ifade ile belirleriz.

$$c = \frac{\omega}{k_1} \quad (21)$$

Denklem (21) ile beraber aşağıdaki ifadeler de kullanılır.

$$c_2 = \sqrt{\mu_0 / \rho}, \quad c / c_2, \quad k_1 R \quad \text{ve} \quad h / R. \quad (22)$$

(19)'daki dispersiyon denklemini çözmek için çekirdek fonksiyonları yardımıyla belirlenen  $\lambda_{1c}$

,  $\lambda_{1s}$ ,  $\mu_{1c}$  ve  $\mu_{1s}$  değerlerinin verilmesi gerekmektedir. Bu değerlerin hesaplanabilmesi için  $\mu_1(t)$  ve  $\lambda_1(t)$ 'nin açık bir şekilde ifade edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla makalede Rabotnov [9] tarafından silindir malzemelerinin viskoelastisitesini ifade eden fraksiyonel

eksponansiyel operatörü kullanılmıştır.

$$\mu^* \varphi(t) = \mu_0 \left[ \varphi(t) - \frac{3\beta_0}{2(1+\nu_0)} \Pi_\alpha^* \left( \frac{3\beta_0}{2(1+\nu_0)} - \beta_\infty \right) \varphi(t) \right] \quad (23)$$

bu bağıntıdaki  $\Pi_\alpha^*$  aşağıdaki şekilde verilir.

$$\Pi_\alpha^* (x) \varphi(t) = \int_0^\infty \Pi_\alpha (x, t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

$$\Pi_\alpha (x, t) = t^{-\alpha} \sum_{q=0}^\infty \frac{(x)^q t^{q(1-\alpha)}}{\Gamma((1+q)(1-\alpha))},$$

$$0 \leq \alpha < 1. \quad (24)$$

Burada  $\Gamma(x)$  gamma fonksiyonudur. Ayrıca (23) ve (24)'teki  $\alpha$ ,  $\beta_0$  ve  $\beta_\infty$  sabitleri reolojik parametrelerdir. Bu reolojik parametrelerden boyutsuz parametrelere geçilir. Kocal ve Akbarov'un [15] makalesinde de olduğu gibi viskoelastik malzemenin karakteristik boyutsuz sürünme zamanını ifade eden  $Q$  ve malzemenin elastik sabitlerinin  $t = \infty$ ' da olan değerlerini gösteren  $d$  aşağıda şekilde verilmiştir.

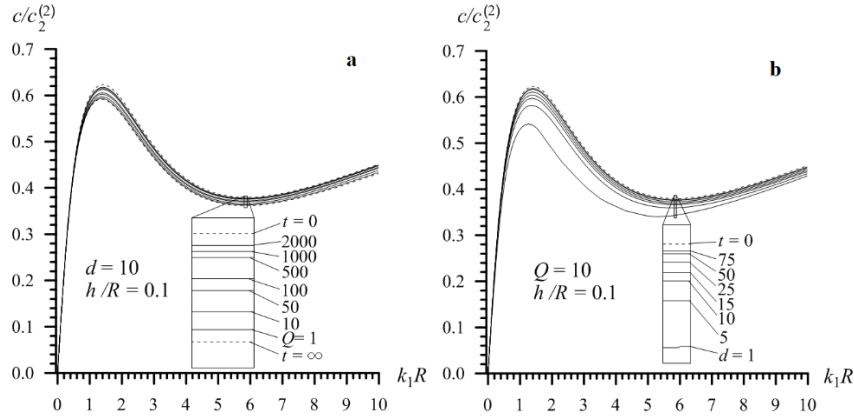
$$d = \frac{\beta_\infty}{\beta_0}, \quad Q = \frac{c_{20}}{R(\beta_{01} + \beta_\infty)}, \quad (25)$$

buradaki  $\beta_{01} = 3\beta_0 / (2(1+\nu_0))$  formülüyle elde edilir.

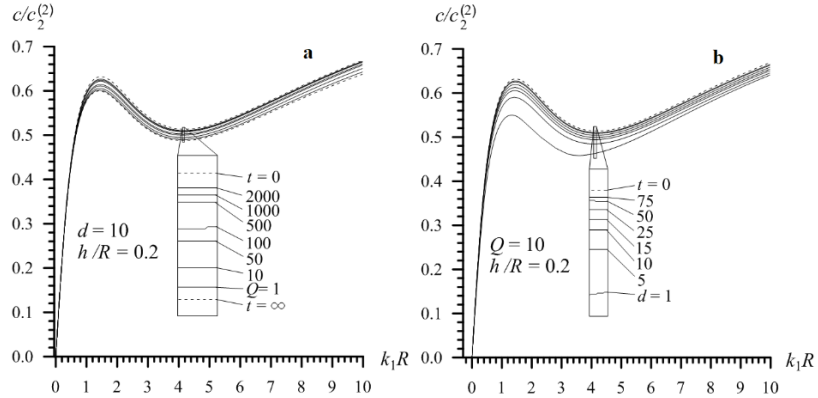
$Q$  ve  $d$  değerlerinin artması ile malzemenin viskozitesi azalmaktadır. Böylece boyutsuz reolojik  $Q$  ve  $d$  parametreleri değiştirilerek eğilme dalgalarının yayılımında boru malzemesinin viskoelastitesinin etkisi incelenecektir. İncelemelerde dispersiyon denkleminin çözümü için algoritma kurulmuştur. Ewing ile ark. [16] ve Kolsky [17]'a göre sönüm katsayısı  $\beta$  aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\mu_{1s}(\omega)}{\mu_0 + \mu_{1s}(\omega)}. \quad (26)$$

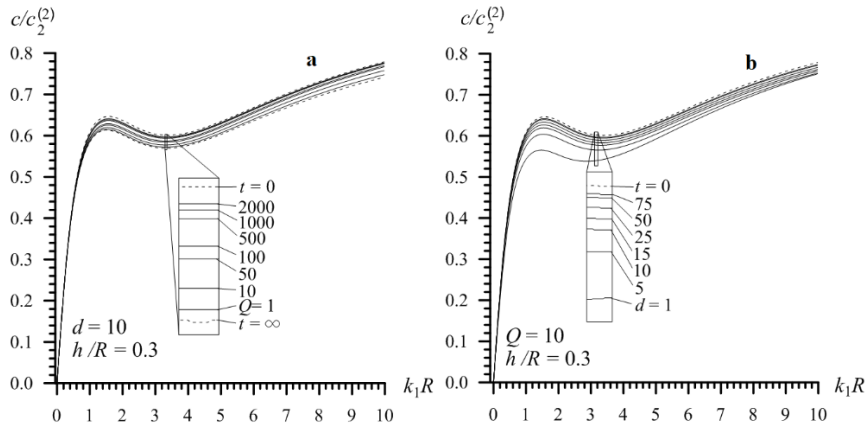
Bu makalede verilen sayısal sonuçlar  $\nu_0 = 0.3$  ve  $\alpha = 0.5$  olduğu durum için elde edilmiştir.  $h/R = 0.1, 0.2, 0.3$  durumunda elde edilen dispersiyon eğrileri Şekil 2'de verilmektedir. Bu şekillerde a harfiyle gruplanan grafiklerde  $d$  parametresinin değeri sabit tutularak  $Q$  parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi incelenirken, b harfiyle gruplanan grafiklerde ise  $Q$  parametresinin değeri sabit tutularak  $d$  parametresinin dispersiyon eğrisi üzerindeki etkisi incelenmiştir.



Şekil 2.  $h/R$ 'nin 0.1 olduğu  $d=10$  (a) ve  $Q=10$  (b) durumları için elde edilen dispersiyon eğrileri



Şekil 3.  $h/R$ 'nin 0.2 olduğu  $d=10$  (a) ve  $Q=10$  (b) durumları için elde edilen dispersiyon eğrileri



Şekil 4.  $h/R$ 'nin 0.3 olduğu  $d=10$  (a) ve  $Q=10$  (b) durumları için elde edilen dispersiyon eğrileri

## 5. Sonuçlar

Sonuç olarak bu makale çalışmasında viskoelastik malzemeden yapılmış borudaki eğilme dalgalarının yayılımı elastodinamik ilişkiler ve viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri yardımıyla araştırılmıştır. Borunun malzemesi homojen ve izotropik olduğu varsayılmıştır. Borunun viskoelastikliği Rabotnov'un fraksiyonel eksponansiyel operatörleri vasıtasıyla tanımlanmıştır.

Nümerik sonuçlarda birinci moda harmonik eğilme dalgalarının dispersiyonu araştırılmıştır. Grafikler boru et kalınlığı ile boru iç yarıçapı arasındaki oranın değişimine bağlı olarak farklı viskoelastik malzemeli borular için eğilme dalgalarının yayılımı eğrileri elde edilmiştir. Bu eğriler ile birlikte aşağıdaki sonuçlar çıkarılır:

- Tüm grafikler incelendiğinde viskoelastik malzemeli borular için elde edilen eğrilerin; elastik sabitlerinin anlık değerinde (üst limit) ve elastik sabitlerinin  $t = \infty$ 'daki değerinde (alt limit) elastik durum için elde edilen dispersiyon eğrileri ile sınırlandırıldığı görülmüştür.

Boru et kalınlığı ile boru iç yarıçapı arasındaki oranın artışı boyutsuz dalga sayısının düşük seviyelerinde borudaki eğilme dalga dispersiyonunda çok az artış meydana getirmesine rağmen bu artışın boyutsuz dalga sayısının yüksek seviyelerinde daha belirgin olduğu görülmüştür.

$Q$  ve  $d$  parametrelerinin arttırılması sonucu malzeme elastikliğindeki artış ile birlikte dalga yayılım hızında artış meydana gelmiştir.

Elde edilen bu veriler üretimi yapılan boruların tahribatsız deneylerinde boru iç yapısında çatlak

ve benzeri hataların olup olmadığı tespitine olanak sağlamaktadır.

#### Kaynakça

- [1] Weiss O. 1959. Über die Schallausbreitung in verlustbehafteten Medien mit komplexen Schub und Modul. *Acoustica*, **9**: 387 – 399.
- [2] Tamm K. and Weiss O. 1961. Wellenausbreitung in unbergrenzten Scheiben und in Scheibensteifern. *Acoustica*, **11**: 8 – 17.
- [3] Coquin G.A. 1964. Attenuation of guided waves in isotropic viscoelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.* **36**: 1074 – 1080.
- [4] Chervinko O.P. and Senchenkov I.K. 1986. Harmonic viscoelastic waves in a layer and in an infinite cylinder. *Int. Appl. Mech.* **22**: 1136 – 1186.
- [5] Simonetti F. 2004. Lamb wave propagation in elastic plates coated with viscoelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.* **115**: 2041 – 2053.
- [6] Rose J.L. 2004. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press.
- [7] Barshinger J.N. and Rose J.L. 2004. Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material. *IEEE Trans. Ultrason. Freq. Control* **51**: 1574 – 1586.
- [8] Akbarov S.D. and Kepceler T. 2015. On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials. *Applied Mathematical Modelling*, **39**: 3569 – 3587.
- [9] Rabotnov Yu. N. 1980. *Elements of hereditary solid mechanics*. Mir, Moscow.
- [10] Akbarov S.D., Kocal T. and Kepceler T. 2016a. Dispersion of Axisymmetric Longitudinal waves in a bi-material compound solid cylinder made of viscoelastic materials. *CMC: Computers, Materials & Continua*, **51**(2): 105 – 143.
- [11] Akbarov S.D., Kocal T. and Kepceler T. 2016b. On the dispersion of the axisymmetric longitudinal wave propagating in a bi-layered hollow cylinder made of viscoelastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, **100-101**(1): 195-210.
- [12] Fung Y.C. 1965. *Introduction to solid mechanics*. Prentice – Hall.
- [13] Guz A.N. 1999. *Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies*. Springer.
- [14] Guz A.N. 2004. *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. A.C.K. Kiev (in Russian).
- [15] Kocal T. and Akbarov S.D. 2017. On the attenuation of the axisymmetric longitudinal waves propagating in the bi-layered hollow cylinder made of viscoelastic materials. *SEM: Struct. Eng. Mech.*, **61**(1): 145 – 165.
- [16] Ewing W.M., Jazdetzky, W.S. and Press F. 1957. *Elastic waves in layered media*. McGraw – Hill, New – York.
- [17] Kolsky H. 1963. *Stress waves in solids*. Dover, New York.

**Ekler**

**Ek A.**

$$\begin{aligned}
 \beta_{11}(\zeta_1, \Psi_1) &= (\Lambda + 2M) \left( \frac{\zeta_1}{\eta_1} J_n^I(\Psi_1) - \frac{1}{\eta_1^2} J_n(\Psi_1) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( -\zeta_1 J_n^I(\Psi_1) + \frac{1}{\eta_1} J_n(\Psi_1) \right), \\
 \beta_{12}(\zeta_1, \Psi_1) &= (\Lambda + 2M) \left( \frac{\zeta_1}{\eta_1} Y_n^I(\Psi_1) - \frac{1}{\eta_1^2} Y_n(\Psi_1) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( -\zeta_1 Y_n^I(\Psi_1) + \frac{1}{\eta_1} Y_n(\Psi_1) \right), \\
 \beta_{21}(\zeta_1, \Psi_1) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( -(\zeta_1)^2 J_n^H(\Psi_1) \right) + \\ &\left( -\frac{1}{\eta_1^2} J_n(\Psi_1) + \frac{\zeta_1}{\eta_1} J_n^I(\Psi_1) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{22}(\zeta_1, \Psi_1) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( -(\zeta_1)^2 Y_n^H(\Psi_1) \right) + \\ &\left( -\frac{1}{\eta_1^2} Y_n(\Psi_1) + \frac{\zeta_1}{\eta_1} Y_n^I(\Psi_1) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{31}(\zeta_1, \Psi_1) &= \frac{M}{\eta_1} J_n(\Psi_1) \\
 \beta_{32}(\zeta_1, \Psi_1) &= \frac{M}{\eta_1} Y_n(\Psi_1), \\
 \beta_{13}(\zeta_2, X_2) &= (\Lambda + 2M) \left( (\zeta_2)^2 J_n^H(X_2) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( \frac{1}{\eta_1} J_n(X_2) + \zeta_2 J_n^I(X_2) \right) + \Lambda \left( -(\Lambda + 2M) (\beta_2 / (\Lambda + M) J_n(X_2)) \right), \\
 \beta_{14}(\zeta_2, X_2) &= (\Lambda + 2M) \left( (\zeta_2)^2 Y_n^H(X_2) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( \frac{1}{\eta_1} Y_n(X_2) + \zeta_2 Y_n^I(X_2) \right) + \Lambda \left( -(\Lambda + 2M) (\beta_2 / (\Lambda + M) Y_n(X_2)) \right), \\
 \beta_{23}(\zeta_2, X_2) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_1^2} J_n(X_2) - \frac{\zeta_2}{\eta_1} J_n^I(X_2) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_2}{\eta_1} J_n^I(X_2) + \frac{1}{\eta_1^2} J_n(X_2) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{24}(\zeta_2, X_2) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_1^2} Y_n(X_2) - \frac{\zeta_2}{\eta_1} Y_n^I(X_2) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_2}{\eta_1} Y_n^I(X_2) + \frac{1}{\eta_1^2} Y_n(X_2) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{33}(\zeta_2, X_2) &= M \left[ \zeta_2 J_n^I(X_2) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_2 \beta_2 J_n^I(X_2) \right], \\
 \beta_{34}(\zeta_2, X_2) &= M \left[ \zeta_2 Y_n^I(X_2) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_2 \beta_2 Y_n^I(X_2) \right], \\
 \beta_{43}(\zeta_2^{(2)}, X_2^{(2)}) &= (\Lambda^{(2)} + 2M^{(2)}) \left( (\zeta_2^{(2)})^2 J_n^H(X_2^{(2)}) \right) + \frac{\Lambda^{(2)}}{\eta_2} \left( \frac{1}{\eta_2} J_n(X_2^{(2)}) + \zeta_2^{(2)} J_n^I(X_2^{(2)}) \right) + \Lambda^{(2)} \left( -(\Lambda^{(2)} + 2M^{(2)}) (\beta_2^{(2)} / (\Lambda^{(2)} + M^{(2)}) J_n(X_2^{(2)})) \right), \\
 \beta_{15}(\zeta_3, X_3) &= (\Lambda + 2M) \left( (\zeta_3)^2 J_n^H(X_3) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( \frac{1}{\eta_1} J_n(X_3) + \zeta_3 J_n^I(X_3) \right) + \Lambda \left( -(\Lambda + 2M) (\beta_3 / (\Lambda + M) J_n(X_3)) \right), \\
 \beta_{16}(\zeta_3, X_3) &= (\Lambda + 2M) \left( (\zeta_3)^2 Y_n^H(X_3) \right) + \frac{\Lambda}{\eta_1} \left( \frac{1}{\eta_1} Y_n(X_3) + \zeta_3 Y_n^I(X_3) \right) + \Lambda \left( -(\Lambda + 2M) (\beta_3 / (\Lambda + M) Y_n(X_3)) \right), \\
 \beta_{25}(\zeta_3, X_3) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_1^2} J_n(X_3) - \frac{\zeta_3}{\eta_1} J_n^I(X_3) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_3}{\eta_1} J_n^I(X_3) + \frac{1}{\eta_1^2} J_n(X_3) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{26}(\zeta_3, X_3) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_1^2} Y_n(X_3) - \frac{\zeta_3}{\eta_1} Y_n^I(X_3) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_3}{\eta_1} Y_n^I(X_3) + \frac{1}{\eta_1^2} Y_n(X_3) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{35}(\zeta_3, X_3) &= M \left[ \zeta_3 J_n^I(X_3) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_3 \beta_3 J_n^I(X_3) \right], \\
 \beta_{36}(\zeta_3, X_3) &= M \left[ \zeta_3 Y_n^I(X_3) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_3 \beta_3 Y_n^I(X_3) \right],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \beta_{41}(\zeta_1, \Psi_h) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( \frac{\zeta_1}{\eta_2} J_n^I(\Psi_h) - \frac{1}{\eta_2^2} J_n(\Psi_h) \right) \\ &+ \frac{\Lambda}{\eta_2} \left( -\zeta_1 J_n^I(\Psi_h) + \frac{1}{\eta_2} J_n(\Psi_h) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{54}(\zeta_2, X_{2h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_2^2} Y_n(X_{2h}) - \frac{\zeta_2}{\eta_2} Y_n^I(X_{2h}) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_2}{\eta_2} Y_n^I(X_{2h}) + \frac{1}{\eta_2^2} Y_n(X_{2h}) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{42}(\zeta_1, \Psi_h) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( \frac{\zeta_1}{\eta_2} Y_n^I(\Psi_h) - \frac{1}{\eta_2^2} Y_n(\Psi_h) \right) \\ &+ \frac{\Lambda}{\eta_2} \left( -\zeta_1 Y_n^I(\Psi_h) + \frac{1}{\eta_2} Y_n(\Psi_h) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{63}(\zeta_2, X_{2h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\zeta_2 J_n^I(X_{2h}) + \\ &\frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_2 \beta_2 J_n^I(X_{2h}) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{51}(\zeta_1, \Psi_h) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( -(\zeta_1)^2 J_n^{II}(\Psi_h) \right) + \\ &\left( -\frac{1}{\eta_2^2} J_n(\Psi_h) + \frac{\zeta_1}{\eta_2} J_n^I(\Psi_h) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{64}(\zeta_2, X_{2h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\zeta_2 Y_n^I(X_{2h}) + \\ &\frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_2 \beta_2 Y_n^I(X_{2h}) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{52}(\zeta_1, \Psi_h) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( -(\zeta_1)^2 Y_n^{II}(\Psi_h) \right) + \\ &\left( -\frac{1}{\eta_2^2} Y_n(\Psi_h) + \frac{\zeta_1}{\eta_2} Y_n^I(\Psi_h) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{45}(\zeta_3, X_{3h}) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( (\zeta_3)^2 J_n^{II}(X_{3h}) \right) + \\ &\frac{\Lambda}{\eta_2} \left( \frac{1}{\eta_2} J_n(X_{3h}) + \zeta_3 J_n^I(X_{3h}) \right) + \\ &\Lambda \left( -(\Lambda + 2M) \left( \frac{\beta_3}{J_n(X_{3h})} / (\Lambda + M)^* \right) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{61}(\zeta_1^{(1)}, \Psi_{2h^{(1)}}) &= \frac{\mu_0^{(2)}}{\mu_0^{(1)}} \frac{M^{(1)}}{\eta_2} J_n(\Psi_{2h^{(1)}}), \\
 \beta_{62}(\zeta_1, \Psi_h) &= \frac{M}{\eta_2} Y_n(\Psi_h), \\
 \beta_{43}(\zeta_2, X_{2h}) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( (\zeta_2)^2 J_n^{II}(X_{2h}) \right) + \\ &\frac{\Lambda}{\eta_2} \left( \frac{1}{\eta_2} J_n(X_{2h}) + \zeta_2 J_n^I(X_{2h}) \right) + \\ &\Lambda \left( -(\Lambda + 2M) \left( \frac{\beta_2}{J_n(X_{2h})} / (\Lambda + M)^* \right) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{46}(\zeta_3, X_{3h}) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( (\zeta_3)^2 Y_n^{II}(X_{3h}) \right) + \\ &\frac{\Lambda}{\eta_2} \left( \frac{1}{\eta_2} Y_n(X_{3h}) + \zeta_3 Y_n^I(X_{3h}) \right) + \\ &\Lambda \left( -(\Lambda + 2M) \left( \frac{\beta_3}{Y_n(X_{3h})} / (\Lambda + M)^* \right) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{44}(\zeta_2, X_{2h}) &= \left[ \begin{aligned} &(\Lambda + 2M) \left( (\zeta_2)^2 Y_n^{II}(X_{2h}) \right) + \\ &\frac{\Lambda}{\eta_2} \left( \frac{1}{\eta_2} Y_n(X_{2h}) + \zeta_2 Y_n^I(X_{2h}) \right) + \\ &\Lambda \left( -(\Lambda + 2M) \left( \frac{\beta_2}{Y_n(X_{2h})} / (\Lambda + M)^* \right) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{55}(\zeta_3, X_{3h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_2^2} J_n(X_{3h}) - \frac{\zeta_3}{\eta_2} J_n^I(X_{3h}) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_3}{\eta_2} J_n^I(X_{3h}) + \frac{1}{\eta_2^2} J_n(X_{3h}) \right) \end{aligned} \right], \\
 \beta_{53}(\zeta_2, X_{2h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_2^2} J_n(X_{2h}) - \frac{\zeta_2}{\eta_2} J_n^I(X_{2h}) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_2}{\eta_2} J_n^I(X_{2h}) + \frac{1}{\eta_2^2} J_n(X_{2h}) \right) \end{aligned} \right], & \beta_{56}(\zeta_3, X_{3h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{1}{\eta_2^2} Y_n(X_{3h}) - \frac{\zeta_3}{\eta_2} Y_n^I(X_{3h}) \right) + \\ &\left( -\frac{\zeta_3}{\eta_2} Y_n^I(X_{3h}) + \frac{1}{\eta_2^2} Y_n(X_{3h}) \right) \end{aligned} \right], \\
 & & \beta_{65}(\zeta_3, X_{3h}) &= M \left[ \begin{aligned} &\zeta_3 J_n^I(X_{3h}) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_3 \beta_3 J_n^I(X_{3h}) \end{aligned} \right],
 \end{aligned}$$

$$\beta_{66}(\zeta_3, X_{3h}) = M \left[ \zeta_3 Y_n^I(X_{3h}) + \frac{\Lambda + 2M}{\Lambda + M} \zeta_3 \beta_3 Y_n^I(X_{3h}) \right],$$

**(A1)**

$$J^I(x) = \frac{dJ}{dx}, \quad J^{II}(x) = \frac{d^2J}{dx^2}, \quad Y^I(x) = \frac{dY}{dx}, \quad Y^{II}(x) = \frac{d^2Y}{dx^2}$$

$$\Psi_1 = kR\zeta_1, X_2 = kR\zeta_2, X_3 = kR\zeta_3$$

$$\Psi_h = kR\left(1 + \frac{h}{R}\right)\zeta_1, X_{2h} = kR\left(1 + \frac{h}{R}\right)\zeta_2, X_{3h} = kR\left(1 + \frac{h}{R}\right)\zeta_3$$

$$\eta_1 = kR, \eta_2 = kR(1+h)$$

$$\beta_2 = -(\zeta_2)^2 - \frac{M}{\Lambda + 2M} \left(1 - \frac{w/k}{M}\right),$$

$$\beta_3 = -(\zeta_3)^2 - \frac{M}{\Lambda + 2M} \left(1 - \frac{w/k}{M}\right)$$

**(A2)**