Araştırma Makalesi / Research Article
Matematik / Mathematics

Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(2): 1073-1081, 2019
Journal of the Institute of Science and Technology, 9(2): 1073-1081, 2019

DOI: 10.21597/jist.471279 ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

n-kere Türevlenebilen h-konveks ve h-konkav fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

Huriye KADAKAL[1*]

ÖZET: Bu çalışmada, hem Hölder hem de Power-Mean integral eşitsizliği ile birlikte bir integral eşitliği kullanılarak n-kere türevlenebilen h-konveks ve h-konkav fonksiyonlar için bir kaç yeni eşitsizlik bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: h-konveks ve h-konkav fonksiyon, Hölder ve Hermite-Hadamard eşitsizliği

Integral Inequalities for n-Times Differentiable h-Convex and h-Concave Functions

ABSTRACT: In this study, we get several new inequalities for n-times differentiable h-convex and h-concave functions by applying an integral identity together with both the Hölder and the Power-Mean integral inequality.

Keywords: h-convex and h-concave function, Hölder and Hermite-Hadamard inequality

[1] Huriye KADAKAL (**Orcid ID:** 0000-0002-0304-7192), Milli Eğitim Bakanlığı, Bulancak Bahçelievler Anadolu Lisesi Bulancak,Giresun, Türkiye

Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Huriye KADAKAL, e-mail: huriyekadakal@hotmail.com

Geliş tarihi / *Received:*16.10.2018
Kabul tarihi / *Accepted:*19.11.2018

GİRİŞ

Tanım 1.1 Her $u, v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks fonksiyon olarak adlandırılır:

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v).$$

Eğer eşitsizlik tersine ise o zaman f fonksiyonu $I \neq \emptyset$ aralığı üzerinde konkav olarak adlandırılır. Literatürde konveks fonksiyonlar için birçok eşitsizlik verilmiştir. Fakat Hermite-Hadamard integral eşitsizliği bu eşitsizlikler içerisinde geometrik önemi ve uygulamalarıyla oldukça ön plana çıkmıştır. Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 1.2 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ $(a \leq b)$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak iyi bilinmektedir.

Tanım 1.3 $s \in (0,1]$ bir reel sayı olsun. Eğer her $u, v \in [0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tu + (1-t)v) \leq t^s f(u) + (1-t)^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna s-konveks (ikinci anlamda) fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (**Breckner, 1978**).

Tanım 1.4 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f negatif olmayan bir fonksiyon ve her $u, v \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tu + (1-t)v) \leq \frac{f(u)}{t} + \frac{f(v)}{1-t}.$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o zaman f fonksiyonuna bir Godunova-Levin fonksiyonu denir. Bu tip fonksiyonların sınıfı $Q(I)$ ile gösterilir (Godunova ve Levin, 1985).

Tanım 1.5 Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon ve her $u, v \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tu + (1-t)v) \leq f(u) + f(v).$$

eşitsizliği sağlanırsa o zaman f fonksiyonuna bir P-function denir. Bu durumda f fonksiyonuna $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve ark., 1995).

Tanım 1.6 $h: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve her $u, v \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tu + (1-t)v) \leq h(t)f(u) + h(1-t)f(v)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna h-konveks veya f'ye $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir.

Eğer yukarıdaki eşitsizlik tersine ise o zaman f fonksiyonu h-konkav olarak adlandırılır, yani $f \in SV(h, I)$'dir. Eğer $h(t) = t$ ise bu durumda negatif olmayan konveks fonksiyonların $SX(h, I)$ sınıfına ait olduğu ve her negatif olmayan konkav fonksiyonun $SV(h, I)$ sınıfına ait olduğu; eğer $h(t) = \frac{1}{t}$ ise bu durumda $SX(h, I) = Q(I)$ olduğu; eğer $h(t) = 1$ ise bu durumda $SX(h, I) \supseteq P(I)$ olduğu ve eğer $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(t) = t^s$ ise bu durumda $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olduğu açıktır (Varošanec, 2007).

Son zamanlarda literatürde, h-konveks fonksiyonlar, h-konkav fonksiyonlar, konvekslik ve konvekslik çeşitleri üzerine çeşitli uygulamalar, genelleştirmeler ve bunlarla ilgili bazı eşitsizlikleri içeren çok sayıda çalışmalar için Pečarić ve ark., 1992; Cerone ve ark., 2000; Dragomir ve Pearce, 2000; Hwang, 2003; Özdemir ve Kırmacı, 2003; Varošanec 2007; Sarıkaya ve ark., 2008; Set ve ark., 2010; Bai ve ark., 2012; Jiang ve ark., 2012; Özdemir ve Yıldız, 2013; Tunç, 2013; Xi ve Qi, 2013; Maden ve ark., 2017 kaynaklarına bakılabilir.

h-konveks fonksiyonlar için yazılmış olan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 1.1 $\alpha < \beta$ olmak üzere $f \in SX(h, I), \alpha, \beta \in I$ ve $f \in L_1([\alpha, \beta])$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq [f(\alpha)+f(\beta)]\int_{0}^{1} h(\alpha)d\alpha.$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer bu eşitsizlikler tersine ise o zaman f fonksiyonu h-konkav olarak adlandırılır (Sarıkaya ve ark., 2008).

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, esas sonuçları elde etmek için Maden ve ark., (2017) tarafından verilen aşağıdaki Lemma ile birlikte Hölder integral eşitsizliği ve Power-mean integral eşitsizliği verilecektir.

Lemma 2.1 $n \in \mathbb{N}$ ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n-kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha, \beta \in I^{\circ}$, $\alpha < \beta$ olmak üzere $f^{(n)} \in L[\alpha, \beta]$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1} - f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{\alpha}^{\beta} x^n f^{(n)}(x)dx,$$

elde edilir.

Tanım 2.1 (Hölder İntegral Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Eğer f ve g fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f(x)|^p$ ve $|g(x)|^q$ fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise bu durumda

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

integral eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, 1970).

Tanım 2.2 (Power-Mean İntegral Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|f(x)|$ ve $|g(x)|^q$ fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

integral eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović, ve ark., 1993).

Bu çalışmada bundan sonra kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki notasyonları kullanacağız. $J = [0, \infty) \subset \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ve $0 < m < n$ olmak üzere $m, n \in J$ ve $f' \in L[m, n]$ ve $m, n > 0$ için

Aritmetik ortalama: $A(m,n) = \frac{m+n}{2}$,

Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama: $L_p(m,n) = \left(\frac{n^{p+1}-m^{p+1}}{(p+1)(n-m)}\right)^{\frac{1}{p}}, m \neq n, p \in \mathbb{R}, p \neq -1,0.$

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, I ve J'nin $\mathbb{R}$ üzerinde aralıklar, $(0,1) \subseteq J$ ve h ve f fonksiyonlarının sırasıyla I ve J aralıkları üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlar, $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ olduğu varsayılacaktır.

Özellikle belirtmek gerekir ki, özel durumlarda elde edilen sonuçlar aşağıdaki sonuçlara indirgenir:

i. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, $h(t) = t$ olması durumunda (Maden ve ark., 2017)'nin sonuçlarına indirgenir.

ii. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, $h(t) = 1$ olması durumunda (Kadakal ve ark., 2017a)'nın sonuçlarına indirgenir.

iii. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, $h(t) = t^s$ olması durumunda (Kadakal ve ark., 2017b)'nin sonuçlarına indirgenir.

iv. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ olması durumunda (Kadakal ve ark., 2017c)'nin sonuçlarına indirgenir.

Teorem 3.1 $n \in \mathbb{N}$ ve $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°üzerinde n-kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha, \beta \in I^{\circ}$, $\alpha < \beta$ olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[\alpha,\beta]$ ve $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1} - f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}(2H)^{\frac{1}{q}}(\beta-\alpha)L_{np}^{n}(\alpha,\beta)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q, \left|f^{(n)}(\beta)\right|^q\right)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada, $H = \int_0^1 h(u)du$ dir.

İspat. Eğer $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konveks fonksiyon ise Lemma 2.1, Hölder integral eşitsizliği ve

$$\left|f^{(n)}(x)\right|^q = \left|f^{(n)}\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\beta + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\alpha\right)\right|^q \leq h\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q + h\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q,$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1} - f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta} x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta} x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta} x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left[h\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^{q}+h\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^{q}\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta} x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left((\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^{q}\int_{0}^{1}h(t)dt+(\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^{q}\int_{0}^{1}h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(\beta-\alpha)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\beta^{np+1}-\alpha^{np+1}}{(np+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[2(\beta-\alpha)A\left(\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^{q},\left|f^{(n)}(\beta)\right|^{q}\right)H\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{n!}(2H)^{\frac{1}{q}}L_{np}^{n}(\alpha,\beta)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^{q},\left|f^{(n)}(\beta)\right|^{q}\right)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 $n=1$ için Teorem 3.1'in şartlarını dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(\beta)\beta-f(\alpha)\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leq(2H)^{\frac{1}{q}}L_{p}(\alpha,\beta)A^{\frac{1}{q}}(|f'(\alpha)|^{q},|f'(\beta)|^{q})$$

Teorem 3.2 $n\in\mathbb{N}$ ve $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I°üzerinde n-kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha,\beta\in I^{\circ}$, $\alpha<\beta$ olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[\alpha,\beta]$ ve $q\geq 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^{q}$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konveks fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1}-f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right)-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{n!}(\beta-\alpha)L_{n}^{n\frac{q-1}{q}}(\alpha,\beta)\left[\left|f^{(n)}(\beta)\right|^{q}H_{1}(\alpha,\beta,n)+\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^{q}H_{2}(\alpha,\beta,n)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Burada $p=1-\frac{1}{q}$ ve $p>1$

$$H_{1}(\alpha,\beta,n)=\int_{0}^{1}[t(\beta-\alpha)+\alpha]^{n}\,h(t)dt$$

$$H_{2}(\alpha,\beta,n)=\int_{0}^{1}[\beta-t(\beta-\alpha)]^{n}\,h(t)dt$$

dir.

İspat. Lemma 2.1 ve iyi bilinen Power mean integral eşitsizliğinden,

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1}-f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right)-\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int_\alpha^\beta x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_\alpha^\beta x^n dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_\alpha^\beta x^n\left[h\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q+h\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_\alpha^\beta x^n dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q\int_\alpha^\beta x^n\, h\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)dx+\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q\int_\alpha^\beta x^n\, h\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[(\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_1(\alpha,\beta,n)+(\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_2(\alpha,\beta,n)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(\beta-\alpha)\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_1(\alpha,\beta,n)+\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_2(\alpha,\beta,n)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(\beta-\alpha)L_n^{n\frac{q-1}{q}}(\alpha,\beta)\left[\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_1(\alpha,\beta,n)+\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_2(\alpha,\beta,n)\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2 $n=1$ için Teorem 3.2'in şartlarını dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(\beta)\beta-f(\alpha)\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq A^{\frac{q-1}{q}}(\alpha,\beta)[|f'(\beta)|^q H_1(\alpha,\beta,1)+|f'(\alpha)|^q H_2(\alpha,\beta,1)]^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 3.3 $q=1$ için Sonuç 3.2'nin şartlarını dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(\beta)\beta-f(\alpha)\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq |f'(\beta)|H_1(\alpha,\beta,1)+|f'(\alpha)|H_2(\alpha,\beta,1).$$

Teorem 3.3 $n \in \mathbb{N}$ ve $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n-kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha, \beta \in I^{\circ}$, $\alpha < \beta$ olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[\alpha,\beta]$ ve $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konveks fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1} - f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\beta-\alpha}{n!}\left[\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_3(\alpha,\beta,n,q) + \left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_4(\alpha,\beta,n,q)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Burada,

$$H_3(\alpha,\beta,n,q) = \int_0^1 [t(\beta-\alpha)+\alpha]^{nq}\, h(t)dt,$$
$$H_4(\alpha,\beta,n,q) = \int_0^1 [\beta - t(\beta-\alpha)]^{nq}\, h(t)dt$$

gösterimleri kullanılmıştır.

İspat. Eğer $q > 1$ olmak üzere $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konveks fonksiyon ise o zaman Lemma 2.1'i ve iyi bilinen Hölder integral eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{\alpha}^{\beta} x^n f^{(n)}(x)dx\right| \leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta} 1^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta} x^{nq}\left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta} 1.\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta} x^{nq}\left[h\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q + h\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{1}{n!}(\beta-\alpha)^{1-\frac{1}{q}}\left[(\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_3(\alpha,\beta,n,q) + (\beta-\alpha)\left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_4(\alpha,\beta,n,q)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{1}{n!}(\beta-\alpha)\left[\left|f^{(n)}(\beta)\right|^q H_3(\alpha,\beta,n,q) + \left|f^{(n)}(\alpha)\right|^q H_4(\alpha,\beta,n,q)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Sonuç 3.4 $n = 1$ için Teorem 3.3'ün şartlarını dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(\beta)\beta - f(\alpha)\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq [|f'(\beta)|^q H_3(\alpha,\beta,1,q) + |f'(\alpha)|^q H_4(\alpha,\beta,1,q)]^{\frac{1}{q}}$$

Teorem 3.4 $n \in \mathbb{N}$ ve $f: (0,\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu n-kere diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < \beta$ olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[\alpha,\beta]$ ve $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığı üzerinde h-konkav fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1}-f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right)-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!}2^{-\frac{1}{q}}(\beta-\alpha)\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{q}}L_{np}^{n}(\alpha,\beta)\left|f^{(n)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|.$$

İspat. Eğer $q>1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ aralığında h-konkav fonksiyon ise bu durumda Lemma 2.1, h-konveks fonksiyonlar için yazılmış olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Hölder eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\left(\frac{f^{(r)}(\beta)\beta^{r+1}-f^{(r)}(\alpha)\alpha^{r+1}}{(r+1)!}\right)-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{\beta}x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta}x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{\alpha}^{\beta}x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left((\beta-\alpha)\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left|f^{(n)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\frac{2^{-\frac{1}{q}}}{n!}L_{np}^{n}(\alpha,\beta)(\beta-\alpha)\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{q}}\left|f^{(n)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|.$$

Sonuç 3.5 $n=1$ için Teorem 3.4'ün sonuçlarını dikkate alarak

$$\left|\frac{f(\beta)\beta-f(\alpha)\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leq 2^{-\frac{1}{q}}\left[h\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{q}}L_p(\alpha,\beta)\left|f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|.$$

eşitsizliği elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, n-kere türevlenebilen h-konveks ve h-konkav fonksiyonlar için integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Benzer yöntem ve lemmalar kullanılarak, diğer konvekslik çeşitleri için de benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Bai SP, Wang SH, Qi F, 2012. Some Hermite-Hadamard type inequalities for n-time differentiable (alpha,m)-convex functions. Journal of Inequalities and Applications, 2012:267.

Breckner WW, 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen. Puplications de L'Institut Mathematique, 23: 13-20.

Cerone P, Dragomir SS, Roumeliotis J, Šunde J, 2000.A new generalization of the trapezoid formula for n-time differentiable mappings and applications. Demonstratio Mathematica, 33 (4): 719–736.

Dragomir SS, Pečarić J, Persson LE, 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21: 335-241.

Dragomir SS, Pearce CEM, 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University.

Godunova EK, Levin VI, 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii in: Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Hwang DY, 2003. Some Inequalities for n-time Differentiable Mappings and Applications. Kyungpook Mathematical Journal, 43: 335–343.

Jiang WD, Niu DW, Hua Y, Qi F, 2012. Generalizations of Hermite-Hadamard inequality to n-time differentiable function which are s -convex in the second sense. Analysis (Munich), 32: 209–220.

Kadakal H, Maden S, Kadakal M, İşcan İ, 2017. Some New Integral Inequalities for n-Times Differentiable p-Functions. 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, 18-21 April 2017, Antalya.

Kadakal H, Kadakal M, İşcan İ, 2017. Some new integral inequalities for n-times differentiable s-convex and s-concave functions in the second sense. Mathematics and Statistic, 5(2): 94-98.

Kadakal H, Kadakal M, İşcan İ, 2017. Some New Integral Inequalities for n-Times Differentiable Godunova-Levin Functions. Cumhuriyet Üniversitesi Sciences, 38(4): Supplement 1-5.

Maden S, Kadakal H, Kadakal M, İşcan İ, 2017. Some new integral inequalities for n-times differentiable convex and concave functions. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 10(2017): 6141–6148.

Mitrinović DS, 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York.

Mitrinović DS, Pečarić JE, Fink AM. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

Özdemir ME, Kırmacı US, 2003. Two new theorem on mappings uniformly continuous and convex with applications to quadrature rules and means. Applied Mathematics and Computation, 143: 269–274.

Özdemir ME, Yıldız Ç, 2013. New Inequalities for Hermite-Hadamard and Simpson Type with Applications. Tamkang Journal of Mathematics, 44(2): 209–216.

Pečarić JE, Porschan F, Tong YL, 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications. Academic Press Inc.

Sarıkaya MZ, Sağlam A, Yıldırım H, 2008. On Some Hadamard–Type Inequalities for h-Convex Functions. Journal of Mathematical Inequalities. Volume 2(3): 335–341.

Set E, Özdemir ME, Dragomir SS, 2010. On Hadamard-Type Inequalities Involving Several Kinds of Convexity. Journal of Inequalities and Applications, 286845.

Tunç M, 2013. Ostrowski-Type Inequalities via h-Convex Functions with Applications to Special Means. Journal of Inequalities and Applications, 2013:326.

Varošanec S, 2007. On h-convexity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326: 303–311.

Xi BY, Qi F, 2013. Some Inequalities of Hermite-Hadamard Type for h-Convex Functions. Advances in Inequalities and Applications, 2(1): 1-15