Araştırma Makalesi / *Research Article* **Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(2): 1090-1097, 2019**
Matematik / Mathematics ***Journal of the Institute of Science and Technology,* 9(2): 1090-1097, 2019**

DOI: 10.21597/jist.481927 **ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618**

$QC(X)$ Üzerinde Yarı Kompakt-Açık Topoloji

İsmail OSMANOĞLU[1*]

ÖZET: Bu makalede, Tychonoff X uzayının yarı kompakt alt kümeleri üzerinde sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonların kümesi $QC(X)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji tanıtıldı. Daha sonra bu topolojinin metriklenebilirliği, tam metriklenebilirliği, ayrılabilirliği ve ikinci sayılabilirliği ayrıntılı olarak incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon uzayı, Metriklenebilirlik, Tam metriklenebilirlik, Ayrılabilirlik, İkinci sayılabilirlik

The Quasicompact-Open Topology on $QC(X)$

ABSTRACT: This paper introduces the quasicompact-open topology on the set $QC(X)$ of all realvalued functions defined on a Tychonoff space, which are continuous on quasicompact subsets of X. Then metrizability, complete metrizability, separability and second countability of this topology are studied in detail.

Keywords: *Function space, Metrizable, Completely metrizable, Separability, Second countable*

[1] İsmail OSMANOĞLU (**Orcid ID:** 0000-0002-1005-4075), Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Nevşehir, Türkiye

*Sorumlu Yazar: İsmail OSMANOĞLU, e-mail: ismailosmanoglu@yahoo.com

Geliş tarihi / *Received:*12.11.2018
Kabul tarihi / *Accepted:*23.02.2019

GİRİŞ

$C(X)$ kümesi üzerinde birçok topolojinin bulunduğu bilinen bir gerçektir. $C(X)$ üzerindeki topolojilerin başlıca sınıfları, küme-açık topolojiler ve düzgün topolojilerdir. Küme-açık topolojilerin en bilindikleri ise nokta-açık topoloji ve kompakt-açık topolojidir. Kompakt-açık topoloji ilk olarak Fox (1945) tarafından tanımlanmış, Arens ve Dugundji (Arens, 1946; Arens and Dugundji, 1951) tarafından geliştirilmiştir. Jackson (1952) bu topolojiyi kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsak fonksiyon dizileri tarafından elde etmiştir. Bu yüzden kompakt-açık topoloji, kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi olarak da bilinir. Ayrıca kompakt-açık topolojinin, düzgün yakınsaklık topolojisine denk olabilmesi için gerek ve yeter şartın uzayın kompakt olması gerektiğini göstermiştir. Kompaktlık güçlü bir koşul olduğundan bu iki topoloji arasında kayda değer bir araştırma alanı vardır. Son elli yıl içinde bu iki topoloji arasında pek çok topoloji tanımlanmıştır. Bazılarını σ-kompakt-açık (Gulick, 1992), sözde kompakt-açık (Kundu and Garg, 2016), C-kompakt-açık (Osipov, 2012), sınırlı-açık (Kundu and Raha, 1995) ve açık-açık topoloji (Porter,1993) şeklinde sıralanabilir.

Bu çalışmada, bir Tychonoff X uzayının yarı kompakt alt kümeleri üzerinde sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonların kümesi $QC(X)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji tanımlandı ve bu topolojinin metriklenebilirlik, tam metriklenebilirlik, ayrılabilirlik ve ikinci sayılabilirlik özellikleri incelendi.

Herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece (X, τ) topolojik uzayını, X uzayı olarak ifade edeceğiz. Aksi açıkça belirtilmedikçe makale boyunca, tüm uzaylar Tychonoff (tam regüler Hausdorff) olduğu kabul edilecektir. X üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini $C(X)$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}$, üzerinde standart (alışılmış) topoloji ile ele alınacaktır. X uzayının topolojisini $\tau(X)$ ile göstereceğiz. $\tau(Y)$ topolojisi $\tau(X)$ topolojisinden ince ise $\tau(X) \subset \tau(Y)$ gösterimi yerine $X < Y$ gösterimi kullanılacaktır. Son olarak, $C(X)$ deki sabit sıfır fonksiyonu f_0 ile gösterilecektir.

QUASİKOMPAKT-AÇIK TOPOLOJİ

Bu bölümde, $QC(X)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji tanımlanacak ve bazı eşdeğer tanımları verilecektir.

Tanım 2.1. X uzayında $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$ olacak biçimde reel değerli sürekli f fonksiyonu varsa A kümesine sıfır küme denir. Sıfır kümenin tümleyenine tümleyeni sıfır küme (cozero-küme) denir.

Tanım 2.2. X uzayının her tümleyeni sıfır küme örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına yarı kompakt uzay denir (Frolik, 1959).

Tanım 2.3. Her $f \in C(X)$ için $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi ise X uzayına sözde kompakt uzay denir.

Herhangi bir kompakt uzay yarı kompakt, yarı kompakt uzay ise sözde kompakttır. Ayrıca yarı kompakt uzayın sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de yarı kompakttır (D'Aristotle, 1973).

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^X$, X üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere, her $A \subseteq X$ yarı kompakt kümesi için $f|_A$ fonksiyonu sürekli ise $f \in \mathbb{R}^X$ fonksiyonuna q-sürekli fonksiyon denir. X üzerinde tanımlı tüm reel değerli q-sürekli fonksiyonların kümesini $QC(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5. Her q-sürekli fonksiyonun sürekli olduğu uzaya q_f-uzay denir.

Teorem 2.6. $QC(X) = C(X)$ dır ancak ve ancak X uzayı q_f-uzaydır.

İspat. $QC(X) = C(X)$ ise X üzerinde tanımlı tüm reel değerli q-sürekli fonksiyonlar sürekli olacağından X uzayı q_f-uzaydır.

X uzayı q_f-uzay ise X üzerinde tanımlı tüm reel değerli q-sürekli fonksiyonlar süreklidir. Yani, $QC(X) \subseteq C(X)$ dir. Tersine sürekli bir fonksiyonun kısıtlama fonksiyonu da sürekli olacağından her sürekli fonksiyon q-süreklidir. Yani, $C(X) \subseteq QC(X)$ dir. Dolayısıyla $QC(X) = C(X)$ dir.

Önerme 2.7. α, X uzayının tüm yarı kompakt alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Her $A \in \alpha$ ve $V \in \tau(\mathbb{R})$ için,

$$S(A,V) = \{f \in QC(X) : f(A) \subseteq V\}$$

kümelerinin sınıfını $QC(X)$ üzerinde bir alt bazdır.

İspat. $\mathcal{A} = \{S(A,V): A \in \alpha \text{ ve } V \in \tau(\mathbb{R})\}$ olsun. $A_1, A_2 \in \alpha$ ve $V_1, V_2 \in \tau(\mathbb{R})$ için $\mathcal{A}$ sınıfının $S(A_1, V_1)$ ve $S(A_2, V_2)$ kümelerini göz önüne alalım.

$$S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) = S(A_1, V_1 \cap V_2) \cap S(A_2, V_1 \cap V_2) \subseteq S(A_1, V_1) \cap S(A_2, V_2)$$

ve $A_1 \cup A_2 \in \alpha$ ve $V_1 \cap V_2 \in \tau(\mathbb{R})$ olduğundan $S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) \in \mathcal{A}$ elde edilir. O halde $\mathcal{A}$ sınıfı $QC(X)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır.

Tanım 2.8. Her $A \in \alpha$ ve $V \in \tau(\mathbb{R})$ için,

$$S(A,V) = \{f \in QC(X) : f(A) \subseteq V\}$$

kümelerinin sınıfını $QC(X)$ üzerinde bir alt baz kabul eden topolojiye yarı kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $QC_q(X)$ ile gösterilir.

Önerme 2.9. Her $A \in \alpha$, $f \in QC(X)$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$B_A(f,\varepsilon) = \{g \in QC(X) : \forall \text{x} \in \text{X}, |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

kümelerinin sınıfı $QC(X)$ üzerinde bir topoloji için bazdır.

İspat. $\mathfrak{B} = \{B_A(f,\varepsilon): A \in \alpha, f \in QC(X) \text{ ve } \varepsilon > 0\}$ olsun. $f_1, f_2 \in QC(X)$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $\mathfrak{B}$ sınıfının $B_A(f_1, \varepsilon_1)$ ve $B_A(f_2, \varepsilon_2)$ kümelerini göz önüne alalım. $h \in B_A(f_1, \varepsilon_1) \cap B_A(f_2, \varepsilon_2)$ ise $\text{x} \in \text{A}$ için $|f_1(x) - h(x)| < \varepsilon_1$ ve $|f_2(x) - h(x)| < \varepsilon_2$ dır. Buradan $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ alırsak $B_A\left(h, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_A(f_1, \varepsilon_1) \cap B_A(f_2, \varepsilon_2)$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathfrak{B}$ sınıfı $QC(X)$ üzerinde bir topoloji için bir bazdır.

Tanım 2.10. Her $A \in \alpha$, $f \in QC(X)$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$B_A(f,\varepsilon) = \{g \in QC(X) : \forall \text{x} \in \text{X}, |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

kümelerinin sınıfı $QC(X)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye yarı kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi denir ve bu uzay $QC_{q,u}(X)$ ile gösterilir.

$QC(X)$ üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisini, metriği norma indirgeyerek de elde edebiliriz. Her $A \in \alpha$ ve $\varepsilon > 0$ için, $QC(X)$ üzerinde $p_A = \sup\{f(x): x \in X\}$ yarı normunu ve $V_{A,\varepsilon} = \{f \in QC(X): p_A(f) < \varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{V} = \{V_{A,\varepsilon}: A \in \alpha \text{ ve } \varepsilon > 0\}$ olmak üzere, her $f \in QC(X)$ için $f + \mathcal{V} = \{f + V: V \in \mathcal{V}\}$ sınıfı f notasında yerel bazdır. Bu topoloji yarı normların sınıfı tarafından üretildiğinden yerel konvekstir ve ayrıca $QC(X)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topolojiyi ile aynıdır. Bu topolojinin Hausdorff olduğu kolayca gösterilebileceğinden $QC_q(X)$ yerel konveks Hausdorff'tur.

Teorem 2.11. Herhangi X uzayı için, $QC_q(X) = QC_{q,u}(X)$ dır.

İspat. $S(A,V)$, $QC_q(X)$ uzayında temel açık küme ve $f \in S(A,V)$ olsun. $f(A)$ yarı kompakt kümesi $\mathbb{R}$ de kompakt ve $f(A) \subseteq V$ olduğundan $(f(A) - \varepsilon,\ f(A) + \varepsilon) \subseteq V$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ vardır (bkz. (Engelking, 1989) de Corollary 4.1.14). $g \in B_A(f,\varepsilon)$ ve $x \in A$ alırsak $g(x) \in (f(x) - \varepsilon,\ f(x) + \varepsilon)$ olur. O halde $g(A) \subseteq V$, yani $g \in S(A,V)$ dir. Dolayısıyla $B_A(f,\varepsilon) \subseteq S(A,V)$ elde edilir. Buradan $QC_q(X) \leq QC_{q,u}(X)$ olduğu görülür.

Tersine, $QC_{q,u}(X)$ uzayında f noktasının açık bir komşuluğu $B_A(f,\varepsilon)$ olsun. $f(A)$ kompakt olduğundan $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(f(x_i) - \frac{\epsilon}{3},\ f(x_i) + \frac{\epsilon}{3})$ olacak biçimde $f(A)$ kümesinde $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ noktaları vardır. $V_i = (f(x_i) - \frac{\epsilon}{3},\ f(x_i) + \frac{\epsilon}{3})$ ve $W_i = (f(x_i) - \frac{\epsilon}{3},\ f(x_i) + \frac{2\epsilon}{3})$ alalım. Burada $\bar{V}_i \subseteq W_i$ dır. Ayrıca $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ dir. $A_i = A \cap f^{-1}(\bar{V}_i)$ alırsak A_i yarı kompakt ve $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olduğu kolayca görülür. Buradan $f(A_i) \subseteq \bar{V}_i \subseteq W_i$ ve $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, W_i)$ dir. Şimdi $\bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, W_i) \subseteq B_A(f,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $g \in \bigcap_{i=1}^{n} S(A_i, W_i)$ ve $x \in A$ olsun. O halde $x \in A_i$ olacak biçimde bir i vardır ve sonuç olarak $f(x) \in \bar{V}_i$ ve $g(x) \in W_i$ dir. $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$ olduğundan $g \in B_A(f,\varepsilon)$ dir. Buradan $QC_{q,u}(X) \leq QC_q(X)$ olduğu görülür.

$C_q(X)$ ile gösterilen $C(X)$ üzerinde yarı kompakt-açık topoloji (Tokat and Osmanoglu, 2016) de tanımlanmıştır. $C(X) \subseteq QC(X)$ olduğundan $C_q(X)$ uzayı $QC_q(X)$ uzayının alt uzayıdır.

$QCq(X)$ UZAYININ METRİKLENEBİLİRLİĞİ VE TAM METRİKLENEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, $QCq(X)$ uzayının metriklenebilirliği ve tam metriklenebilirliği incelenecektir. q-uzay ve hemiyarı kompakt uzay kavramlarını hatırlatmakla başlayalım.

Tanım 3.1. $x_n \in U_n$ için $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı bir yığılma noktasına sahip olacak biçimde x noktasının açık komşuluklarının $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı varsa X uzayına q-uzay denir (Siwiec, 1975).

Tanım 3.2. X uzayının herhangi yarı kompakt A alt kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına hemiyarı kompakt uzay denir (Tokat and Osmanoglu, 2016).

Teorem 3.3. Herhangi X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $QCq(X)$ uzayı metriklenebilirdir.
2. $QCq(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.
3. $QCq(X)$ uzayı bir q-uzaydır.
4. X uzayı hemiyarı kompakttır.
5. $Cq(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Herhangi bir metrik uzay birinci sayılabilir olduğundan kolayca görülür.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Birinci sayılabilir uzay q-uzay (Siwiec, 1975) olduğundan kolayca görülür.

$(3) \Longrightarrow (4)$ $QCq(X)$ uzayı bir q-uzay olsun. O halde her n için $g_n \in U_n$ ise $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı $QCq(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip olacak biçimde $QCq(X)$ uzayında f_0 sabit sıfır fonksiyonunun açık komşuluklarının $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı vardır. O zaman $f_0 \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ olacak biçimde her n için X uzayının yarı kompakt A_n alt kümesi ve $\varepsilon_n > 0$ mevcuttur. X uzayının herhangi yarı kompakt A alt kümesini alalım. A kümesi A_n kümesinin alt kümesi olmasın. O halde $a_n \in A \backslash A_n$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n(a_n) = n$ ve $g_n(A_n) = \{0\}$ olacak biçimde $g_n : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Buradan $g_n \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n)$ dir. Ancak (g_n) dizisi $QCq(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip değildir. Eğer bu dizini bir g yığılma noktası olduğunu kabul edersek her $k \in \mathbb{N}$ için $g_{n_k} \in B_A(g, 1)$ olacak biçimde $n_k > k$ pozitif tam sayısı vardır. Bu yüzden her $k \in \mathbb{N}$ için $g(a_{n_k}) > g_{n_k}(a_{n_k}) - 1 = n_k - 1 \geq k$ dır. Bu ise g fonksiyonun yarı kompakt A kümesi üzerinde sınırlı olmadığını gösterir. O halde (g_n) dizisi $QCq(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip değildir. Bu durum $QCq(X)$ uzayının bir q-uzay olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $A \subseteq A_n$ olmalıdır. Yani X uzayı hemiyarı kompakttır.

$(4) \Leftrightarrow (5)$ $Cq(X)$ uzayı metriklenebilirdir ancak ve ancak X uzayı hemiyarı kompakttır (Tokat and Osmanoglu, 2016).

$(5) \Rightarrow (1)$ X uzayı hemiyarı kompakt olsun. O halde X uzayındaki her yarı kompakt A kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde bir yarı kompakt A_n kümesi vardır. Buradan $\{p_A : \mathrm{A} \in \mathrm{QC(X)}\}$ yarı normların sınıfı tarafından üretilen topoloji, $\{p_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ yarı normların sayılabilir sınıfı tarafından üretilen topolojiden kabadır. Ayrıca biz biliyoruz ki yarı normların sayılabilir bir sınıfı tarafından üretilen yerel konveks Hausdorff topoloji metriklenebilirdir. (bk. (Taylor and Lay, 1980)). Dolayısıyla $QCq(X)$ uzayı metriklenebilirdir. ■

$QCq(X)$ uzayının tamlığını karakterize etmek için, aşağıdaki teoreme ihtiyacımız var.

Teorem 3.4. $QCq(X)$ uzayı tamdır ancak ve ancak X, q_f-uzaydır.

İspat. Herhangi yarı kompakt A alt kümesi ve $f \in C(X)$ için $f(A)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesidir. (Kundu and Raha, 1995) de Theorem 4.6 den dolayı $Cq(X)$ tamdır.

Teorem 3.5. Herhangi X uzayı için, $QCq(X)$ uzayı tamdır.

İspat. $QCq(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi (f_n) olsun. X uzayının yarı kompakt A alt kümesi için $(f_n|_A)$ dizisi $QCq(A) = Cq(A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Teorem 3.4 den $Cq(A)$ tam olduğundan $(f_n|_A)$ dizisi $Cq(A)$ uzayında f_A noktasına yakınsar. $x \in A$ için $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = f_A(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f iyi tanımlı ve X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A = f_A$ dır. O halde $f \in QC(X)$ olur. Buradan (f_n) Cauchy dizisinin f noktasına yakınsak olduğu görülür.

Tanım 3.6. Bir uzay tam ve metriklenebilir ise bu uzaya tam metriklenebilir uzay denir.

Sonuç 3.7. Herhangi bir X uzayı için, $QCq(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir ancak ve ancak $QCq(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

Sonuç 3.8. Herhangi X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $QCq(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir.
2. $QCq(X)$ uzayı metriklenebilirdir.
3. X uzayı hemiyarı kompakttır.

Sonuç 3.9. Herhangi X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $Cq(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir.
2. $Cq(X)$ uzayı metriklenebilirdir.
3. X uzayı hemiyarı kompakt q_f-uzaydır.

$QCq(X)$ UZAYININ AYRILABİLİRLİĞİ VE İKİNCİ SAYILABİLİRLİĞİ

Bu bölümde, $QCq(X)$ uzayının ayrılabilirliği ve ikincisayılabilirliği incelenecektir. Öncesinde kozmik uzay, altmetriklenebilir uzay ve σ-yarı kompakt uzay kavramlarını hatırlatalım.

Tanım 4.1. X uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{F}$ olamak üzere, her $x \in X$ ve x in her açık U komşuluğu için, $x \subseteq F \subseteq U$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine ağ denir.

Tanım 4.2. Sayılabilir ağa sahip bir uzaya kozmik uzay denir.

Tanım 4.3. X uzayından bir metrik uzaya sürekli, birebir ve içine bir fonksiyon varsa X uzayına altmetriklenebilir denir. Yani, X uzayı bir metrik uzaya gömülebilir ise Xuzayına altmetriklenebilir denir.

Tanım 4.4. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına σ-yarı kompakt uzay denir.

Önerme 4.5. Herhangi X uzayı için, $Cq(X)$ uzayı ayrılabilir ise X uzayı q_f-uzaydır.

İspat. $Cq(X)$uzayı ayrılabilir ise (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.10 den X uzayı altmetriklenebilirdir. O halde X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A$ kısıtlama fonksiyonu süreklidir. X uzayı tam regüler ve altmetriklenebilir olduğundan her yarı kompakt A alt kümesi kompakttır. O halde $f|_A$ nin $f: X \to \mathbb{R}$ genişleme fonksiyonu süreklidir (Husain, 1977). Dolayısıyla X uzayı q_f-uzaydır.

Sonuç 4.6. X uzayı altmetriklenebilir ise X uzayı q_f-uzaydır.

Teorem 4.7. σ-yarı kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir

1. $Cq(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
2. $QCq(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
3. X uzayının her yarı kompakt alt uzayı metriklenebilirdir
4. X uzayı kozmiktir.
5. X uzayı altmetriklenebilirdir.

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$ $Cq(X)$uzayı ayrılabilir ise Önerme 4.5 den X uzayı q_f-uzaydır. Yani, $C(X) = QC(X)$ dir. O halde $Cq(X)$ uzayı ayrılabilir ise $QCq(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

$(2) \Rightarrow (3)$ X uzayının A yarı kompakt alt kümesi için $QCq(A) = Cq(A)$ dir. Ayrıca $QCq(X)$ uzayı ayrılabilir olduğundan $Cq(X)$ uzayı ayrılabilirdir. O halde (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.10 dan X uzayı altmetriklenebilirdir. Tam regüler, yarı kompakt ve altmetriklenebilir bir uzay metriklenebilir (McArthur, 1973) olacağından A metriklenebilirdir.

$(3) \Rightarrow (4)$ X uzayı σ-yarı kompakt uzay olduğundan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. Her A_n metriklenebilir olduğundan kompakttır. Dolayısıyla her A_n ikinci sayılabilirdir. O halde her A_n, $\mathfrak{B}_n$ sayılabilir ağına sahiptir. Buradan $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$, X uzayı için sayılabilir ağdır. Dolayısıyla X uzayı kozmik uzaydır.

$(4) \Rightarrow (5)$ (McCoy and Ntantu, 1988) de Theorem 4.3.4 den açıktır.

$(5) \Rightarrow (1)$ (Engelking, 1989) de Example 3.8.C den X uzayı σ-yarı kompakt ve altmetriklenebilir uzaydır ancak ve ancak X uzayı ayrılabilir ve altmetrikelenebilridir. O halde (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.10 den $Cq(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

Teorem 4.8. Herhangi X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $Cq(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
2. $QCq(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
3. X uzayı hemiyarı kompakt ve altmetriklenebilirdir.

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$ $Cq(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ve ikinci sayılabilir uzay ayrılabilir olduğundan (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.10 den X uzayı altmetriklenebilirdir. Sonuç 4.6 dan X uzayı q_f-uzaydır. Yani, $C(X) = QC(X)$ dir. O halde $Cq(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $QCq(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

$(2) \Rightarrow (3)$ $QCq(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise metriklenebilir ve dolayısıyla ayrılabilirdir. Teorem 3.3 den X uzayı hemiyarı kompakt ve Teorem 4.7 den X uzayı altmetriklenebilirdir.

$(3) \Rightarrow (1)$ X uzayı hemiyarı kompakt ise (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.8 den $Cq(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Buradan X uzayı hemiyarı kompakt ve altmetriklenebilir ise X uzayı ayrılabilir ve altmetriklenebilir. (Tokat and Osmanoglu, 2016) de Theorem 3.10 den $Cq(X)$ uzayı ayrılabilirdir. Bu yüzden $Cq(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

KAYNAKLAR

Arens R F, 1946. A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics. 47: 480–495.

Arens R, Dugundji J, 1951. Topologies for function spaces. Pacific Journal of Mathematics. 1: 5–31.

D'Aristotle A J, 1973. Quasicompactness and functionally Hausdorff spaces. Journal of the Australian Mathematical Society. 15(3): 319–324.

Engelking R, 1989. General Topology, revised and completed ed. Heldermann Verlag, Berlin.

Fox, R H, 1945. On topologies for function spaces. Bulletin of the American Mathematical Society. 51: 429–432.

Frolik, Z, 1959. Generalization of compact and Lindelöf spaces. Czechoslovak Mathematical Journal. 13(84): 172–217 (Russian).

Gulick, D, 1992. The σ-compact-open topology and its relatives. Mathematica Scandinavica. 30: 159–176.

Husain T, 1977. Topology and Maps. Plenum Press, New York.

Jackson J R, 1952. Comparison of topologies on function spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 3: 156–158.

Kundu S, Garg P,2016. The pseudocompact-open topology on C(X). Topology Proceedings. 30(1): 279– 299.

Kundu S, Raha A B, 1995. The bounded-open topology and its relatives. Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste. 27: 61–77.

McArthur W. G, 1973. G_δ-diagonals and metrization theorems. Pacific Journal of Mathematics. 44(2): 613-617.

McCoy R A, Ntantu I, 1988. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. Springer-Verlag, Berlin.

Osipov A V, 2012. The C-compact-open topology on function spaces. Topology and its Applications. 159: 3059–3066.

Porter K F, 1993. The open-open topology for function spaces. InternationalJournal of Mathematics and Mathematical Sciences. 16 (1): 111–116.

Siwiec F,1975. Generalizations of the first axiom of countability. Rocky Mountain J. Math. 5(1): 1-60.

Taylor A. E, Lay D. C, 1980. Introduction to Functional Analysis, 2nd ed.. John Wiley and Sons, New York.

Tokat D, Osmanoglu I, 2016. Some properties of the quasicompact-open topology on C(X). Journal of Nonlinear Sciences and Applications. 9: 3511–3518.