




## “Matematiğin Üç Dünyası” Teorisine Göre 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Becerilerinin Procept Düzeyleri

### Procept Levels of 8<sup>th</sup> Grade Students' Mathematical Thinking Skills According to the Theory of “Three Worlds of Mathematics”

Esra AKARSU YAKAR , Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir/ TÜRKİYE, [es.akarsu@gmail.com](mailto:es.akarsu@gmail.com)

Süha YILMAZ , Prof. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İzmir/TÜRKİYE, [suha.yilmaz@deu.edu.tr](mailto:suha.yilmaz@deu.edu.tr)

---

Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz, S. (2019). "Matematiğin üç dünyası " teorisine göre 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin procept düzeyleri, *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, 10(1), 1-13.*

Geliş tarihi: 21.10.2018

Kabul tarihi: 21.05.2019

Yayımlanma tarihi: 28.06.2019

---

**Öz.** Bu çalışmada 8. sınıfta öğrenim gören öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini incelemek amaçlanmıştır. Tall (2007) tarafından geliştirilen matematiğin üç dünyası teorisi içerisinde yer alan procept düzeyleri araştırmanın temelini oluşturmuştur. Procept düzeyleri işlem (procedure), süreç (process) ve hem süreç hem kavram (procept) olmak üzere birbirini takip eden üç aşamadan meydana gelmektedir. Durum çalışması nitel araştırma deseni olarak belirlenmiştir. Araştırma 2017-2018 öğretim döneminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya Türkiye' nin batı bölgesinde yer alan bir devlet okulunun 8. sınıfında öğrenim gören 20 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere araştırmacılar tarafından dört tane soru yöneltilmiştir. Öğrenciler soruları 40 dakikalık süre içerisinde cevaplandırmıştır. Araştırmanın bulguları betimsel analiz yöntemiyle incelenmiştir. Araştırma bulguları incelendiğinde, 8. sınıf öğrencilerinin işlem süreci sonrasında oluşan kavramı belirttikleri için hem süreç hem kavram düzeyine ulaşabildikleri sonucuna varılmıştır. Bazı öğrencilerin ise işlem ve süreç düzeylerinden diğer düzeylere geçiş yapamadıkları gözlenmiştir. Bu öğrencilerin sadece işlem süreci odaklandıkları ve kavrama dair açıklama yapmadıkları bulgusuna ulaşılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte zorluk yaşadıkları belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Matematiksel düşünme, Matematiğin üç dünyası, Procept.

**Abstract.** In the study, it is aimed to examine mathematical thinking skills of 8<sup>th</sup> grade students. Procept levels in the three worlds of mathematics developed by Tall (2007) is basis for the research. The case study has been adopted as a qualitative research design. Procept levels consist of three levels: procedure, process and procept. The research was conducted in 2017-2018 academic year. 20 students from 8<sup>th</sup> grade of a public school participated in the study in the western part of Turkey. The students were asked four questions by the researchers. They answered these questions within 40 minutes. The findings of the study were analyzed with descriptive analysis method. When the findings of the research are examined, it is determined that 8<sup>th</sup> grade students reached the level of procept because they have stated that there is a certain concept after the process. It was observed that some students could not transition to other levels of the procedure and process levels. It was found that these students only focused on the operational process and did not explain the concept. In addition, it was determined that students had difficulty in transition from arithmetic to algebra.

**Keywords:** Mathematical thinking, Three worlds of mathematics, Procept.

## SUMMARY

**Introduction.** Mathematics education; have skills such as thinking and reasoning (Umay, 2003). Mathematical thinking is the effort shown in the problem solving phase (Yıldırım, 2010). According to Yeşildere and Türnüklü (2007), mathematical thinking is the explanation of the solution of the problem. Burton (1984) considers mathematical thinking as a style of thinking. According to Alkan and Bukova Güzel (2005), individuals continuously use mathematical thinking in their lives. That is why every individual advocates the development of mathematical thinking skills. The three worlds of mathematics are a theoretical framework developed by Tall (2007), examining the mathematical thinking processes of individuals in three levels. This research will focus on the theory of procept which expresses the proceptual-symbolic world within the theoretical framework of the three worlds of mathematics. Gray and Tall (1994) have described procept in mathematics as symbolic representation of both the process result and the process in the same way. According to procept theory, in a student, the realization of the mathematical thinking levels takes place in three consecutive levels in the form of procedure, process and procept. As a result of the literature review, it was found that the students were forced to express their symbols during mathematical thinking processes (Arslan and Yıldız, 2010, Keskin, Akbaba Dağ and Altun, 2013) and problem-solving in reasoning (Yeşildere and Türnüklü, 2007). In this research, unlike the literature, the mathematical thinking skills of the 8<sup>th</sup> grade students were investigated by the theory of procept in the context of the proceptual-symbolic world within the three thinking worlds.

**Method.** The case study was adopted as a qualitative research design. Because the research aims to examine the mathematical thinking skills of 8<sup>th</sup> grade students in terms of procept theory according to the theoretical framework of the three worlds of mathematics. The research was conducted in 2017-2018 academic year. 20 students from 8<sup>th</sup> grade of a public school participated in the study in the western part of Turkey. The students were asked four questions by the researchers and they were asked to answer these questions within 40 minutes. The questions were prepared by researchers using the relevant literature (Hunter, Monaghan, Roper, 1993; Tall, 2008) to include the steps of the procedure, process and procept. The findings of the study were analyzed with descriptive analysis method.

**Results.** When the obtained data are examined it has been determined that some of the 8<sup>th</sup> grade students have reached the level of procept because they have specified a certain concept after the process. Students preferred to give examples from everyday life while explaining their expressions. Students were able to explain what algebraic expressions mean, and a few of them have stated that they have the result. When the answers given by the students to the questions are evaluated in general, it is seen that the answers that are the result of the algebraic expressions are the answers given by the students who can not reach the procept level. Students have stated that a concept involves more than one process. It has been seen that some students have difficulty in expressing the concept and are focused only on the process. This situation was interpreted as that the students reached the process level but could not reach the procept level. It has been determined that some students can not transit from one level of procedure to the other in order to express only operational process. Furthermore, it has been determined that students tend to express verbal expressions with numbers before converting them into algebraic expressions, that is, they tend to perform arithmetic operations before thinking algebraically.

**Discussion and Conclusion.** When the results of the research are evaluated; due to the teaching they have received in previous years due to the curriculum, 8<sup>th</sup> grade students are expected to reach the procept level. However, when the study was evaluated in terms of the study group half of the student group is evaluated at this level, the students have some problems in the transition to abstract thinking, it was interpreted that some students were forced to shift from arithmetic to algebra. It is seen that some students in the study have difficulties even expressing a number, which is an important problem in terms of mathematical language development.

## Giriş

Matematik eğitiminin, işlem yapma gibi beceriler kazandırmasının yanında düşünme ve akıl yürütme gibi beceriler kazandırma işlevleri vardır (Umay, 2003). Buradaki düşünme biçimi matematiksel düşünmedir. Birey, bir matematiksel bir kavramı anlamak için matematiksel düşünme becerilerini kullanır (Schoenfeld, 1992). Matematiksel düşünme; soyutlama, genelleme, modelleme ve ispat gibi üst düzey düşünme becerileri içerir (Tall, 2002). Sevgen'e (2002) göre, matematiksel düşünme yoluyla bireyler sistematik düşünme gerçekleştirirler. Problem çözerken üst düzey düşünme gerçekleşmesi, matematiksel düşünme ile gerçekleşir (Yeşildere, 2006). Yeşildere ve Türnüklü'ye (2007) göre matematiksel düşünme, problemin çözümünün açıklanmasıdır. Burton (1984) matematiksel düşünmeyi düşünme stili olarak görmektedir. Bu anlamda matematiksel düşünme sadece matematiksel işlemleri çözmek değildir. Günlük hayatta karşılaşılan bir durumu matematiksel süreçlerden geçirme olarak da değerlendirilebilir. Ancak, matematiksel düşünme günlük düşünme değildir. Günlük düşünme sürecinin sistematik olarak gerçekleşmesidir. Stacey, Barton ve Mason'a (1985) göre matematiksel düşünme, anlamayı genişleten bir süreçtir. Alkan ve Bukova Güzel'e (2005) göre bireyler yaşamlarında sürekli olarak matematiksel düşünmeyi kullanırlar. Bu yüzden her bireyin matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini savunmaktadırlar. Günlük yaşamda dahi bir problemle karşılaşıldığında o problemi değerlendirmek matematiksel düşünmeyi gerektirir (Borromeo Ferri ve Kaiser, 2003). Bu bağlamda matematiksel düşünme, problem çözme aşamasında gösterilen çabadır (Yıldırım, 2010).

Matematiksel düşünme; bazı araştırmacılar tarafından problem çözme ile ilişkilendirilirken (Burton, 1984; Cai, 2002; Schoenfeld, 1992; Stacey, Burton ve Mason, 1985), bazı araştırmacılar da kavramsal anlamada matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine odaklanmıştır (Mudrikah, 2016; Tall, 1991; Sezgin Memnun, 2011; Yeşildere, 2006). Matematiğin üç dünyası, matematiksel düşünmenin gelişimine odaklanan ve bireylerin matematiksel düşünme becerilerini üç aşamada incelemek amacıyla Tall (2007) tarafından geliştirilen bir teorik çerçevedir. Buna göre matematiksel düşünme üç düşünme dünyası içerir. Bunlar; nesnelere dış görünüşleri üzerine odaklanan kavramsal somut dünya (the conceptual-embodied world), eylem süreciyle birlikte kavramı ifade etmeyi temsil eden nesnel ve süreçsel sembolik dünya (the proceptual-symbolic world), kanıtlama süreciyle kavramı ifade etmeyi temsil eden aksiyomatik formal dünyadır (the axiomatic- formal world) (Tall, 2007). Matematiğin üç dünyasına göre bireylerin düşünme biçimleri birbirinden farklıdır. Matematiksel düşünmede bu farklılıkların dikkate alınması gerekmektedir. Üç düşünme dünyasındaki süreç birbirini takip eden bir süreçtir. Bu araştırmada da matematiğin üç dünyası teorik çerçevesi içerisinde yer alan nesnel ve süreçsel sembolik dünyadaki procept düzeyleri üzerinde durulacaktır.

Gray ve Tall (1994) matematikte hem işlem sonucunun, hem de işlemin aynı şekilde sembolik olarak gösterilmesini procept kavramı ile açıklamışlardır. Procept'e ulaşmak üç aşamada gerçekleşir. Buna göre bir öğrencide matematiksel düşünme sürecinin gerçekleşmesi; işlem (procedure), süreç (process) ve hem süreç hem kavram (procept) şeklinde birbirini takip eden aşamalarda meydana gelmektedir. İşlem aşamasında öğrenci ilk olarak işlemleri nasıl uygulaması gerektiğini öğrenir. Eğer

öğrenci işlemi birçok kez uygular ve yaptığı işlemi belirli bir matematiksel yöntem olarak düşünürse süreç aşaması gerçekleşmiş olur. Öğrenci sürecin kendisini ve işlemin sonucunu temsili olarak aynı anda sembol olarak algıladığı zaman ise hem süreç hem kavram aşaması gerçekleşir. Örnek olarak sayı kavramı düşünülebilir. Birbirini takip eden sayma işlemi sonucunda eğer öğrenci sayı kavramının oluşumunu anlayabiliyor ve sembolik olarak ifade edebiliyorsa hem süreç hem kavram düzeyine ulaşmış şeklinde yorumlanabilir. "5" sayısını düşünürsek bu sayı; 1' den 5' e kadar sayma, 2+3 gibi işlemsel süreçleri barındıran sembolik bir gösterimdir. Bu da "5" kavramının procept olduğunu göstermektedir. Hem süreç hem kavram düzeyi için süreç, süreç düzeyi için işlem düzeyinde düşünme gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak matematiğin üç dünyası teorik çerçevesinde yer alan procept düzeyleri açısından somut düşünmeden soyut düşünmeye geçiş ve sembolleştirme süreci önemlidir.

Milli Eğitim Bakanlığı'nın (MEB, 2017) matematik dersi öğretim programı, bilginin birey için anlamlı ve yaşantısal hâle getirilmesi gerektiği üzerine odaklanmıştır. Öğretim programına göre; birey günlük yaşamda karşılaştığı bir durumu matematiksel olarak yorumlayabilmeli, matematiksel okuryazarlık becerisine sahip olmalı ve etkin kullanabilmelidir. Birey matematiksel kavramları açıklarken ve yorumlarken matematiksel düşünme süreçlerini kullanabilmelidir (MEB, 2017).

Yapılan literatür taraması sonucunda, matematiksel düşünme süreçlerinde öğrencilerin sembolleri ifade etme (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ ve Altun, 2013), problem çözme ve akıl yürütme gibi süreç becerilerinde zorlandıkları (Yeşildere ve Türnüklü, 2007) belirlenmiştir. Öğrenciler ilköğretim döneminde somut düşünmekte, 11 yaşından itibaren soyut düşünmektedirler (Baykul, 2009; Senemoğlu, 2009). Ayrıca literatür incelendiğinde öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini; RBC (recognizing, building, construction) teorisi (Tsamir ve Dreyfus, 2002; Türnüklü ve Özcan; 2014; Yeşildere, 2006), Solo Taksonomisi (Bağdat ve Saban, 2014; Chan, Tsui, Chan ve Hong, 2002; Groth ve Bergner, 2006; Köse, 2018; Lucas ve Mladenovic, 2008) ve APOS (action, process, object, schema) teorisi (Açan, 2015; Açıl, 2015; Hannah, Stewart ve Thomas, 2016; Martínez-Planella ve Triguerosb, 2019; Mudrikah, 2016) gibi farklı soyutlama teorileri açısından inceleyen araştırmalar yer alırken, az sayıda araştırmanın (Chin ve Tall, 2002; Kidron, 2008; Watson, Spyrou ve Tall, 2003) procept kavramını ele aldığı belirlenmiştir. Bu araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini, matematiğin üç düşünme dünyası içerisinde yer alan nesnel süreçsel sembolik dünyadaki procept düzeyleri açısından incelemek amaçlanmıştır.

## Yöntem

Araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini matematiğin üç dünyası teorisine göre procept düzeyleri açısından incelemek amaçlandığı için durum çalışması nitel araştırma deseni olarak belirlenmiştir. Durum çalışmasının seçilme nedeni araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin mevcut matematiksel düşünme süreçlerini belirlemektir. Bu tür araştırmalarda "nasıl" ve "niçin" soruları önemlidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Durum çalışması bireyin konuyu nasıl anladığının araştırılması sürecinde uygun bir yöntemdir (Stake, 2006). Araştırma 2017-2018 öğretim döneminde Türkiye' nin batı bölgesinde bulunan bir devlet okulunda gerçekleştirilmiştir. Araştırma kolay ulaşılabılır durum örneklemesi yöntemiyle belirlenen 20 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmaya katılan öğrencilerin not ortalamalarına göre dağılımı Tablo 1' deki gibidir.

Tablo 1 incelendiğinde araştırmaya katılan öğrencilerin %15'i 0-44 düzeyinde, %20'si 45-54 düzeyinde, %15'i 55-69 düzeyinde, %30'u 70-84 düzeyinde ve %20'si 85-100 düzeyinde matematik

not ortalamasına sahiptir. Araştırmaya katılan öğrencilerin cinsiyet değişkeni açısından dağılımları ise Tablo 2’de gösterilmiştir.

Tablo 1.

8. Sınıf öğrencilerinin not ortalamalarına göre dağılımı

Not ortalamaları	F	%
0-44	3	15
45-54	4	20
55-69	3	15
70-84	6	30
85-100	4	20

Tablo 2’ye göre öğrencilerin %60’ını kız öğrenciler, %40’ını ise erkek öğrenciler oluşturmuştur. Araştırmada cinsiyet değişkeni sadece öğrenciler arasında dengeli dağılımın sağlanması için dikkate alınmıştır.

Tablo 2.

8. Sınıf öğrencilerinin cinsiyet değişkenine göre dağılımı

Cinsiyet	F	%
Kız	12	60
Erkek	8	40

Araştırma süresince araştırmacılar tarafından öğrencilere matematiksel düşünme becerilerini ortaya çıkaracağı düşünülen dört soru yöneltilmiştir. Sorular araştırmacılar tarafından işlem, süreç ve hem süreç hem kavram düzeylerini içerecek şekilde ilgili literatürden (Hunter vd., 1993; Tall, 2008) yararlanılarak hazırlanmıştır. Soruların sorulma sırası aritmetikten cebirsel ifadeye geçiş süreci olarak belirlenmiştir. Procept düzeyleri açısından işlem, işlemsel süreç ve süreç sonucunda kavramı sembolik olarak ifade etme becerileri önemli olduğundan sembolik ifadeye geçiş süreci soruların sorulma sırasını oluşturmada belirleyici bir etken olmuştur. Soruların hazırlanma sürecinde alanında uzman üç öğretim üyesinin ve iki matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır. Alınan görüşler birbiri ile uyumlu bulunmuştur. Öğrencilerden ilk olarak 5’i anlatmaları istenmiştir. Sayı kavramı birden fazla işlemsel süreç içerdiği ve sayının kendisi procept olduğu için araştırmanın amacına uygun bir soru olarak kabul edilmiştir. Ardından öğrencilerden, 4 ile 3’ün toplamının ifade ettiği anlamı açıklamaları istenmiştir. Burada ölçülmek istenen beceri işlemsel süreç sonucunda oluşan kavramı ifade etmeleridir. Procept düzeyleri sembolik ifade etme sürecini de içerdiği için öğrencilere yöneltilen bir diğer soru a ile 3b’nin toplamının ne anlama geldiğini açıklamalarıdır. Öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini hem süreç hem kavram düzeyleri açısından ölçebileceği düşünülen bir diğer soru ise “Herhangi bir sayıyı 4 ile çarptıktan sonra 8 eklenmesi ile aynı sayıya 2 eklendikten sonra 4 ile çarpılması arasında fark var mıdır?” şeklindedir. Bu soruda öğrencilerden sözel ifadeye uygun cebirsel ifade yazmaları ve iki ifadeyi karşılaştırmaları beklenmiştir.

Araştırmanın uygulama sürecinde öğrencilerden 40 dakikalık bir süre içerisinde soruları çözmeleri ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Veriler öğrencilerin kendi sınıf ortamında, araştırmacılar tarafından toplanmıştır. Araştırma bulguları betimsel analiz yöntemiyle incelenmiştir. Betimsel analiz, belirlenmiş temalar doğrultusunda verileri yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Öğrencilerin hangi procept düzeyinde yer aldıkları önce sorulara verdikleri cevapların hangi düzeyde yer aldığına belirlenmesi ile analiz edilmiştir. Verilerin değerlendirilme sürecinde Tall (2008) tarafından belirlenen procept düzeylerine dair çerçeve ele alınmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplar sadece işlem becerisini içeriyorsa işlem düzeyinde, işlemsel süreci açıklıyorsa süreç düzeyinde, süreç sonucunda oluşan kavramı sembolik olarak ifade edebiliyorsa hem süreç hem kavram düzeyinde değerlendirilmiştir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünme düzeylerinin yer aldığı procept

düzeyleri belirlenmiştir. Öğrenci en az bir soruda hem süreç hem kavram düzeyine uygun cevap vermişse hem süreç hem kavram düzeyinde değerlendirilmiştir. Eğer öğrenci hiçbir soruda süreç düzeyinden hem süreç hem kavram düzeyine doğru bir düşünme gerçekleştirmediyse süreç düzeyinde değerlendirilmiş, aynı şekilde işlem düzeyinden süreç düzeyine doğru bir düşünme gerçekleştirmediyse işlem düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri sorulan her bir soru için ayrı olarak procept düzeyleri açısından incelenmiştir. Araştırmanın verileri analiz edilirken her iki araştırmacı tarafından her bir öğrencinin cevap kağıdı önce ayrı olarak değerlendirilmiştir. İki değerlendirme arasındaki uyum "5" i anlatır mısınız?" sorusu için Miles ve Huberman (1994) tarafından belirlenen uyum yüzdesi ile değerlendirilmiş ve aralarındaki uyum %85 olarak bulunmuştur. Öğrencilerin matematiksel düşünme düzeylerinin procept düzeyleri açısından değerlendirilme sürecinde iki araştırmacı arasındaki uyum yüzdesi %90 olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla veri analizi sürecinde uzman görüşleri arasındaki uyumun yüksek olduğu belirlenmiştir. Ayrıca her bir cevap kağıdında veriler değerlendirilirken diğer cevap kağıtlarına geri dönmüş, analizler arasındaki uyuma bakılmış ve procept düzeyleri açısından sınıflandırma kontrol edilmiştir. Bulgular bölümünde her bir soruda öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenerek, verilen cevapların uygun olduğu procept düzeyi açıklanmıştır.

## Bulgular

Bu bölümde araştırma amacına uygun olarak elde edilen bulgulara ve öğrencilere yöneltilen sorulara ait cevaplardan bazı örnekler yer verilmiştir.

İlk olarak 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri, procept düzeyleri açısından hangi aşamada yer aldıklarına göre sınıflandırılmıştır. Bulgular Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3.

8. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin procept düzeyleri açısından sınıflandırılması

Procept düzeyleri açısından matematiksel düşünme becerileri	F	%
İşlem	4	20
Süreç	6	30
Hem süreç hem kavram	10	50

Tablo 3 incelendiğinde araştırma grubunda yer alan 8. sınıf öğrencilerinin yarısının (%50) hem süreç hem kavram düzeyine ulaştığı görülmüştür. %30'unun sadece süreç düzeyine kadar cevaplar verdiği, %20'sinin ise işlem düzeyinde yer aldığı belirlenmiştir. Elde edilen bulgular açısından araştırmaya katılan 8. sınıf öğrencilerinin hem süreç hem kavram düzeyine ulaşabildikleri söylenebilir.

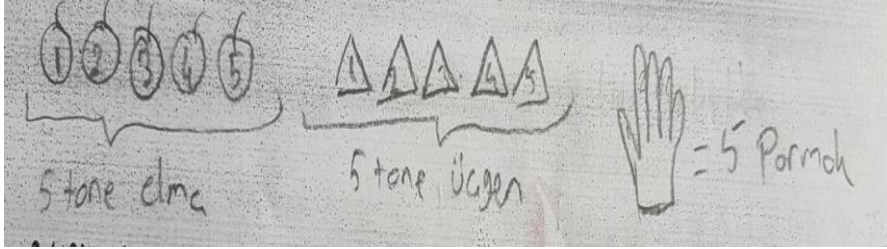
Öğrencilere sorulan sorular açısından bulgular incelendiğinde; öğrencilerden ilk olarak matematiksel düşünme açısından hem süreç hem kavram düzeyine ulaşmaları beklenen "5"i anlatmaları istenmiştir. Bu soruya ait veriler Tablo 4' de gösterilmiştir.

Tablo 4.

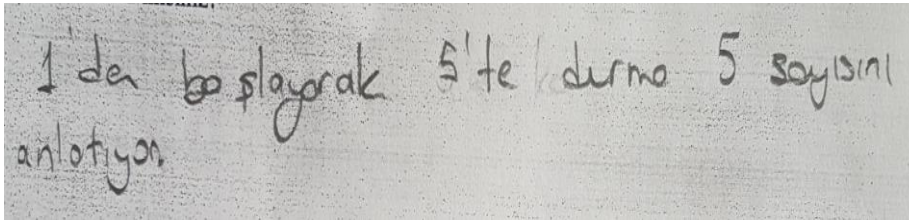
Öğrencilerin "5" kavramına ait cevapları

Öğrenci cevapları	F	%
Bir rakam	2	10
Bir sayı	3	15
5 adet nesne	7	35
Sayma işlemi sonucunda oluşma	8	40

Tablo 4' de yer alan öğrenci cevapları incelendiğinde öğrencilerin %40' ı "sayma işlemi sonucunda oluşma" cevabı ile hem süreç hem kavram düzeyinde cevaplar vermiştir. Öğrencilerin %35'inin ise "5 adet nesne" ifadesi ya da çizerek verdikleri cevaplarla, sayma işlemi sonucunda oluşan kavramı ifade ettikleri için hem süreç hem kavram düzeyinde cevaplar verdikleri belirlenmiştir. Geri kalan öğrenciler ise kavramın içerdiği işlemsel süreci açıklayamamıştır. "Bir rakam" ya da "bir sayı" şeklinde verilen cevapların, sadece o kavramı tasvir etmeye yönelik cevaplar olduğu ve işlemsel süreci ifade etmediği için işlem düzeyinde değerlendirilmiştir. Hem süreç hem kavram düzeyinde yer alan öğrenci cevaplarından örnekler Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 1. 5'i beş adet nesne olarak tasvir eden öğrenci cevabı



Şekil 2. 5'i sayma işlemi sonucunda oluşan bir sayı olarak belirten öğrenci cevabı

Şekil 1'de öğrenci sayma işlemini tasvir ederek cevaplandırmış ve "1,2,3,4,5" şeklinde sayma sonucunda 5 oluştuğunu belirtmiştir. Şekil 2' de ise bir başka öğrencinin 5'in sayma sonucunda oluştuğunu sözel olarak belirttiği görülmüştür. Bu öğrencilerin verdikleri cevaplar değerlendirildiğinde sayma işlemi sonucunda oluşan 5 kavramını ifade ettikleri için hem süreç hem kavram düzeyine uygun cevap verdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

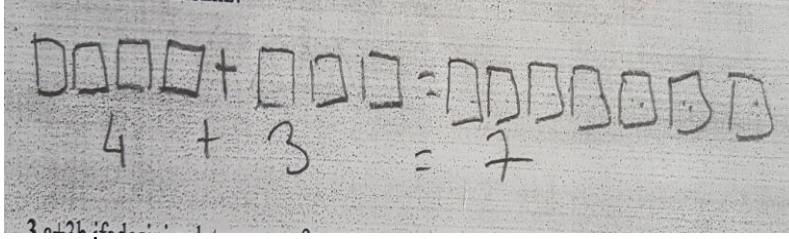
Araştırmada öğrencilerden hem süreç hem kavram düzeyinde düşünme becerisi gösterebilecekleri düşünülen 4 ile 3'ün toplamını açıklamaları istenmiştir. Bu soruya ait veriler Tablo 5'te gösterilmiştir.

Tablo 5.

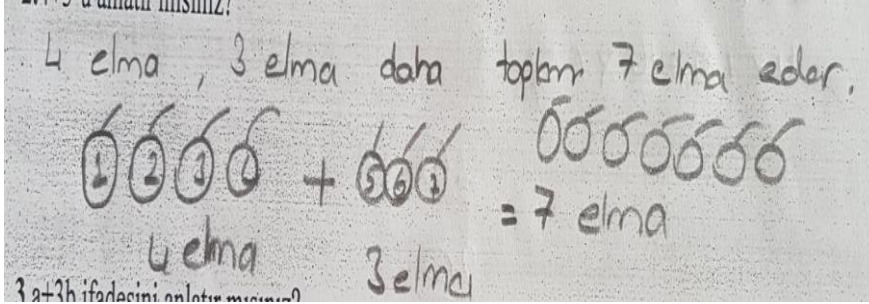
"4+3"e ait öğrenci cevapları

Öğrenci cevapları	F	%
işlem (toplama)	2	10
farklı bir sayı	3	15
7	2	10
4 e 3 eklenmiş	4	20
4 ile 3 ün toplamı 7	9	45

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin %45'inin süreci ve süreç sonunda ulaşılan kavramı ifade ettikleri için hem süreç hem kavram düzeyinde cevap verdikleri görülmektedir. Öğrencilerin toplam %35'i işlem düzeyinde değerlendirilen "işlem", "farklı bir sayı", "7" cevaplarını verirken; %20'si süreç düzeyinde değerlendirilen "4'e 3 eklenmiş" cevabını vermiştir. Sadece "işlem", "farklı bir sayı" ya da sadece "7" cevabını veren öğrencilerin işlem düzeyinde değerlendirilmelerinin nedeni, işlemsel süreci ifade etmemelerinden kaynaklanmıştır. Öğrenciler, işlem ve işlemin ifade ettiği kavramı birlikte belirtmemişlerdir. Şekil 3 ve Şekil 4'te bu soruya ait öğrenci cevaplarına örnekler verilmiştir.



Şekil 3. İşlemi nesnelere ile tasvir eden öğrenci cevabı



Şekil 4. İşlemi günlük yaşamdan nesnelere ile tasvir eden öğrenci cevabı

Şekil 3'te işlemi nesnelere ile tasvir eden öğrenci cevabı görülürken, Şekil 4'te ise işlemi günlük yaşamdan nesnelere ile tasvir eden öğrenci cevabı görülmektedir. Şekil 4'e dikkat edildiğinde öğrenci "1, 2, 3, 4" şeklinde sayma işlemi üzerine "5, 6, 7" şeklinde saymaya devam ederek 7 kavramına ulaşmıştır. Bu anlamda her iki öğrencinin de hem süreç hem kavram düzeyinde cevap verdiği söylenebilir.

Procept düzeyleri sembolleştirme sürecini de içerdiği için öğrencilerden "a ile 3b'nin toplamı"nın açıklamaları istenmiştir. Bu soruda cebirsel ifadeye geçiş söz konusudur. Soruya ait veriler Tablo 6'da gösterilmiştir.

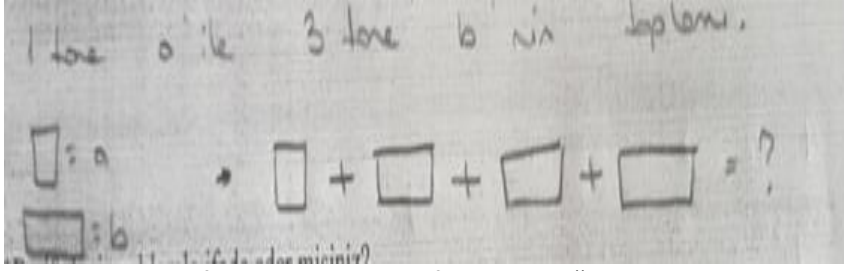
Tablo 6.

"a+3b" ye ait öğrenci cevapları

Öğrenci Cevapları	F	%
3ab	4	20
Nesnelerin toplamı	7	35
Bilinmeyen iki sayının toplamı	9	45

Tablo 6 incelendiğinde öğrencilerin %20'si sonucunun 3ab olduğunu, %35'i nesnelere ile toplama işlemi belirttiğini, %45'i de harflerin bilinmeyen sayıları temsil ettiğini ve farklı bilinmeyenler olduğu için toplama işleminin gerçekleşmeyeceğini belirttiği bulgularına ulaşmıştır. "3ab" cevabını veren öğrenciler işlemin sonucunun olduğunu söyledikleri için işlem düzeyinde değerlendirilmiştir. Ancak cevapları yanlıştır. Bu durum öğrencilerin cebirsel ifadenin sonucu olduğuna dair hataları olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Ayrıca bu öğrencilerden bazıları cebirsel ifadeyi denklem olarak değerlendirmiştir. "Nesnelerin toplamı" cevabını veren öğrenciler ise bu nesnelere farklı nesnelere olup olmadığını belirtmedikleri ve somut düşünmeyle işlemsel sürece odaklandıkları için süreç düzeyinde değerlendirilmiştir. "Bilinmeyen iki sayının toplamı" cevabını veren öğrenciler ise bu sayıların farklı olduklarını belirttikleri için hem süreç hem kavram düzeyinde değerlendirilmiştir. Bu anlamda öğrencilerin birçoğunun hem süreç hem kavram düzeyinde cevaplar verdiği söylenebilir. Öğrenci cevaplarına ait bir örnek Şekil 5'de gösterilmiştir.





Şekil 5. Cebirsel ifadeyi nesnelere ile ifade eden öğrenci cevabı

Şekil 5'te gösterilen cevap incelendiğinde öğrenci a ve b'yi farklı iki nesne olarak göstermiş ve cevabının olmadığını da soru işareti ile belirtmiştir. Bu öğrenci cevabı da hem süreç hem kavram düzeyinde verilen cevaplara örnektir.

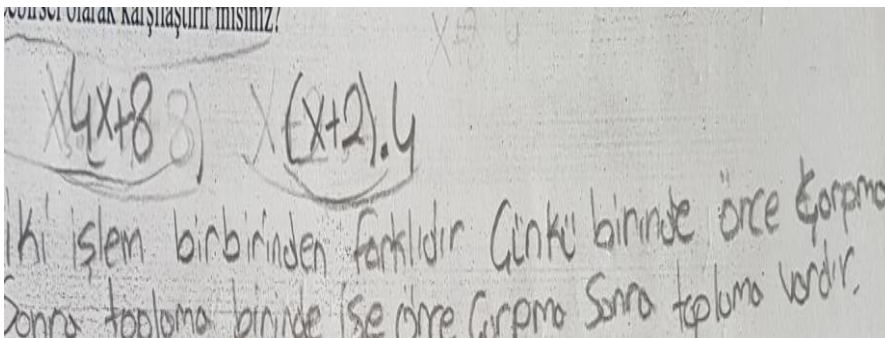
Öğrencilere ayrıca araştırma amacı doğrultusunda "Herhangi bir sayıyı 4 ile çarptıktan sonra 8 eklenmesi ile aynı sayıya 2 eklendikten sonra 4 ile çarpılması arasında fark var mıdır?" şeklinde bir soru yöneltildiğinde elde edilen öğrenci cevaplarına ait veriler Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7.

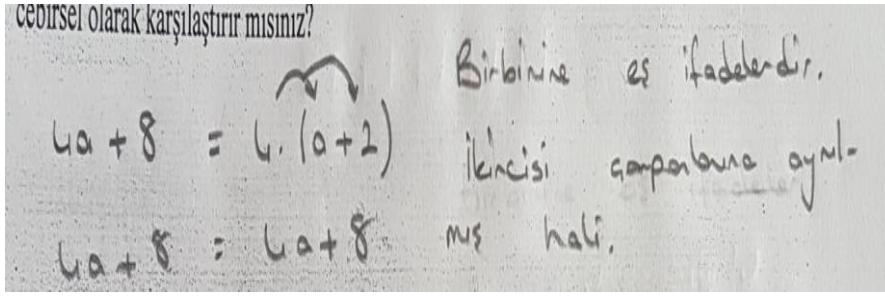
"Herhangi bir sayıyı 4 ile çarptıktan sonra 8 eklenmesi ile aynı sayıya 2 eklendikten sonra 4 ile çarpılması arasında fark var mıdır?" sorusuna ait öğrenci cevapları

Öğrenci cevapları	F	%
Aynıdır	14	70
Farklıdır	6	30

Tablo 7'ye göre öğrencilerin %70'i iki ifadenin aynı olduğunu belirtmiştir. Bu öğrencilerin büyük bir kısmı süreç düzeyine uygun şekilde bilinmeyen yerine sayı vererek iki ifadenin aynı olduğunu göstermişlerdir. Az sayıda öğrenci ise cebirsel ifadelerle işlemler sonucu aynı olduklarını göstermişlerdir. İfadeleri cebirsel ifadelerle dönüştürerek iki ifadenin eşitliğini gösteren öğrencilerin hem süreç hem kavram düzeyinde cevap verdikleri söylenebilir. Öğrencilerin %30'u ise iki ifadenin farklı olduğunu belirttiği görülmüştür. Bu öğrenciler ise işlem düzeyinde değerlendirilmiştir. Öğrencilerin genellikle cebirsel ifade yazmakta zorlandıkları, yazdıkları ifadelerde ise dağılma özelliğini dikkate almadıkları için yanlış cevaplar verdikleri belirlenmiştir. Öğrenci cevaplarına ait örnekler Şekil 6 ve Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 6. İki cebirsel ifadenin birbirinden farklı olduğunu belirten öğrenci cevabı



Şekil 7. İki cebirsel ifadenin aynı ifadeler olduğunu belirten öğrenci cevabı

Şekil 6'da öğrenci her iki ifade için de doğru cebirsel ifadeyi yazarken, işlemlerin farklı olduğunu belirtmiş ve bu anlamda bu iki ifadenin farklı olduğunu söylemiştir. Bu öğrenci cevabından yola çıkarak öğrencinin, süreç düzeyinden hem süreç hem kavram düzeyine doğru bir düşünme gerçekleştirmediği söylenebilir. Şekil 7'de ise öğrenci her iki ifadeye uygun cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde yazarak birbirine eşitliğini göstermiş ve hem süreç hem kavram düzeyinde cevap vermiştir.

## Tartışma ve Yorum

Matematiksel düşünme bir süreçtir. Süreç içerisinde öğrencilerin matematiksel düşünme aşamaları farklılık gösterebilir. Bu anlamda matematiksel düşünme bireyseldir. Matematiğin üç dünyası bu bireysel sürece ışık tutacağı düşünülen, matematiksel düşünmeyi aşamalara ayıran bir teorik çerçevedir. Bu anlamda bu araştırmada 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri matematiğin üç dünyası teorik çerçevesi içerisinde yer alan procept düzeyleri açısından incelenmiştir.

Literatür incelendiğinde; her yaş grubundaki öğrencinin düşünme becerilerinin yeterince gelişmediği, bu nedenle çeşitli zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir (Güneş, 2012). Yine araştırmalarda öğrencilerin matematiksel düşünme sürecinde zorlandıkları belirlenmiştir (Cai, 2003; Duran, 2005; Lutfiyya, 1998; Mubark, 2005; Yeşildere, 2006). Bu araştırmada ise elde edilen veriler incelendiğinde araştırmaya katılan 8. sınıf öğrencilerinin yarısının işlem süreci sonrasında belirli bir kavramın oluştuğunu belirtmelerinden dolayı hem süreç hem kavram düzeyine ulaştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin %20'si ise sadece işlem düzeyinde bir düşünme gerçekleştirmiştir. Öğrenciler ifadeleri açıklarken günlük yaşamdan örnekler vermeyi tercih etmişlerdir. 3 ile 4'ün toplamının 7'yi ifade ettiğini ya da 3 nesne ile 4 nesnenin toplamı ile de 7 kavramının oluştuğunu gösterdikleri örnekler vermişlerdir. 8. sınıf öğrencileri cebirsel ifadelerin ne anlama geldiğini açıklayabilmiş, az bir kısmı ise cebirsel ifadenin sonucunun olduğunu belirtmiştir. Cebirsel ifadenin sonucu olduğunu belirten öğrencilerden bazıları ise cebirsel ifadeyi denklem olarak görmüşlerdir.

Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar değerlendirildiğinde; hem süreç hem kavram düzeyinde cevap veren öğrenciler bir kavramın birden fazla işlem süreci içerdiğini belirtmişlerdir. Cebirsel ifadelerin sonucu olduğunu belirten cevapların ise hem süreç hem kavram düzeyine ulaşamayan öğrencilerin verdiği cevaplar olduğu görülmüştür. Bazı öğrencilerin kavramı ifade etmekte zorlandıkları sadece işlem sürecine odaklandıkları görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin süreç düzeyine ulaştıkları, fakat hem süreç hem kavram düzeyine ulaşamadıkları şeklinde yorumlanmıştır. Bazı öğrencilerin işlemlerin ne için yapıldığını açıklayamadan sadece işlemsel süreci ifade etmeleri ise işlem düzeyinden diğer düzeylere geçiş yapamadıkları şeklinde yorumlanmıştır. Çoğu öğrencinin aritmetik içeren soruları daha kolay cevaplandıkları, cebirsel ifade içeren sorularda ise zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin sözel olarak verilen ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmeden önce sayılarla ifade etmeye çalıştıkları, yani cebirsel düşünmeden önce aritmetiksel işlem yapma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Benzer olarak lise öğrencileri ile daha önce yapılmış çalışmalarda

(Arslan ve Yıldız, 2010; Özer ve Arıkan, 2002) öğrencilerin aritmetik olarak sayısal değerlerle ispat yapma eğiliminde oldukları, cebirsel ifadeden kaçındıkları belirtilmiştir. Yine bu araştırmada öğrencilerin iki matematiksel ifadeyi karşılaştırırken önce bilinmeyen yerine sayı vererek doğru cevaba ulaşmaya çalıştıkları görülmüştür. Doğru cevaba ulaşan öğrencilerin sadece az bir kısmı uygun cebirsel ifadeleri yazarak karşılaştırma yapmıştır. Ayrıca öğrencilerin cebirsel ifadeleri karşılaştırırken de hatalar yaptıkları görülmüştür. Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013) ise çalışma yaptıkları 11. sınıf öğrencilerinin daha çok ispata yöneldiklerini belirlemiş; bu durumu ise başarı düzeyi yüksek bir öğrenci grubu ile çalışmayı yürütmelerinden kaynaklanıyor olabileceğini belirtmişlerdir. Bu araştırmada ise not dağılımları açısından dengeli bir dağılım olmasına rağmen, birçok öğrencinin ispat sürecinden daha çok sözel ifadelerden ne anladıklarını açıklamaya çalıştıkları bulgusu elde edilmiştir.

Araştırma sonuçları değerlendirildiğinde; öğretim programı gereği daha önceki yıllarda almış oldukları öğretim dolayısıyla 5, 4+3, a+3b gibi ifadeleri açıklarken 8. sınıf öğrencilerinin hem süreç hem kavram düzeyine ulaşmaları beklenen bir durumdur. Çünkü Tall (2005)' a göre sayı kavramı okul öncesi süreçte zihinde oluşan bir kavramdır. Cebirsel ifadeler konusu ise MEB (2017) programında 6. sınıftan itibaren kazanım olarak yer almaktadır. Fakat öğrenci grubunun yarısının hem süreç hem kavram düzeyinde değerlendirilmesi öğrencilerin soyut düşünmeye geçişte bazı problemler yaşadıkları, bazı öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte zorlandıkları şeklinde yorumlanmıştır. Araştırmada bazı öğrencilerin bir sayıyı ifade ederken bile zorlanmaları, matematiksel dil gelişimi açısından önemli bir sorun olarak görülmektedir. Daha okula başlamadan önce sayı kavramının zihinde oluştuğu düşünülürse öğrencilerin sayı kavramını açıklayamamalarının büyük bir sorun olduğu düşünülmektedir. Ayrıca sayı kavramının içerdiği işlemsel süreç nedeniyle procept olduğu düşünüldüğünde, öğrencilerin sayı kavramını açıklarken sadece kavramın ne olduğuna odaklanmaları ve içerdiği işlemsel süreci açıklamamaları matematiksel düşünmenin gelişimi açısından yetersiz görülmektedir. Bu anlamda derslerde matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine daha fazla odaklanılabilir. Matematiksel düşünme gelişim basamakları ışığında dersler tasarlanabilir. Öğrencilerin farklı matematiksel düşünme düzeylerinde yer almalarından dolayı ders akışının ve sınıf ortamının matematiksel düşünme üzerinde etkili olduğu düşünülmektedir. Bu anlamda farklı düşünme becerilerine sahip öğrencilerin bireysel farklılıkları öğretim sürecinde dikkate alınabilir. Ayrıca öğrenciler düşündüklerini ifade etmekte zorlandıkları için derslerde matematiksel dil gelişimini destekleyici etkinliklere yer verilebilir.

## Kaynakça

- Açan, H. (2015). *8. Sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisindeki bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: Apos teorisi* (Yayınlanmamış doktora tezi), Atatürk Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Alkan, H. ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221-236.
- Arslan, S., Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Bağdat O., Saban P. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. *International Journal of Social Science*, 26 (2), 473-496.
- Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi (1.-5. sınıflar)*. Ankara: Pegem Akademi.
- Borromeo Ferri, R., Kaiser, G. (2003). First results of a study of different mathematical thinking styles of schoolchildren. In Burton , L. (Ed.) *Which Way?: Social Justice in Mathematics Education* (209-239), London : Greenwood.
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.

- Burton, L. (1995). Moving towards a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 28(3), 275-291.
- Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 34(5), 719-737.
- Chan, C.C, Tsui, M.S, Chan, M.Y.C. ve Hong, J.H. (2002). Applying the structure of the observed learning outcomes (SOLO) taxonomy on student's learning outcomes: An empirical study. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, 27( 6).
- Chin, E.T., Tall, D. (2002). Proof as a formal procept in advanced mathematical thinking. *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, 212-221. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.
- Duran, N (2005). *Matematiksel düşünme becerilerine ilişkin bir araştırma* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Hacettepe Üniversitesi/Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Gray, E.,Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal For Research In Mathematics Education*, 26 (2): 115- 141.
- Groth, R. E., Bergner, J.A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8, 1, 37-63.
- Güneş, F. (2012). Öğrencilerin düşünme becerilerini geliştirme. *Türklük Bilimi Araştırmaları*, 32(32), 127-146.
- Hannah, J., Stewart, S., Thomas, M. O. J. (2016). Developing conceptual understanding and definitional clarity in linear algebra through the three worlds of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications*. 35, 216-235. Erişim adresi: <http://teamat.oxfordjournals.org>
- Hunter, M., Monaghan, J. D., Roper, T. (1993). *The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking*. In R. Sutherland (Ed.), Working Papers for ESRC Algebra Seminar. London, England: London University, Institute of Education.
- Keskin, M., Akbaba Dağ, S., Altun, M.(2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Science*, 1, 33-50.
- Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks. *Educational studies in mathematics*, 69, 197-216.
- Köse, O. (2018). *Üst düzey uzamsal yeteneğe sahip matematik öğretmen adaylarının düşünme yapılarına göre SOLO taksonomisi düzeylerinin belirlenmesi* (Yayınlanmış yüksek lisans tezi), Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Lucas, U., Mladenovic, R. (2008). The identification of variation in students' understandings of disciplinary concepts: The application of the SOLO taxonomy within introductory accounting. *Higher Education*, 58(2), 257-283. doi:10.1007/s10734-009-9218-9
- Lutfiyya, A.L. (1998). Mathematical thinking of high school students in Nebraska. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29 (1), 55-64.
- Martínez-Planella, R., Triguerosb, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 1-22.
- MEB (2017). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu.
- Miles, M.B. ve Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. California: Sage Publications.
- Mubark, M. (2005). *Mathematical thinking and mathematical achievement of students in the year of 11 scientific stream in Jordan* (Unpublished Ph.D. Thesis), University of Newcastle, School of Education and Arts, Callaghan.
- Mudrikah, A. (2016). Problem-based learning associated by action-process-object-schema (APOS) theory to enhance students' high order mathematical thinking ability. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(1), 125- 135.

- Özer, Ö., Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. (Ed. D. Grouws.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370. New York: MacMillan.
- Senemoğlu, N. (2009). *Gelişim, öğrenme ve öğretim: Kuramdan uygulamaya*. Ankara: Pegem Akademi.
- Sevgen, B. (2002, Eylül). *Matematiksel düşünce yapısı ve gelişimi*, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi kongresi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Sezgin Memnun, D. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometri'nin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- Stacey, K., Burton, L., Mason, J. (1985). *Thinking mathematically*. England: Addison-Wesley Publishers.
- Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. Ny: The Guilford Press, New York.
- Tall, D. (1991) The psychology of advanced mathematical thinking (Ed:David Tall) *Advanced Mathematical Thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers, 3-21.
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2005, Temmuz). *A Theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof*. International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood' da sunulan bildiri. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgium.
- Tall, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *Zdm Mathematics Education*, 39, 145-154.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.
- Tsamir, P., Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets – A process of abstraction: The case of Ben. *Journal of Mathematical Behaviour*, 21, 1-23.
- Türnüklü, E., Özcan, B. (2014). Öğrencilerin geometride rbc teorisine göre bilgiyi oluşturma süreçleri ile Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri arasındaki ilişki: Örnek olay çalışması. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 11 (27), 295-316.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234- 243.
- Watson, A., Spyrou, P., Tall, D. O. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*. 1 2, 73-97.
- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi/Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Yeşildere, S., Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.
- Yıldırım, C. (2010). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, A., Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.