



RİTZ YÖNTEMİ İLE DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ

Bekir AĞÖZ*

Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Antalya, Türkiye

Anahtar Kelimeler

Burkulma,
Kolon,
Koniklik oranı,
Düzensizlik,
Sınır koşulları.

Öz

Bu çalışmada, eksenel bir basınç yükü etkisi altındaki değişken kesitli kolonların burkulma analizi gerçekleştirilmiştir. Kesitin kolon uzunluğu boyunca sürekli değiştiği dikkate alınmıştır. Büyük narinlik oranına sahip üniform olmayan ince kolonları modellemek için klasik kiriş teorisi (kayma deformasyonu etkisiz) kullanılmıştır. Çeşitli koniklik oranları ve sınır koşulları için üniform olmayan kolonların kritik burkulma yüklerini elde etmek için Ritz yöntemi uygulanmıştır. Değişken kesitli kolonların burkulma yükleri üzerindeki koniklik oranı ve sınır koşullarının etkilerini incelemek için detaylı bir parametrik çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu analizin geçerliliğini ve hassasiyetini kanıtlamak üzere literatürdeki mevcut ilgili sonuçlar ile bazı karşılaştırmalı tablolar sunulmuştur.

BUCKLING ANALYSIS OF COLUMNS WITH VARIABLE CROSS-SECTION VIA RITZ METHOD

Keywords

Buckling,
Column,
Taper ratio,
Non-uniformity,
Boundary conditions.

Abstract

In this study, buckling analysis of columns with variable cross-section is performed under an axial compressive load. It is considered that the cross-section varies constantly along the length of the column. Classical beam theory (without effect of shear deformation) is used to model the non-uniform thin column with a large slenderness ratio. Ritz method is applied to obtain the critical buckling loads of the non-uniform columns for various taper ratios and boundary conditions. A detailed parametric study is performed to investigate the influences of taper ratio and boundary conditions on the buckling loads of column with variable cross-section. In order to demonstrate the validity and sensitivity of the present analysis, some comparative tables with the related results available in the literature are presented.

Alıntı / Cite

Ağöz, B., (2019). Ritz Yöntemi ile Değişken Kesitli Kolonların Burkulma Analizi, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 7(2), 452-458.

Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)

B. Ağöz, 0000-0003-2097-2555

Makale Süreci / Article Process

Başvuru Tarihi / Submission Date	13.03.2019
Revizyon Tarihi / Revision Date	07.05.2019
Kabul Tarihi / Accepted Date	09.05.2019
Yayın Tarihi / Published Date	26.06.2019

1. Giriş

Kolon ve kiriş taşıyıcı sistemlerde sıklıkla kullanılan çubuk elemanlardır. Bir boyutlu taşıyıcı elemanlar olan kolon ve kiriş genelde düşey ve yatay konumda olup çubuk eksenine doğrultusunda ve çubuk eksenine dik yüklemelere maruz kalırlar. Dolayısıyla kirişlerde eğilme davranışının; kolonlarda ise burkulma davranışının bilinmesinin tasarım aşamasında çok önemli olduğu söylenebilir.

Yapı elemanlarının tasarımında genellikle dayanım ve rijitlik kavramları ön plandadır. Dayanım elemanın uygulanan yüke karşı koyabilme kabiliyeti; rijitlik ise şekil değiştirmeye karşı gösterilen direnç biçimde tarif edilebilir. Fakat bazı elemanlar dayanım ve rijitlik kriterleri sağlandığı halde burkulma olayı meydana geldiği zaman kararsız hale gelip taşıyıcı özelliğini kaybedebilir. Bu nedenle özellikle narin ve hafif elemanların tasarımında burkulma kavramı önemli bir husustur.

* İlgili yazar / Corresponding author: bekirakgoz@akdeniz.edu.tr, +90-242-310-6360

Basınç yükü etkisi altındaki bir kolonda, belirli bir yük miktarına kadar geometrisinde ve yük taşıma kapasitesinde neredeyse gözle görülür bir değişiklik olmadan çubuk boyunda az miktarda kısalma gözlenir. Kritik yük değerine ulaşıldığında ise kolon aniden büyük bir deformasyona maruz kalır ve taşıyıcılık özelliğini yitirir. Bu durumda çubuk stabilitesini kaybeder ve burkulma olayı meydana gelir.

Yukarıda bahsedildiği üzere burkulma kavramının basınca maruz yapısal elemanların tasarımı üzerinde belirleyici bir role sahip olmasından dolayı bu konuyla alakalı günümüze kadar pek çok çalışma gerçekleştirilmiştir. Elastik stabilite üzerine tarihteki bilinen ilk çalışma Leonhard Euler tarafından 1744 yılında gerçekleştirilmiştir (Euler, 1744). Bu çalışmada basınç yükü etkisi altındaki kolonun burkulma yükü ve denge denklemini elde etmek için değişim cebri kullanılmıştır. Sonraki iki yüz yıl boyunca bu konu birçok araştırmacı ve bilim insanının ilgisini çekmiş ve çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlarla ve elastik stabilitenin tarihsel gelişimi ile ilgili detaylı bilgiye Timoshenko ve Gere'in kitabından ulaşılabilir (Timoshenko ve Gere, 1961). Bunun dışında burkulma üzerine basılmış pek çok kitap bulunmaktadır. Örneğin, Wang vd. (2005) tarafından yazılan kitapta bir ve iki boyutlu yapısal taşıyıcı elemanların burkulma problemi için farklı koşullar altında kesin çözümler sunulmuştur.

Diğer taraftan, mühendislik yapılarının emniyetli, ergonomik, estetik ve bir de ekonomik olma özelliklerine sahip olması beklenir. Bu nedenle, kesiti ve/veya malzeme özellikleri değişken olan kiriş, kolon, plak ve kabuk şeklindeki yapısal elemanlar, inşaat, makine, elektronik ve havacılık mühendisliğinin birçok uygulamasında sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin, nanometre mertebelerinde ölçüm yapma özelliğine sahip Atomik Kuvvet Mikroskopu'nun (AKM) ucunda yer alan probu değişken kesitli konsol kiriş olarak nitelendirilebilir. Bu tip yapısal elemanların kullanılması ile düşük olması istenen toplam maliyet ve ağırlık azaltılabilirken; mukavemet ve yapısal verimlilikte artış sağlanabilir.

Yukarıda bahsedilen özelliklerden dolayı literatürde kesiti ve/veya malzeme özellikleri sabit olmayan elemanların mekanik davranış özelliklerinin belirlenmesi üzerine pek çok çalışma yer almaktadır. Burada bir boyutlu değişken kesite sahip elemanların stabilitesi üzerine yapılan bazı çalışmalara değinilecektir. Arbabi ve Li (1991) diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürerek değişken kesitli kolonların çeşitli sınır koşullarında burkulma davranışlarını incelemişlerdir. Eisenberger (1991) çeşitli eksenel basınç yüküne maruz kesiti sabit olmayan farklı sınır koşullarındaki kolonların burkulma analizini gerçekleştirmiştir. Eğilme rijitliği uzunluğu boyunca sürekli değişen iki ucu mafsallı kolonların burkulma yükü değerleri Siginer (1992)

tarafından Airy fonksiyonları yardımıyla elde edilmiştir. Eksenel tekil ve yayılı yük etkisi altındaki değişken kesitli kolonların burkulma problemi için Bessel fonksiyonları kullanılarak kesin çözüm sunulmuştur (Li vd., 1995; Li, 2001). Beş faklı sınır koşulu için kesiti sabit ve değişken kolonların kritik burkulma yükü değerleri varyasyonel iterasyon yöntemi ile Coşkun ve Atay (2009) tarafından belirlenmiştir. Aynı zamanda değişken kesitli kolonların burkulma davranışının incelenmesinde sayısal çözüm yöntemi olarak homotopi pertürbasyon yöntemi de başarılı bir biçimde uygulanmıştır (Atay, 2009; Coşkun, 2009). Darbandi vd. (2010) yayılı eksenel kuvvet altındaki değişken kesitli kolonların burkulma davranışını Bernoulli-Euler giriş teorisi ve tekil pertürbasyon yöntemi ile analiz etmişlerdir. Huang ve Li (2011) de farklı sınır koşullarındaki kesiti ve/veya malzeme özelliği değişken Bernoulli-Euler kolonunun kritik burkulma yüklerini belirlemişlerdir. Bunların yanı sıra elastisite modülünün fonksiyonel dereceli değişimine bağlı olarak eğilme rijitliği değişken olan kirişlerin statik ve dinamik analizleri üzerine literatürde pek çok çalışma yer almaktadır (Akbaş, 2017; Akgöz ve Civalek, 2013a, 2017; Avcar, 2010, 2016; Avcar ve Mohammed, 2017; Nguyen vd., 2016, 2017; Rezaiee-Pajand ve Masoodi, 2018; She vd., 2017). Mikro boyutlu kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri keyfi sınır koşulları için boyut etkisini de hesaba katarak gerçekleştirilmiştir (Yaylı, 2014; 2015a). Tek katmanlı karbon nanotüplerin değişik sınır koşullarındaki burkulma yükü hesapları yapılmıştır (Yaylı, 2015b). Bunların yanında, elastik zemin üzerindeki mikro kirişlerin genel sınır koşulları altındaki burkulma davranışları da detaylı bir biçimde incelenmiştir (Yaylı, 2016; 2018). Ayrıca, son zamanlarda değişken kesite sahip mikro ve nano boyutlu kolonların burkulma analizi üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Akgöz ve Civalek, 2013b; Khaniki ve Hosseini-Hashemi, 2017; Mirjavadi vd., 2017; Mohammadimehr ve Alimirzaei, 2017; Paul ve Das, 2017; Rajasekaran ve Khaniki, 2017).

Yukarıda da bahsedildiği üzere değişken kesitli kolonların burkulma analizi üzerine kesin ve yaklaşık çözüm yöntemlerine dayalı literatürde mevcut fazlaca çalışma bulunmaktadır. Bu makalede ise, Ritz sayısal çözüm yöntemi kullanılarak değişken kesitli kolonların burkulma davranışı incelenmiştir. Kesitin çubuk eksenine boyunca devamlı değişmesi durumu dikkate alınmış olup modellemede Bernoulli-Euler giriş teorisi kullanılmıştır. Değişken kesitli kolonların burkulma yükleri üzerindeki koniklik oranı ve sınır koşullarının etkilerini incelemek için detaylı bir parametrik çalışma gerçekleştirilmiştir. Ulaşılan sonuçların doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için bazı karşılaştırmalı sonuçlar verilmiştir.

2. Teori ve Formülasyon

Şekil 1'de de görüldüğü gibi malzeme özellikleri sabit fakat kesiti çubuk eksenine doğrultusunda devamlı

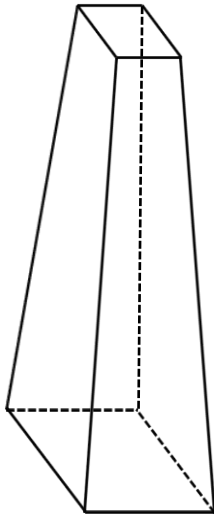
değişen kolonlar için Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre şekil değiştirme enerjisi U şöyle ifade edilebilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_x \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

Burada, E elastisite modülü, L kolon boyu ve $I_{(x)}$ x 'e bağlı değişen atalet momenti olup

$$I_{(x)} = I_0 \left(1 - b \frac{x}{L} \right)^a \quad (2)$$

şeklinde tanımlanabilir. I_0 kolonun alt kısmındaki atalet momenti, b 0 ile 1 arasında değişen koniklik oranı ve a kesit değişim türü olup 1, 2 ve 3 değerleri için sırasıyla atalet momentinin doğrusal, kuadratik ve kübik değiştiğini gösterir.



Şekil 1. Tipik bir doğrusal değişken kesitli kolon

3. Çözüm Yöntemi

Değişken kesitli kolonun toplam potansiyel enerjisi Π

$$\Pi = U + V \quad (3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada U , Eşitlik (1)'de verilen şekil değiştirme enerjisi ve V ise eksenel basınç kuvvetinin potansiyeli olup aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

Burada P eksenel basınç kuvvetidir. Eşitlik (1) ve (4)'ün Eşitlik (3)'te kullanılmasıyla değişken kesitli kolonun toplam potansiyel enerjisi

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI_x \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Ritz (ya da Rayleigh-Ritz) yönteminin, 1877 yılında titreşim problemlerinin çözümü için Rayleigh tarafından önerilen metodun (Rayleigh yöntemi) (Rayleigh, 1877) 1909 yılında Ritz tarafından geliştirilmiş hali olduğu söylenebilir (Ritz, 1909). Bu yöntemle göre deneme fonksiyonu $w(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad (6)$$

Eşitlik (6)'daki c_i keyfi katsayılar olup $\phi_i(x)$ ise sadece geometrik sınır koşullarını (çökme ve dönme) sağlaması yeterli olan kabul edilebilir fonksiyon ve N bu fonksiyonda bulunan polinom sayısıdır. Bu çalışmada, iki ucu mafsallı ve iki ucu ankastre mesnetli durum için geometrik sınır koşullarını sağlayacak biçimde aşağıda görüldüğü gibi iki farklı $\phi_i(x)$ kullanılmıştır.

$$\phi_i(x) = x(L-x)x^{i-1} \quad (\text{iki ucu mafsallı}) \quad (7)$$

$$\phi_i(x) = x^2(L-x)^2x^{i-1} \quad (\text{iki ucu ankastre}) \quad (8)$$

Eşitlik (7)'de $x=0$ ve $x=L$ için ϕ_i ve buna bağlı olarak Eşitlik (6)'daki çökme (w) değerleri sıfır olur. Benzer biçimde Eşitlik (8)'de $x=0$ ve $x=L$ için ϕ_i ile x 'e göre türevi ve buna bağlı olarak Eşitlik (6)'daki çökme (w) ile dönme (dw/dx) değerleri sıfır olur. Toplam potansiyel enerjinin durağan noktaları, aşağıdaki ifadeyi sağlayan çözümlerdir.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

Eşitlik (9)'un çözümünde aşağıda görüldüğü gibi $N \times N$ bir katsayılar matrisi ortaya çıkar. (Bu çalışmada $N = 10$ seçilmiştir.)

$$\begin{bmatrix} K_{11} - PG_{11} & \cdots & K_{110} - PG_{110} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{101} - PG_{101} & \cdots & K_{1010} - PG_{1010} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{10} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Burada

$$K_{ij} = E \int_0^L I_{(x)} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \quad i, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (11)$$

$$G_{ij} = \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad i, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (12)$$

Ele alınan problem bir öz değer problemi olup yukarıdaki bağıntıların çözümü ile N sayıda problemin çözümünü sağlayan kök elde edilir. Bu köklerden en küçük olanı kritik burkulma yükü değerini verir.

4. Araştırma Bulguları

Bu bölümde eksenel basınç yükü etkisi altındaki değişken kesitli kolonların burkulma davranışı üzerindeki farklı parametrelerin etkileri incelenmiştir. Her iki ucun mafsallı ve ankastre mesnetli olması durumları için farklı koniklik oranı ve değişim türü için sayısal sonuçlar verilmiştir.

İlk olarak kullanılan çözüm yönteminin geçerliliğini ve hassasiyetini kanıtlamak için literatürde mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırma yapılmıştır. Tablolar 1-3'te atalet momenti sırasıyla doğrusal, kuadratik ve kübik değişen her iki ucu mafsallı ve ankastre mesnetli kolonlara ait boyutsuz kritik burkulma yükü ($\frac{PL^2}{EI_0}$) değerlerinin Wang vd. (2005)'e ait kesin ile Coşkun ve Atay (2009)'a ait yaklaşık sonuçlarla karşılaştırması yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde bu çalışmada $N = 10$ için elde edilen sonuçların diğer mevcut sonuçlarla mükemmel bir uyum içerisinde olduğu rahatlıkla söylenebilir.

Tablo 1. Çeşitli koniklik değerleri için atalet momenti doğrusal değişen kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması ($a = 1$)

b	İki ucu mafsallı			İki ucu ankastre		
	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma
0.1	9.3716	9.372	9.3716	37.4804	37.48	37.4765
0.3	8.3434	8.343	8.3434	33.2733	33.27	33.2733
0.5	7.2564	7.256	7.2556	28.6972	28.70	28.6970
0.7	-	6.069	6.0693	-	23.48	23.4828
0.9	-	4.667	4.6667	-	16.70	16.7001

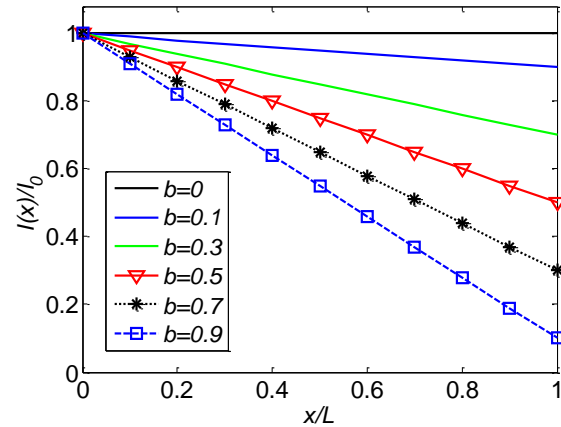
Tablo 2. Çeşitli koniklik değerleri için atalet momenti kuadratik değişen kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması ($a = 2$)

b	İki ucu mafsallı			İki ucu ankastre		
	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma
0.1	8.8933	8.893	8.8934	35.5618	35.56	35.5610
0.3	7.0047	7.005	7.0048	27.9067	27.91	27.9067
0.5	5.1992	5.198	5.1981	20.4814	20.48	20.4808
0.7	-	3.459	3.4588	-	13.23	13.2287
0.9	-	1.710	1.7106	-	5.864	5.8640

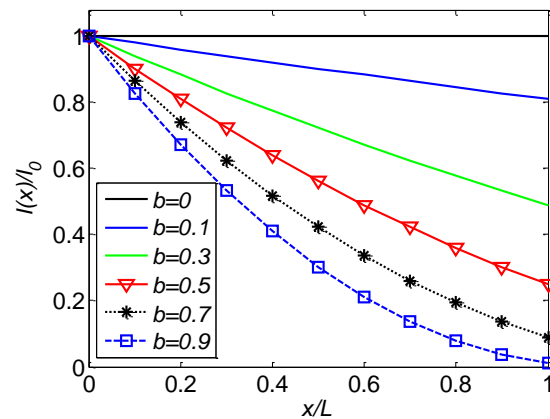
Tablo 3. Çeşitli koniklik değerleri için atalet momenti kübik değişen kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması ($a = 3$)

b	İki ucu mafsallı			İki ucu ankastre		
	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma	Coskun ve Atay, 2009	Wang vd., 2005	Bu çalışma
0.1	8.4345	8.436	8.4344	33.7290	33.73	33.7289
0.3	5.8405	5.840	5.8404	23.2912	23.29	23.2913
0.5	3.6278	3.628	3.6278	14.3498	14.35	14.3485
0.7	-	1.821	1.8208	-	7.045	7.0449
0.9	-	0.467	0.4686	-	1.670	1.6711

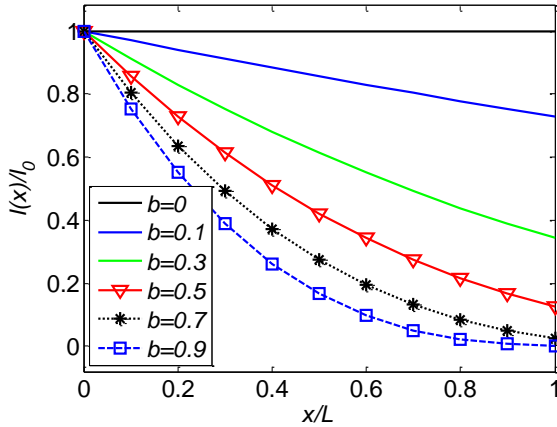
Farklı koniklik oranlarına göre sırasıyla doğrusal, kuadratik ve kübik atalet momenti oranının değişken kesitli kolonun uzunluğu boyunca değişimi Şekiller 2-4'te çizdirilmiştir. Eşitlik (2)'den de açıkça görüleceği üzere $b = 0$ değeri için $I(x) = I_0$ olur ve kesit kolon uzunluğu boyunca değişmez. Dolayısıyla şekillerde $b = 0$ için atalet momenti oranı 1 olmuştur. Koniklik oranı ve x/L değerlerinin artmasıyla atalet momenti oranının giderek azaldığı açıkça görülmektedir. Ayrıca, atalet momenti oranındaki bu azalışın $a = 3$ için çok daha belirgin olduğu da vurgulanabilir.



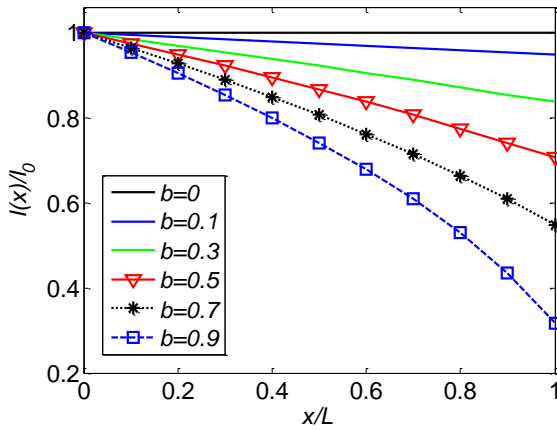
Şekil 2. Farklı koniklik oranlarına göre doğrusal atalet momenti oranının kolon boyunca değişimi ($a = 1$)



Şekil 3. Farklı koniklik oranlarına göre kuadratik atalet momenti oranının kolon boyunca değişimi ($a = 2$)



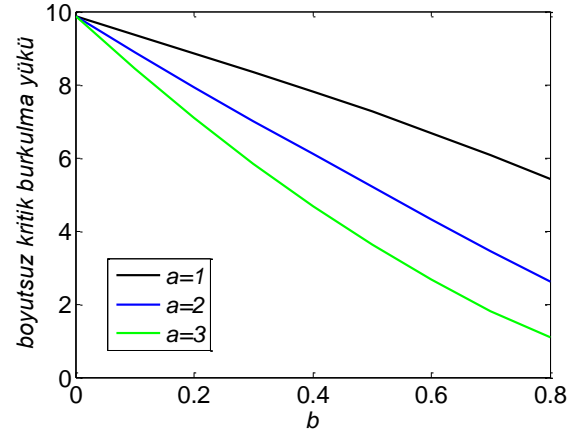
Şekil 4. Farklı koniklik oranlarına göre kübik atalet momenti değerinin kolon boyunca değişimi ($a = 3$)



Şekil 5. Farklı koniklik oranlarına göre atalet momenti değerinin kolon boyunca değişimi ($a = 0.5$)

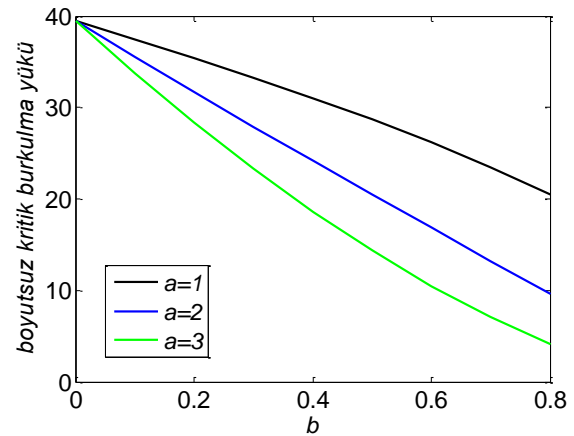
Ayrıca Şekil 5'te $a = 0.5$ değeri için atalet momenti değerinin kolon boyunca değişimi gösterilmiştir. Şekiller 2-4'tekilere benzer biçimde koniklik oranı ve x/L değerlerinin artmasıyla atalet momenti oranının giderek azaldığı görülmektedir. Fakat buradaki azalışın diğerlerine nazaran daha az olduğu ve değerlerin sıfırın uzağında kaldığı söylenebilir.

Şekil 6'da her iki ucu mafsallı değişken kesitli kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin koniklik oranına bağlı olarak değişimi verilmiştir. Daha önceden de belirtildiği üzere $b = 0$ için kesit sabit olup kesit değişim türü a 'nın üç farklı değeri için de boyutsuz kritik burkulma yükü değeri π^2 olmaktadır. Koniklik oranının artmasıyla burkulma yükü değerlerinde önemli ölçüde bir düşüş görülmektedir. Dahası boyutsuz kritik burkulma yükleri $a = 1$ için en büyük değerlerde olurken $a = 3$ için en küçük değerlerde olduğu ifade edilebilir.



Şekil 6. İki ucu mafsallı değişken kesitli kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri üzerindeki koniklik oranının etkisi

Benzer biçimde her iki ucu ankastre mesnetli değişken kesitli kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerlerinin koniklik oranına bağlı olarak değişimi Şekil 7'de gösterilmiştir. $b = 0$ için boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri $4\pi^2$ olur. Şekil 6'da her iki ucu mafsallı kolon için yapılan yorumların burada da geçerli olduğu söylenebilir.



Şekil 7. İki ucu ankastre mesnetli değişken kesitli kolona ait boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri üzerindeki koniklik oranının etkisi

5. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada, eksenel basınç yükü etkisi altındaki kesitli kolon uzunluğu boyunca sürekli değişen kolonların burkulma davranışı incelenmiştir. Kesit sabit olmayan ince narin kolonların modellenmesinde Bernoulli-Euler kiriş teorisi kullanılmıştır. Sınır koşullarının her iki ucu mafsallı ve ankastre mesnetli olması ve çeşitli koniklik oranları için değişken kesitli kolonların kritik burkulma yükleri Ritz yöntemi ile elde edilmiştir. Kesit değişim türünün, koniklik oranının ve sınır koşullarının değişken kesitli kolonların atalet momenti ve burkulma yükleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Koniklik oranındaki artışın atalet momenti ve kritik burkulma yükü

değerlerinde gözle görünür bir azalmaya neden olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, kritik burkulma yükleri atalet momentinin doğrusal ve kübik değişmesi durumları için sırasıyla en büyük ve en küçük değerlerde olduğu vurgulanabilir.

Conflict of Interest / Çıkar Çatışması

Yazar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

No conflict of interest was declared by the author.

Kaynaklar

Akbaş, Ş.D., 2017. Post-buckling responses of functionally graded beams with porosities. *Steel and Composite Structures*, 24 (5), 579-589.

Akgöz, B., Civalek, Ö., 2013a. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory. *Composite Structures*, 98, 314-322.

Akgöz, B., Civalek, Ö., 2013b. Buckling analysis of linearly tapered micro-columns based on strain gradient elasticity. *Structural Engineering and Mechanics*, 48 (2), 195-205.

Akgöz, B., Civalek, Ö., 2017. Effects of thermal and shear deformation on vibration response of functionally graded thick composite microbeams. *Composites Part B-Engineering*, 129, 77-87.

Arbabi, F., Li, F., 1991. Buckling of Variable Cross-Section Columns: Integral-Equation Approach. *Journal of Structural Engineering*, 117 (8), 2426-2441.

Atay, M.T., 2009. Determination of Critical Buckling Loads for Variable Stiffness Euler Columns Using Homotopy Perturbation Method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10 (2), 199-206.

Avcar, M., 2010. Elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli rastgele ve sürekli homojen olmayan kirişin titreşim analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 1 (1), 33-38.

Avcar, M., 2016. Pasternak Zemine Oturan Eksenel Yüke Maruz Homojen Olmayan Kirişin Serbest Titreşimi. *Politeknik Dergisi*, 19 (4), 507-512.

Avcar, M., Mohammed, W.K.M., 2017. Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin kirişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5 (3), 573-580.

Coşkun, S.B., 2009. Determination of Critical Buckling Loads for Euler Columns of Variable Flexural Stiffness with a Continuous Elastic Restraint Using Homotopy Perturbation Method. *International*

Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 10 (2), 191-197.

Coşkun, S.B., Atay, M.T., 2009. Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 58 (11-12), 2260-2266.

Darbandi, S.M., Firouz-Abadi, R.D., Haddadpour, H., 2010. Buckling of variable section columns under axial loading. *Journal of Engineering Mechanics*, 136 (4), 472-476.

Eisenberger, M., 1991. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces. *International Journal of Solids and Structures*, 27 (2), 135-143.

Euler, L., 1744. *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes (Appendix, De Curvis Elasticis)*. Lausanne and Geneva: Marcum Michaellem Bousquet.

Huang, Y., Li, X.-F., 2011. Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity. *Journal of Engineering Mechanics*, 137 (1), 73-81.

Li, Q.S., 2001. Exact solutions for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20 (3), 485-500.

Li, Q.S., Cao, H., Li, G.Q., 1995. Stability analysis of bars with varying cross-section. *International Journal of Solids and Structures*, 32 (21), 3217-3228.

Khaniki, H.B., Hosseini-Hashemi, S., 2017. Buckling analysis of tapered nanobeams using nonlocal strain gradient theory and a generalized differential quadrature method. *Materials Research Express*, 4 (6), 065003.

Mirjavadi, S.S., Matin, A., Shafiei, N., Rabby, S., Afshari, B.M., 2017. Thermal buckling behavior of two-dimensional imperfect functionally graded microscale-tapered porous beam. *Journal of Thermal Stresses*, 40 (10), 1201-1214.

Mohammadimehr, M., Alimirzaei, S., 2017. Buckling and free vibration analysis of tapered FG-CNTRC micro Reddy beam under longitudinal magnetic field using FEM. *Smart Structures and Systems*, 19 (3), 309-322.

Nguyen, T.K., Nguyen, B.D., Vo, T.P., Thai, H.T., 2017. Hygro-thermal effects on vibration and thermal buckling behaviours of functionally graded beams. *Composite Structures*, 176, 1050-1060.

Nguyen, T.K., Vo, T.P., Nguyen, B.D., Lee, J., 2016. An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory. *Composite Structures*, 156, 238-252.

- Paul, A., Das, D., 2017. A study on non-linear post-buckling behavior of tapered Timoshenko beam made of functionally graded material under in-plane thermal loadings. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 52 (1), 45-56.
- Rajasekaran, S., Khaniki, H.B., 2017. Bending, buckling and vibration of small-scale tapered beams. *International Journal of Engineering Science*, 120, 172-188.
- Rayleigh, L., 1877. *The Theory of Sound*, vol. 1, The Macmillan Company.
- Rezaiee-Pajand, M., Masoodi, A.R., 2018. Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections. *Journal of Vibration and Control*, 24 (9), 1787-1808.
- Ritz, W., 1909. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratische Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik*, 28, 737-786.
- She, G.L., Yuan, F.G., Ren, Y.R., 2017. Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 47, 340-357.
- Siginer, A., 1992. Buckling of columns of variable flexural rigidity. *Journal of Engineering Mechanics*, 118 (3), 640-643.
- Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1961. *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York.
- Wang, C.M., Wang, C.Y., Reddy, J.N., 2005. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, CRC Press, Florida.
- Yaylı, M.Ö., 2014. Free vibration behavior of a gradient elastic beam with varying cross section. *Shock and Vibration*, Article ID 801696.
- Yaylı, M.Ö., 2015a. Stability analysis of gradient elastic microbeams with arbitrary boundary conditions. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29 (8), 3373-3380.
- Yaylı, M.Ö., 2015b. Buckling analysis of a rotationally restrained single walled carbon nanotube. *Acta Physica Polonica A*, 127(3), 678-683.
- Yaylı, M.Ö., 2016. Buckling analysis of a microbeam embedded in an elastic medium with deformable boundary conditions. *Micro & Nano Letters*, 11(11), 741-745.
- Yaylı, M.Ö., 2018. Buckling analysis of Euler columns embedded in an elastic medium with general elastic boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 46(1), 110-122.