

---

*Araştırma Makalesi / Research Article*

---

### **3-Boyutlu Minkowski Uzayında İnvolut-Evolüt Eğrilerinin $T^*B^*$ ve $N^*B^*$ -Smarandache Eğrileri**

Özgür BOYACIOĞLU KALKAN<sup>1\*</sup>, Damla ZEYBEK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, Afyonkarahisar

<sup>2</sup>Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Afyonkarahisar  
(ORCID: 0000-0003-1665-233X) (ORCID: 0000-0002-5504-3441)

---

#### **Özet**

$\alpha^*$  spacelike eğrisi,  $\alpha$  timelike eğrisinin bir involütü olsun. Bu çalışmada,  $\alpha^*$  eğrisinin Frenet vektörleri konum vektörleri olarak alındığında null olmayan  $T^*B^*$  ve  $N^*B^*$ -Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonları  $\alpha$  timelike evolüt eğrisine bağlı olarak hesaplanmıştır. Son olarak, elde edilen sonuçlar ile ilgili örnekler verilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** İnvolut-Evolüt eğrileri, Smarandache eğrileri, Minkowski uzayı, Frenet elemanları.

---

### **$T^*B^*$ and $N^*B^*$ -Smarandache Curves of Involute-Evolute Curves in Minkowski 3-space**

---

#### **Abstract**

Let the spacelike curve  $\alpha^*$  be the involute of the  $\alpha$  timelike curve. In this study, when the Frenet vectors of the involute curve  $\alpha^*$  are taken as the position vectors, the curvature and the torsion of non-null  $T^*B^*$  and  $N^*B^*$ -Smarandache curve are calculated depending upon the timelike evolute curve  $\alpha$ . Finally, we give two illustrative examples related to our results.

**Keywords:** Involute-Evolute curves, Smarandache curves, Minkowski space, Frenet invariants.

---

#### **1. Giriş**

Diferensiyel geometride eğriler üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır ve hala da yapılmaya devam edilmektedir. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak birçok yeni açılımlar elde edilmiştir. Daha sonra bu açılımlar Minkowski uzayı, Galilean uzayı, Heisenberg uzayı ve dual uzay gibi birçok uzayda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve pek çok yeni karakterizasyon elde edilmiştir. Bu özel eğri çiftleri ile ilgili çalışmalar eğri teorisinin yanında yüzey teorisinde ve mekanikte de görülmektedir. Üzerinde en çok araştırma yapılan eğriler İnvolut-Evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileridir. İnvolut-Evolüt eğrileri üzerine yapılan çalışmalar sadece Öklid uzayında sınırlı kalmamış Lorentz uzayına da aktarılmıştır.

Bilici ve Çalışkan,  $R_1^3$  de spacelike ve timelike eğrilerin involüt eğrilerini incelemiştirler [1, 2].

Bükçü ve Çalışkan ise  $R_1^3$  de spacelike ve timelike eğrilerin involüt ve evolüt eğrilerinin bazı özelliklerini incelemiştirler [3, 4].

---

\*Sorumlu yazar: [bozgur@aku.edu.tr](mailto:bozgur@aku.edu.tr)

Geliş Tarihi: 04.01.2019, Kabul Tarihi: 07.05.2019

Turgut ve Yılmaz, Minkowski uzay-zamanda konum vektörü başka bir eğrinin Frenet vektörleri tarafından oluşturulan yeni eğriyi Smarandache eğrisi olarak adlandırmışlardır [14]. Daha sonra bu eğriler farklı uzaylarda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Gürses. vd.,  $R_1^3$  de spacelike, timelike ve null eğrilerin  $TN$  -Smarandache eğrilerini incelemişlerdir [6]. Şenyurt ve Sivas, Öklid uzayında bir eğrinin asli normali ve Darboux vektörünü konum vektörü olarak elde edilen Smarandache eğrilerinin eğriliklerini hesaplamışlardır [9]. Şenyurt vd., Öklid uzayında bazı eğri çiftlerinin Frenet çatısına ve Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini araştırmışlardır [10-13]. Kalkan vd.,  $R_1^3$  involüt-evolüt eğrilerinin Frenet çatısına göre  $TN$  -Smarandache eğrilerini incelemişlerdir [7].

Bu çalışmada,  $\alpha^*$  eğrisi,  $\alpha$  eğrisinin involütü olmak üzere  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$  Frenet vektörleri konum vektörleri olarak alındığında bu vektörler tarafından oluşturulan null olmayan  $T^*B^*$  ve  $N^*B^*$  -Smarandache eğrilerinin Frenet elemanları, eğrilik ve torsiyonu  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet elemanları ,eğrilik ve torsiyonuna bağlı olarak ifade edilmiştir. Son olarak bu eğrilerle ilgili örnekler verilmiştir.

## 2. Temel Kavramlar

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzay ve İnvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili temel kavramlar kısaca tanıtılacaktır.

$X = (x_1, x_2, x_3) \in R_1^3$  olmak üzere 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz iç çarpımı  $g(X, X) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  olsun.  $g(X, X) > 0$  ya da  $X = 0$  ise  $X$  vektörüne spacelike,  $g(X, X) < 0$  ise  $X$  vektörüne timelike,  $g(X, X) = 0$  ve  $X \neq 0$  ise  $X$  vektörüne null (lightlike) denir (O'Neill 1983).

Benzer olarak  $R_1^3$  de,  $s$  pseudo-yay parametresi olmak üzere keyfi bir  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisinin  $\alpha'(s)$  hız vektörleri spacelike, timelike ve null ise  $\alpha$  eğrisine sırasıyla spacelike, timelike ve null eğri denir.  $X$  vektörünün normu  $\|X\|_L = \sqrt{|g(X, X)|}$  biçiminde tanımlanır.  $a = (a_1, a_2, a_3)$  ve  $b = (b_1, b_2, b_3)$  vektörlerinin vektörel çarpımı

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2)$$

biçiminde verilir (Lopez 2014).  $\alpha = \alpha(s)$  yay parametrelili regüler bir eğri,  $\{T, N, B\}$  Frenet çatısı,  $\kappa$  ve  $\tau$  sırasıyla eğrilik ve torsiyonu olsun.  $\alpha$  eğrisinin causal karakterine bağlı olarak Frenet formülleri ve Darboux vektörleri:

i)  $\alpha$  eğrisi birim hızlı timelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve torsiyonu:

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s), & \kappa(s) &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle}, \\ N(s) &= (T' / \kappa)(s), & B(s) &= -(T \times N)(s), \\ \tau(s) &= \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \|\alpha' \times \alpha''\|^2(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$T' = \kappa N, \quad N' = \kappa T - \tau B, \quad B' = \tau N, \quad T \times N = -B, \quad N \times B = T, \quad B \times T = -N,$$

şeklindedir. Timelike bir eğrinin Darboux vektörü  $W = \tau T - \kappa B$  biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

ii)  $\alpha$  eğrisi spacelike binormalı spacelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve torsiyonu:

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s), & \kappa(s) &= \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}, \\ N(s) &= T'(s) / \kappa(s), & B(s) &= -(T \times N)(s), \\ \tau(s) &= -\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \|\alpha' \times \alpha''\|^2(s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$T' = \kappa N, \quad N' = \kappa T + \tau B, \quad B' = \tau N, \quad T \times N = -B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = N$$

şeklindedir. Spacelike eğrinin Darboux vektörü  $W = -\tau T + \kappa B$  biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

iii)  $\alpha$  eğrisi timelike binormalı spacelike bir eğri ise Frenet elemanları, eğrilik ve torsiyonu:

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \alpha'(s), & \kappa(s) &= \sqrt{\langle T'(s), T'(s) \rangle}, \\
 N(s) &= T'(s) / \kappa(s), & B(s) &= T(s) \times N(s), \\
 \tau(s) &= (\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \|\alpha' \times \alpha''\|^2)(s)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

biçimindedir (Woestijne 1990). Frenet formülleri ise

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = \tau N, \quad T \times N = B, \quad N \times B = -T, \quad B \times T = -N$$

şeklindedir. Spacelike bir eğrinin Darboux vektörü  $W = \tau T - \kappa B$  biçiminde ifade edilir (Uğurlu 1997).

**Tanım 2.1.**  $\alpha = \alpha(s)$  ve  $\alpha^* = \alpha^*(s)$ ,  $R_1^3$  de iki eğri ve bu eğrilerin Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olsun. Eğer  $g(T, T^*) = 0$  ise  $\alpha^*$  eğrisine,  $\alpha$  eğrisinin involütü ( $\alpha$  eğrisine ise  $\alpha^*$  eğrisinin evolütü) denir (Bilici ve Çalışkan 2011).

**Lemma 2.1.**  $\alpha^*$  eğrisi,  $\alpha$  eğrisinin involütü olmak üzere sırasıyla  $(I, \alpha^*)$  ve  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğunda verilen iki eğri olsun.  $\alpha^*$  ve  $\alpha$  eğrileri arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c - s|, \quad c = \text{sabit}, \quad \forall s \in I$$

biçiminde ifade edilir (Bilici ve Çalışkan 2011).

**Tanım 2.2.**  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisi timelike bir eğri,  $-B$  spacelike birim vektörü ile  $W$  Darboux vektörü arasındaki Lorentz timelike açı  $\phi$  ve  $W$  vektörünün birim vektörü  $C$  olsun.

i)  $|\kappa| \langle \tau |$ , ise  $W$  vektörü spacelike vektör ve

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \|W\| \cosh \phi, & \tau &= \|W\| \sinh \phi, \\
 C &= \frac{W}{\|W\|} = \sinh \phi T - \cosh \phi B, & \|W\|^2 &= g(W, W) = \kappa^2 - \tau^2,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

ii)  $|\kappa| \langle \tau |$  ise  $W$  vektörü timelike vektör ve

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \|W\| \sinh \phi, & \tau &= \|W\| \cosh \phi, \\
 C &= \frac{W}{\|W\|} = \cosh \phi T - \sinh \phi B, & \|W\|^2 &= g(W, W) = \tau^2 - \kappa^2
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

eşitlikleri sağlanır (Bilici ve Çalışkan 2011).

**Teorem 2.1.**  $\alpha^*$  spacelike eğrisi,  $\alpha$  timelike eğrisinin bir involütü olsun.  $B$  ve  $N^*$  vektörleri arasındaki Lorentz timelike açı  $\phi$  olmak üzere  $\alpha^*$  eğrisi ile  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri arasında

i)  $W$  vektörü spacelike bir vektör ( $|\kappa| \langle \tau |$ ) ise

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \phi & 0 & \sinh \phi \\ -\sinh \phi & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},
 \tag{2.6}$$

ii)  $W$  vektörü timelike bir vektör ( $|\kappa| \langle \tau |$ ) ise

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi & 0 & -\cosh \phi \\ -\cosh \phi & 0 & \sinh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}
 \tag{2.7}$$

bağıntıları vardır (Bilici ve Çalışkan 2011).

**Sonuç 2.1.**  $\alpha^*$  spacelike eğrisi,  $\alpha$  timelike eğrisinin involütü olsun. Bu takdirde  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrisinin causal karakteri

i)  $W$  spacelike vektör ( $|\kappa| \langle \tau |$ ) ise

$$\{T \text{ timelike}, N \text{ spacelike}, B \text{ spacelike}\} \quad \text{ve} \quad \{T^* \text{ spacelike}, N^* \text{ timelike}, B^* \text{ spacelike}\},$$

ii)  $W$  timelike vektör ( $|\kappa| \langle \tau |$ ) ise

$$\{T \text{ timelike}, N \text{ spacelike}, B \text{ spacelike}\} \quad \text{ve} \quad \{T^* \text{ spacelike}, N^* \text{ spacelike}, B^* \text{ timelike}\}$$

şeklindedir (Bilici ve Çalışkan 2011).

### 3. İnvölüt-Evolüt Eğrilerinin Null Olmayan $T^*B^*$ -Smarandache Eğrileri

$R_1^3$  de  $\alpha^*$  spacelike eğrisi, birim hızlı  $\alpha$  timelike eğrisinin involütü ve  $\alpha^*(s)$  eğrisinin Frenet çattısı  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olsun. Bu durumda

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı birim vektörün tanımladığı diferensiyellenebilir eğriye  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisi denir. Hesaplamalarda  $\beta$  eğrisinin  $s_\beta$  e göre yay parametrelili olduğu kabul edecektir.

i)  $\alpha^*$ , spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (3.1) ifadesinde  $T^*$  ve  $B^*$  vektörlerinin yerine (2.6) ifadesinden eşitleri yazılırsa  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s) = \frac{-\sinh \phi T + N + \cosh \phi B}{\sqrt{2}} \tag{3.2}$$

şeklinde olur. (3.2) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\beta'(s) = T_\beta \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{(\kappa - \phi' \cosh \phi)T + (\phi' \sinh \phi - \tau)B}{\sqrt{2}}, \tag{3.3}$$

$$\langle \beta', \beta' \rangle = -\frac{(\phi' - \|W\|)^2}{2} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu taktirde (3.4) ifadesinden  $-(\phi' - \|W\|)^2 < 0$  olduğundan  $\beta$ , timelike bir eğri olacaktır.

$\exists \phi', \|W\|$  için  $-\frac{(\phi' - \|W\|)^2}{2} \neq 1$  olduğundan  $\beta$  eğrisi  $s$  ye göre yay parametrelili değildir. (3.3) denklemi

tekrar düzenlenirse  $\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{|\phi' - \|W\||}{\sqrt{2}}$  ve  $\|W\|^2 = \kappa^2 - \tau^2$  olmak üzere

$$T_\beta = \frac{(\kappa - \phi' \cosh \phi)T + (\phi' \sinh \phi - \tau)B}{|\phi' - \|W\||} \tag{3.5}$$

ifadesi elde edilir. (3.5) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\omega_1 = (-\phi'' \cosh \phi - \theta'^2 \sinh \phi + \kappa')|\phi' - \|W\|| + (\phi' \cosh \phi - \kappa)|\phi' - \|W\||',$$

$$\omega_2 = (-\phi' \|W\| + \|W\|^2)|\phi' - \|W\||,$$

$$\omega_3 = (\phi'' \sinh \phi + \phi'^2 \cosh \phi - \tau')|\phi' - \|W\|| - (\phi' \sinh \phi - \tau)|\phi' - \|W\||'$$

olmak üzere (2.1) de verilen eşitlikler kullanılırsa  $\beta$  eğrisinin asli normal  $N_\beta$ , binormal  $B_\beta$  ve eğriliği  $\kappa_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$N_\beta = \frac{T_\beta'}{\|T_\beta'\|} = \frac{\omega_1 T + \omega_2 N + \omega_3 B}{\sqrt{-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}},$$

$$B_\beta = \frac{1}{|\phi' - \|W\|| \sqrt{(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}} \begin{pmatrix} -(\phi' \sinh \phi - \tau)\omega_2 T \\ + ((\phi' \cosh \phi - \kappa)\omega_3 + (\phi' \sinh \phi - \tau)\omega_1) N \\ -(\phi' \cosh \phi - \kappa)\omega_2 B \end{pmatrix},$$

$$\kappa_\beta = \|T_\beta'\| = \frac{\sqrt{2(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)}}{|\phi' - \|W\||^3}.$$

$\beta$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_\beta$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= (\tau - \phi' \sinh \phi) (-\phi' \|W\| + \|W\|^2), \\ \varpi_2 &= (-\phi' \cosh \phi + \kappa) (\phi'' \sinh \phi + \phi'^2 \cosh \phi - \tau') + (\phi' \sinh \phi - \tau) (\phi'' \cosh \phi + \phi'^2 \sinh \phi - \kappa'), \\ \varpi_3 &= (\phi' \cosh \phi - \kappa) (-\phi' \|W\| + \|W\|^2), \\ \Omega_1 &= -(\phi''' + \phi'^3) \cosh \phi - 3\phi' \phi'' \sinh \phi + \kappa'' - \phi' \kappa' \|W\| + \kappa \|W\|^2, \\ \Omega_2 &= -2\phi'' \|W\| - \phi' \|W\|' + 2\|W\| \|W\|' + \kappa \kappa' - \tau \tau', \\ \Omega_3 &= (\phi''' + \phi'^3) \sinh \phi + 3\phi' \phi'' \cosh \phi - \tau'' + \phi' \tau' \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(-\varpi_1 \Omega_1 + \varpi_2 \Omega_2 + \varpi_3 \Omega_3)}{-\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2}$$

şeklinde bulunur.

ii)  $\alpha^*$ , timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (3.1) ifadesinde  $T^*$  ve  $B^*$  vektörlerinin yerine (2.7) ifadesinden eşitleri yazılırsa  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s) = \frac{-\cosh \phi T + N + \sinh \phi B}{\sqrt{2}} \tag{3.6}$$

şeklinde olur. (3.6) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\beta'(s) = T_\beta \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{(-\phi' \sinh \phi + \kappa)T + (\phi' \cosh \phi - \tau)B}{\sqrt{2}}, \tag{3.7}$$

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \frac{(\phi' - \|W\|)^2}{2} \tag{3.8}$$

bulunur. Bu taktirde (3.8) ifadesinden  $(\phi' - \|W\|)^2 > 0$  olduğundan  $\beta$  spacelike bir eğri olacaktır.

$\exists \phi', \|W\| \in \mathbb{R}$  için  $\frac{(\phi' - \|W\|)^2}{2} \neq 1$  olduğundan  $\beta$  eğrisi  $s$  ye göre yay parametrelidir. (3.7)

denklemini tekrar düzenlenirse  $\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{|\phi' - \|W\||}{\sqrt{2}}$  ve  $\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$  olmak üzere  $\beta$  eğrisinin teğet vektörü aşağıdaki gibidir:

$$T_\beta = \frac{(-\phi' \sinh \phi + \kappa)T + (\phi' \cosh \phi - \tau)B}{|\phi' - \|W\||} \tag{3.9}$$

(ii.1)  $\beta$  eğrisi, spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. Bu taktirde (3.9) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (-\phi'' \sinh \phi - \phi'^2 \cosh \phi + \kappa') |\phi' - \|W\|| + (\phi' \sinh \phi - \kappa) |\phi' - \|W\||', \\ \nu_2 &= (\phi' \|W\| - \|W\|^2) |\phi' - \|W\||', \\ \nu_3 &= (\phi'' \cosh \phi + \phi'^2 \sinh \phi - \tau') |\phi' - \|W\|| - (\phi' \cosh \phi - \tau) |\phi' - \|W\||' \end{aligned}$$

olmak üzere (2.2) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin asli normal  $N_\beta$ , binormal  $B_\beta$  ve eğriliği  $\kappa_\beta$  sırasıyla

$$N_\beta = \frac{T_\beta'}{\|T_\beta'\|} = \frac{(\nu_1 T + \nu_2 N + \nu_3 B)}{\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2}},$$

$$B_\beta = \frac{1}{|\phi' - \|W\|| \sqrt{v_1^2 - v_2^2 - v_3^2}} \begin{pmatrix} (\phi' \cosh \theta - \tau)v_2 T \\ + ((\phi' \sinh \theta - \kappa)v_3 + (\phi' \cosh \theta - \tau)v_1) N \\ - (\phi' \sinh \theta - \kappa)v_2 B \end{pmatrix},$$

$$\kappa_\beta = \|T'_\beta\| = \frac{\sqrt{2(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2)}}{|\phi' - \|W\||^3}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= (-\phi' \cosh \phi + \tau)(\phi' \|W\| - \|W\|^2), \\ \bar{v}_2 &= (\kappa - \phi' \sinh \phi)(\phi'' \cosh \phi + \phi'^2 \sinh \phi - \tau') - (\phi' \cosh \phi - \tau)(\kappa' - \phi'' \sinh \phi - \phi'^2 \cosh \phi), \\ \bar{v}_3 &= (\phi' \sinh \phi - \kappa)(\phi' \|W\| - \|W\|^2), \\ \Pi_1 &= -(\phi'' + \phi'^3) \sinh \phi - 3\phi' \phi'' \cosh \phi + \kappa'' + \phi' \kappa' \|W\| - \kappa \|W\|^2, \\ \Pi_2 &= 2\phi'' \|W\| + \phi' \|W\|' - 2\|W\| \|W\|' + \kappa \kappa' - \tau \tau', \\ \Pi_3 &= (\phi'' + \phi'^3) \cosh \phi + 3\phi' \phi'' \sinh \phi - \tau'' - \phi' \tau' \|W\| + \tau \|W\|^2 \end{aligned}$$

olmak üzere  $\beta$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_\beta$  aşağıdaki gibidir:

$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(\bar{v}_1 \Pi_1 - \bar{v}_2 \Pi_2 - \bar{v}_3 \Pi_3)}{-\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2}$$

**(ii.2)**  $\beta$  eğrisi, timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. Bu taktirde (2.3) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin teğet vektörü  $T_\beta$ , asli normali  $N_\beta$ , binormalı  $B_\beta$ , eğriliği  $\kappa_\beta$  ve torsiyonu  $\tau_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$T_\beta = \frac{(\phi' \sinh \phi + \kappa)T + (\phi' \cosh \phi - \tau)B}{|\phi' - \|W\||},$$

$$N_\beta = \frac{T'_\beta}{\|T'_\beta\|} = \frac{(v_1 T + v_2 N + v_3 B)}{\sqrt{-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

$$B_\beta = \frac{1}{|\phi' - \|W\|| \sqrt{-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \begin{pmatrix} -(\phi' \cosh \phi - \tau)v_2 T \\ -((\phi' \sinh \phi - \kappa)v_3 + (\phi' \cosh \phi - \tau)v_1) N \\ + (\phi' \sinh \phi - \kappa)v_2 B \end{pmatrix},$$

$$\kappa_\beta = \|T'_\beta\| = \frac{\sqrt{2(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}{2|\phi' - \|W\||^3},$$

$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(-\bar{v}_1 \Pi_1 + \bar{v}_2 \Pi_2 + \bar{v}_3 \Pi_3)}{-\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2}.$$

#### 4. İvolüt-Evolüt Eğrilerinin Null Olmayan $N^*B^*$ -Smarandache Eğrileri

$R_1^3$  de  $\alpha^*$  spacelike eğrisi, birim hızlı  $\alpha$  timelike eğrisinin involütü ve  $\alpha^*(s)$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olsun. Bu durumda

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı birim vektörün tanımladığı diferensiyellenebilir eğriye  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisi denir. Daha önce olduğu gibi  $\beta$  eğrisinin  $s_\beta$  e göre yay parametrelili olduğu kabul edilecektir.

i)  $\alpha^*$  spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (4.1) ifadesinde  $N^*$  ve  $B^*$  vektörlerinin (2.6) ifadesinden eşitleri yazılırsa  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s) = \frac{(\cosh \phi + \sinh \phi)(B - T)}{\sqrt{2}} \tag{4.2}$$

şeklinde olur. (4.2) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\beta'(s) = T_\beta \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{-\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)T - \|W\|N + \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)B}{\sqrt{2}}, \tag{4.3}$$

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \frac{\|W\|^2}{2} \tag{4.4}$$

bulunur. Bu taktirde (4.4) ifadesinden  $\|W\|^2 > 0$  olduğundan  $\beta$  spacelike bir eğri olacaktır.  $\exists \|W\| \in R$  için

$\frac{\|W\|^2}{2} \neq 1$  olduğundan  $\beta$  eğrisi  $s$  ye göre yay parametrelili değildir. (4.3) denklemi tekrar düzenlenirse

$\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\|W\|}{\sqrt{2}}$  ve  $\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$  olmak üzere

$$T_\beta = \frac{-\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)T - \|W\|N + \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)B}{\|W\|} \tag{4.5}$$

ifadesi elde edilir.

(i.1)  $\beta$  eğrisi, spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (4.5) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\zeta_1 = (-\phi'^2 + \phi'')(\cosh \phi + \sinh \phi) - \|W\|\kappa\|W\| + \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\|W\|',$$

$$\zeta_2 = -\phi'\|W\|^2,$$

$$\zeta_3 = ((\phi'' + \phi'^2)(\cosh \phi + \sinh \phi) + \|W\|\tau\|W\| - \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\|W\|'$$

olmak üzere (2.2) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin asli normal  $N_\beta$ , binormal  $B_\beta$ , eğriliği  $\kappa_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$N_\beta = \frac{T_\beta'}{\|T_\beta'\|} = \frac{(\zeta_1 T + \zeta_2 N + \zeta_3 B)}{\sqrt{\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2}},$$

$$B_\beta = \frac{1}{\|W\|\sqrt{\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2}} \begin{pmatrix} (\|W\|\zeta_3 + \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\zeta_2)T \\ + (\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)(\zeta_3 + \zeta_1))N \\ + (\|W\|\zeta_1 - \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\zeta_2)B \end{pmatrix},$$

$$\kappa_\beta = \|T_\beta'\| = \frac{\sqrt{2(\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2)}}{\|W\|^3}.$$

$\beta$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_\beta$

$$\bar{\zeta}_1 = (\cosh \phi + \sinh \phi)(\phi''\|W\| - \phi'\|W\|') + \tau\|W\|^2,$$

$$\bar{\zeta}_2 = \phi'\|W\|(\cosh \phi + \sinh \phi)(\kappa + \tau),$$

$$\bar{\zeta}_3 = (\cosh \phi + \sinh \phi)(-\phi''\|W\| - \phi'\|W\|') + \kappa\|W\|^2,$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (\cosh \phi + \sinh \phi)(-\phi''' - 3\phi'\phi'' - \phi'^3) - \kappa' \|W\| - 2\kappa \|W\|' - \phi'\kappa \|W\|, \\ \Psi_2 &= -2\phi'' \|W\| - \phi'^2 \|W\| - \phi' \|W\|' - \|W\|'' - \|W\|^3, \\ \Psi_3 &= (\cosh \phi + \sinh \phi)(\phi''' + 3\phi'\phi'' + \phi'^3) + \tau' \|W\| + 2\tau \|W\|' + \phi'\tau \|W\| \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(\bar{\zeta}_1\Psi_1 - \bar{\zeta}_2\Psi_2 - \bar{\zeta}_3\Psi_3)}{-\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

(i.2)  $\beta$  eğrisi, timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. Bu taktirde (2.3) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin teğet vektörü  $T_\beta$ , asli normalı  $N_\beta$ , binormalı  $B_\beta$ , eğriliği  $\kappa_\beta$  ve torsiyonu  $\tau_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{-\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)T - \|W\|N + \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)B}{\|W\|}, \\ N_\beta &= \frac{T'_\beta}{\|T'_\beta\|} = \frac{(\zeta_1T + \zeta_2N + \zeta_3B)}{\sqrt{-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}}, \\ B_\beta &= \frac{1}{\|W\|\sqrt{-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}} \begin{pmatrix} (-\|W\|\zeta_3 - \phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\zeta_2)T \\ -(\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)(\zeta_1 + \zeta_3))N \\ +(\phi'(\cosh \phi + \sinh \phi)\zeta_2 - \|W\|\zeta_1)B \end{pmatrix}, \\ \kappa_\beta &= \|T'_\beta\| = \frac{\sqrt{2(-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)}}{\|W\|^3}, \\ \tau_\beta &= \frac{\sqrt{2}(-\bar{\zeta}_1\Psi_1 + \bar{\zeta}_2\Psi_2 + \bar{\zeta}_3\Psi_3)}{-\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_3^2}. \end{aligned}$$

ii)  $\alpha^*$ , timelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (4.1) ifadesinde  $N^*$  ve  $B^*$  vektörlerinin yerine (2.7) ifadesinden eşitleri yazılırsa  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s) = \frac{(\sinh \phi - \cosh \phi)(T + B)}{\sqrt{2}} \tag{4.6}$$

şeklinde olur. (4.6) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\beta'(s) = T_\beta \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)T - \|W\|N + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)B}{\sqrt{2}} \tag{4.7}$$

$$\langle \beta', \beta' \rangle = \frac{\|W\|^2}{2} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) ifadesinden  $\|W\|^2 > 0$  olduğundan  $\beta$  spacelike bir eğri olacaktır.  $\exists \|W\| \in R$  için  $\frac{\|W\|^2}{2} \neq 1$

olduğundan  $\beta$  eğrisi  $s$  ye göre yay parametrelidir. (4.7) eşitliği tekrar düzenlenirse  $\frac{ds_\beta}{ds} = \frac{\|W\|}{\sqrt{2}}$  ve

$\|W\|^2 = \tau^2 - \kappa^2$  olmak üzere

$$T_\beta = \frac{\phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)T + \|W\|N + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)B}{\|W\|} \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir.

(ii.1)  $\beta$  eğrisi, spacelike binormalı spacelike bir eğri olsun. (4.9) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınır



$$\begin{aligned} \rho_1 &= ((\phi'' - \phi'^2)(\cosh \phi - \sinh \phi) - \|W\|\kappa)\|W\| - \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\|W\|', \\ \rho_2 &= \phi'\|W\|^2, \\ \rho_3 &= (\phi'' - \phi'^2)(\cosh \phi - \sinh \phi) + \|W\|\tau\|W\| - \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\|W\|' \end{aligned}$$

olmak üzere (2.2) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin asli normali  $N_\beta$ , binormali  $B_\beta$ , eğriliği  $\kappa_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} N_\beta &= \frac{T'_\beta}{\|T'_\beta\|} = \frac{(\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B)}{\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2}}, \\ B_\beta &= \frac{1}{\|W\|\sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2}} \begin{pmatrix} (\|W\|\rho_3 + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\rho_2)T \\ + (\phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)(\rho_1 - \rho_3))N \\ + (\|W\|\rho_1 + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\rho_2)B \end{pmatrix}, \\ \kappa_\beta &= \|T'_\beta\| = \frac{\sqrt{2(\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2)}}{\|W\|^3}. \end{aligned}$$

$\beta$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_\beta$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= (\cosh \phi - \sinh \phi)(-\phi''\|W\| + \phi'\|W\|') - \tau\|W\|^2, \\ \bar{\rho}_2 &= \phi'\|W\|(\cosh \phi - \sinh \phi)(\kappa + \tau), \\ \bar{\rho}_3 &= (\cosh \phi - \sinh \phi)(-\phi''\|W\| + \phi'\|W\|') + \kappa\|W\|^2, \\ \eta_1 &= (\cosh \phi - \sinh \phi)(\phi'' - 3\phi'\phi'' + \phi'^3) - \kappa'\|W\| - 2\kappa\|W\|' + \phi'\kappa\|W\|, \\ \eta_2 &= 2\phi''\|W\| - \phi'^2\|W\| + \phi'\|W\|' - \|W\|'' + \|W\|^3, \\ \eta_3 &= (\cosh \phi - \sinh \phi)(\phi'' - 3\phi'\phi'' + \phi'^3) + \tau'\|W\| + 2\tau\|W\|' - \phi'\tau\|W\| \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(\bar{\rho}_1\eta_1 - \bar{\rho}_2\eta_2 - \bar{\rho}_3\eta_3)}{-\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 + \bar{\rho}_3^2}$$

şeklinde elde edilir.

**(ii.2)**  $\beta$  eğrisi, timelike binormali spacelike bir eğri olsun. (2.3) ifadesinde verilen eşitlikler yardımıyla  $\beta$  eğrisinin teğet vektörü  $T_\beta$ , asli normali  $N_\beta$ , binormali  $B_\beta$ , eğriliği  $\kappa_\beta$  ve torsiyonu  $\tau_\beta$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{\phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)T + \|W\|N + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)B}{\|W\|}, \\ N_\beta &= \frac{T'_\beta}{\|T'_\beta\|} = \frac{(\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B)}{\sqrt{-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}, \\ B_\beta &= \frac{1}{\|W\|\sqrt{-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}} \begin{pmatrix} (-\|W\|\rho_3 - \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\rho_2)T \\ + (\phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)(\rho_3 - \rho_1))N \\ - (\|W\|\rho_1 + \phi'(\cosh \phi - \sinh \phi)\rho_2)B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\kappa_\beta = \left\| T'_\beta \right\| = \frac{\sqrt{2(-\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)}}{\|W\|^3},$$

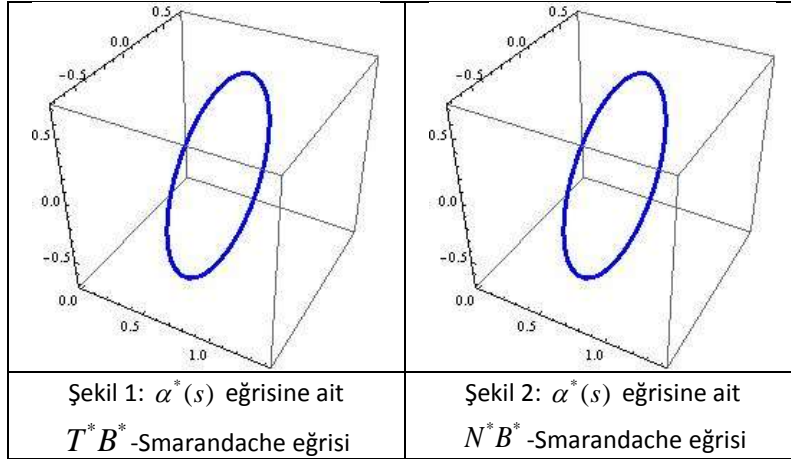
$$\tau_\beta = \frac{\sqrt{2}(-\bar{\rho}_1\eta_1 + \bar{\rho}_2\eta_2 + \bar{\rho}_3\eta_3)}{-\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 + \bar{\rho}_3^2}.$$

### 5. Örnekler

**Örnek 5.1.**  $\alpha(s) = \left( \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sin s \right)$  yay parametrelili timelike eğri olsun.  $\alpha$  eğrisinin,  $\alpha^*$  involüt eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha^*(s) = \left( \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}s + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}|c-s|, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos s - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}|c-s|\sin s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sin s + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}|c-s|\cos s \right),$$

şeklinde dir.  $\alpha^*$  involüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu sırasıyla  $T^*(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$ ,  $N^*(s) = (0, \sin s, -\cos s)$ ,  $B^*(s) = (1, 0, 0)$ ,  $\kappa^*(s) = 1$  ve  $\tau^*(s) = 0$  şeklinde elde edilir.  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisinin parametrik denklemi  $\beta_{T^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\cos s, -\sin s)$ , Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu ise sırasıyla  $T_{\beta_{T^*B^*}}(s) = (0, \sin s, -\cos s)$ ,  $N_{\beta_{T^*B^*}}(s) = (0, -\cos s, -\sin s)$ ,  $B_{\beta_{T^*B^*}}(s) = (1, 0, 0)$ ,  $\kappa_{\beta_{T^*B^*}}(s) = \sqrt{2}$  ve  $\tau_{\beta_{T^*B^*}}(s) = 0$ ,  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisinin parametrik denklemi  $\beta_{N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sin s, -\cos s)$ , Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu ise sırasıyla  $T_{\beta_{N^*B^*}}(s) = (0, \cos s, \sin s)$ ,  $N_{\beta_{N^*B^*}}(s) = (0, \sin s, -\cos s)$ ,  $B_{\beta_{N^*B^*}}(s) = (1, 0, 0)$ ,  $\kappa_{\beta_{N^*B^*}}(s) = \sqrt{2}$  ve  $\tau_{\beta_{N^*B^*}}(s) = 0$  şeklinde elde edilir.  $T^*B^*$  ve  $N^*B^*$ -Smarandache eğrileri Şekil 1 de ve Şekil 2 de gösterilmiştir.

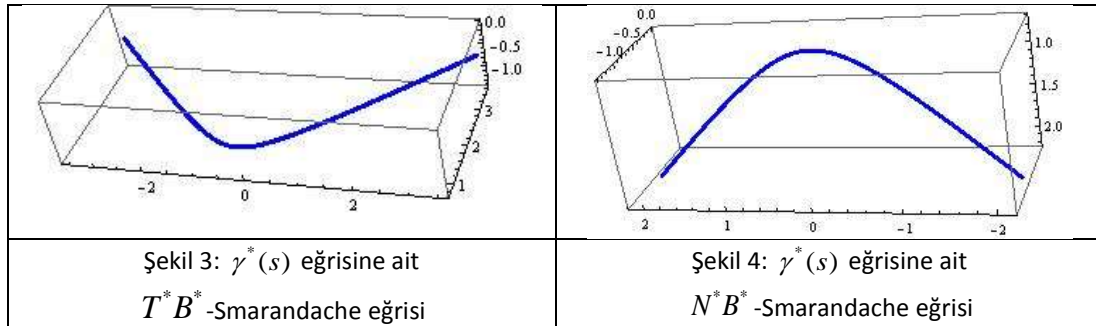


**Örnek 5.2.**  $\gamma(s) = \left( 2\sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, 2\cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$  yay parametrelili timelike eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin,  $\gamma^*$  involüt eğrisinin parametrik denklemi

$$\gamma^*(s) = \left( 2\sinh \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{2|c-s|}{\sqrt{3}}\cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, 2\cosh \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{2|c-s|}{\sqrt{3}}\sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} + \frac{|c-s|}{\sqrt{3}} \right),$$

şeklinde dir.  $\gamma^*$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu sırasıyla  $T^*(s) = \left( \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $N^*(s) = \left( \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $B^*(s) = (0, 0, -1)$ ,  $\kappa^*(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ve

$\tau^*(s) = 0$  şeklinde elde edilir.  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisinin parametrik denklemi  $\beta_{T^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, -1 \right)$ , Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu ise sırasıyla  $T_{\beta_{T^*B^*}}(s) = \left( \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $N_{\beta_{T^*B^*}}(s) = \left( -\sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, -\cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $B_{\beta_{T^*B^*}}(s) = (0, 0, -1)$ ,  $\kappa_{\beta_{T^*B^*}}(s) = \sqrt{2}$  ve  $\tau_{\beta_{T^*B^*}}(s) = 0$ ,  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisinin parametrik denklemi  $\beta_{N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, -1 \right)$ , Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu ise sırasıyla  $T_{\beta_{N^*B^*}}(s) = \left( \sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, \cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $N_{\beta_{N^*B^*}}(s) = \left( -\cosh \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sinh \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right)$ ,  $B_{\beta_{N^*B^*}}(s) = (0, 0, 1)$ ,  $\kappa_{\beta_{N^*B^*}}(s) = \sqrt{2}$  ve  $\tau_{\beta_{N^*B^*}}(s) = 0$  şeklinde elde edilir. İvolüt eğrisine ait  $T^*B^*$  ve  $N^*B^*$ -Smarandache eğrileri Şekil 3 ve Şekil 4 de gösterilmiştir.



## 6. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada,  $\alpha$  timelike eğrisinin  $\alpha^*$  involüt eğrisi; timelike binormal ve spacelike binormal spacelike bir eğri olarak alındığında elde edilen null olmayan  $T^*B^*$  ve  $N^*B^*$ -Smarandache-eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu,  $\alpha$  evolute eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonuna bağlı olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde involüt-evolüt eğrileri için yapılan bu çalışmalar Bertrand eğri çiftleri ve Mannheim eğri çiftleri için de yapılabilir.

## Kaynaklar

- [1] Bilici M., Çalışkan M. 2009. On the Involutes of Spacelike Curve with a Timelike Binormal in Minkowski 3-Space. International Mathematical Forum, 4 (31): 1497-1509.
- [2] Bilici M., Çalışkan M. 2011. Some New Notes on the Involutes of the Timelike Curves in Minkowski 3-Space. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6 (41): 2019-2030.
- [3] Bükçü B., Karacan M.K. 2007. On the Involute and Evolute Curves of Spacelike Curves with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. International Journal of Mathematical. Sciences, 2 (5): 221-232.
- [4] Bükçü B., Karacan M.K. 2007. On the Involute and Evolute Curves of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, Demonstratio Mathematica, 40 (3): 721-732.
- [5] Duggal K.L, Bejancu A. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [6] Gürses N., Bektaş Ö., Yüce S. 2016. Special Smarandache Curves in  $R_1^3$ . Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Series. A1 Mathematics and Statics, 65 (2): 143-160.

- [7] Kalkan Ö., Öztürk H., Zeybek D. 2018. On  $T^*N^*$  Smarandache Curves of Involute-Evolute Curve According to Frenet Frame in Minkowski 3-Space. 16 th. International Geometry Symposium, July 4-7, Manisa Celal Bayar University, Manisa.
- [8] Lopez, R., 2014. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International Electronic Journal of Geometry, 7 (1): 44-107.
- [9] O'Neill B. 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London.
- [10] Şenyurt S., Sivas S. 2013. Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama. Ordu Üniversitesi. Journal of Science and Technology, 3 (1): 46-60.
- [11] Şenyurt S., Çalışkan A. 2015.  $N^*C^*$  -Smarandache Curves of Mannheim Curve Couple According to Frenet Frame. International Journal of Mathematical, Combinatorics, 1: 1–13.
- [12] Şenyurt S., Çalışkan A., Çelik Ü. 2016.  $N^*C^*$  -Smarandache Curve of Bertrand Curves Pair According to Frenet Frame, International Journal of Mathematical. Combinatorics, Vol.1: 1-7.
- [13] Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C. 2019. Smarandache Curves According to Sabban Frame Belonging to Mannheim Curves Pair. Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Series. A1 Mathematics and Statics, 68 (1): 500-513.
- [14] Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C. 2020. Smarandache Curves for Spherical Indicatrix of the Bertrand Curves Pair. Boletim da Sociedade Paranaense de Mathematica, 38 (2): 27-39.
- [15] Turgut M., Yılmaz S. 2008. Smarandache Curves in Minkowski Space-Time, International Journal of Mathematical, Combinatorics, 3: 51-55.
- [16] Uğurlu, H.H., 1997. On the Geometry of Timelike Surfaces, Communications Faculty of Sciences. University of Ankara Series. A1 Mathematics and Statics, 46: 211-223.
- [17] Woestijne, V.D.I. 1990. Minimal Surfaces of the 3-Dimensional Minkowski Space. Proc. Congres Geometrie Differentielle Et Applications, Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing. Singapore, 344-369.