Buca Eğitim Fakültesi Dergisi,
Haziran 2019, Sayı 47, s.134-156

Araştırma Makalesi

The Journal of Buca Faculty of Education,
June 2019, Issue 47, p.134-156

Original Research

Öğretim Elemanlarının Matematiksel İspatın Önemine Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi*

Investigation of The Instructors' Opinions About The Importance of Mathematical Proof

Esra AKSOY[1], Serkan NARLI[2]

[1]*SorumluYazar, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, esrarengiz-114@hotmail.com, (https://orcid.org/0000-0001-8829-2383)*
[2]*Prof. Dr., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, Eğitim Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye, serkan.narli@deu.edu.tr, (https://orcid.org/0000-0001-8629-8722)*

Geliş Tarihi: *14.04.2019* ***Kabul Tarihi:****26.06.2019*

ÖZ

Bu çalışmanın amacı öğretim elemanlarının ispatın önemine yönelik görüşlerini incelemektir.Bu amaca bağlı olarak bir eğitim fakültesinde ispat temelli matematik dersleri veren 7 öğretim elemanıile mülakat yapılmıştır. İspatın önemine yönelik görüşlerin analizi sonucunda 25 kategori oluşmuş ve bu kategoriler 5 tema altında toplanmıştır. İlk mülakatın analizi ile oluşturulan sıralama anketi ile öğretim elemanlarının bu temaları kendilerine göre önem sırasına göre sıralamaları istenmiştir. Sonuç olarak, öğretim elemanlarının ispatları önemli bulmasında en etkili gerekçenin,ispatın öğrencilerin düşünme becerilerine katkı yaptığını düşünmeleri olduğu söylenebilir. Bu temayı sırasıyla, "teoremin/konunun öğrenilmesine katkı", "matematiğin tanıtılmasına katkı", "duyuşsal özelliklere katkı" ve son olarak "uygulamaya katkı"temaları takip etmektedir. İspatın önemine yönelik oluşan kategoriler çoğunlukla literatürdeki görüşlerle paralellik göstermekle birlikte ispatın öğrenciye güven vermesi ve heyecan duymaya sebep olması gibi farklı görüşlerin de ortaya çıktığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: İspat, ispatlama, öğretim elemanları.

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate the instructors' opinions about the importance of proof. Seven instructors, who teach proof-oriented mathematics courses at an education faculty, were interviewed. As a result of the analysis of opinions about the importance of proof, 25 categories were created under 5 themes. According to the ranking questionnaire formed by the analysis of the first interview, the instructors were asked to rank these themes according to the importance. Consequently, it can be said that the most effective reason for the instructors' presenting proofs is proof's contribute to the students' thinking skills. This theme is followed by respectively "contribution to the learning of the theorem/topic", "contribution to the introduction of mathematics", contribution to affective characteristics", and "contribution to applying the mathematics". Although the categories that are related to the importance of proof are mostly in parallel with the opinions in the literature, it has been seen that different opinions emerged, such as the fact that the proof gives confidence to the student and causes excitement.

Key words: Proof, proving, instructors.

---

* Bu araştırma Esra Aksoy'un Prof. Dr. Serkan Narlı danışmanlığında yürüttüğü doktora tezinin bir bölümünden üretilmiştir.

GİRİŞ

NCTM (2000) de ispatın okul öncesinden üniversite düzeyine kadar her seviyede işlevini vurgulamaktadır. Yani, okul öncesinden üniversite düzeyine kadar her seviyede öğretmenlerden beklenen, öğrencilerini seviyelerine uygun ispatlama aktivitelerinin (ispat okuma, ispat doğrulama, ispat oluşturma, gerekçelendirme, ispat sunma vb.) içine çekmektir. Stylianides (2007) öğrencilerin ispatla uğraşmak için fırsatlara ve bir modele ihtiyaç duyduklarını tartışmıştır ve bu nedenle öğretmenlere, öğrencilerine ispatla uğraşmaları için fırsatlar sağlamalarını tavsiye etmiştir. Matematikçiler, matematik eğitimcileri ve matematik eğitimi araştırmacıları, ispatın matematik derslerinde önemli bir role sahip olması gereken çok temel bir etkinlik olduğu konusunda hemfikirdir (Weber, 2010). Öğretmen adayları hem gelecekteki öğrencilerinin ispat anlayışını şekillendirecek bu tür aktivitelere hem de ileri düzey matematiksel düşünmeye, üniversitedeki ispat temelli matematik derslerinde hazırlanmaktadır. Okul matematiğinde muhakeme ve ispatın önemi yükselişte olduğundan öğretmen adaylarına verilen matematik derslerinde bu matematiksel aktiviteyi öğrenmek için sunulan fırsatlarla ilgili meseleler de yükseliştedir (McCrory ve Stylianides, 2014). Nardi ve Knuth (2017) ispatın öneminin ve gerekliliğinin takdir edilmesinin matematik eğitiminde ispatlama becerisinin gelişimi için önemli olduğunu belirtmişlerdir.

Prensipler ve Standartlar'da, 'öğretmenin rehberliğinde öğrenciler verilen ifadeleri/açıklamaları kabul ederken yüksek standartlar geliştirmeli' (sf. 346) önerisi bulunmaktadır (NCTM, 2000). Lise ve üniversite öğrencileri genellikle öğretmenlerinin düzenlenmiş bir ispatı sunuşunu izlerler ve onlardan benzer problemler üzerinde aynı veya benzer stratejiler uygulamaları istenir (Stylianou, Blanton ve Knuth, 2009). Hemmi (2006) öğrencilerin matematiksel ispat ile ilgili algılarının büyük ölçüde matematik derslerinde gözlemledikleri ispatlarla şekillendiğini belirtmiştir. Dolayısıyla matematik öğretmenlerinin ispatla ilgili algıları da genellikle lisans düzeyinde matematiksel ispatla ilgili içerikleri öğrendikleri derslerden etkilenir (Knuth, 2002).

Araştırmalar gösteriyor ki öğretmenlerin etkinlik seçerken ve öğretimi planlarken verdikleri kararlar, onların bilgileri, inançları ve amaçlarıyla yakından ilgilidir (Levenson, 2013; Stein, Grover, ve Henningsen, 1996). Benzer şekilde, matematik öğretmenlerinin ispat hakkındaki bilgisi ve inançları da, onların ispatla ilgili etkinlikleri sınıfta nasıl uyguladıklarını, ispatlamaya katılımları için öğrencilerine sağladıkları fırsatları ve öğrencilerin öğrenmesine yönelik beklentilerini etkiler (örn., Bieda, 2010; Stylianides, 2007; Stylianou ve diğerleri, 2009). Bu yüzden öğretmenlerin ispata yönelik uygulamalarının yanı sıra ispat hakkındaki inançlarının incelenmesinin önemli olduğu söylenebilir. Weber (2012) öğretim elemanlarının pedagojik amaçlarını ve uygulamalarını anlamanın pedagojik tavsiyelerin yayılması için önemli olduğunu belirtmiştir.Bu bağlamda, bu çalışmada öğretmen adaylarına matematik dersleri veren öğretim elemanlarının derste neden ispat yaptıklarına yönelik açıklamaları incelenerek ispatın önemine yönelik görüşleri ve bu görüşleri nasıl sıraladıkları ele alınacaktır.

1.1.İlgili Literatür

Ulusal Matematik Öğretmenleri Topluluğu (NationalCouncil of Teacher of Mathematics [NCTM]) tarafından yayınlanan Prensipler ve Standartlar adlı dokümanda ispatlama kavramı, akıl yürütmenin ve gerekçenin kurallara uygun biçimde ifade edilmesi olarak tanımlanmıştır (2000). Matematikçilerin ispatın önemli olduğu konusunda hemfikir olduğu (Coe ve Ruthven, 1994; Hanna, 2000; Martin ve Harel, 1989) hatta bazılarının matematiği ispatlama bilimi olarak kabul ettiği de bilinmektedir. Peki ispatı bu kadar önemli yapan şey nedir? Bu sorunun cevabını ispatın matematik disiplinindeki ve matematik eğitimindeki işlevlerini/rollerini inceleyerek görebiliriz.

İspatın rolleri üzerine yapılan birçok araştırma bazen benzer bazen de farklı rollere vurgu yapıyor olsa da ispatın matematik eğitiminde önemi konusunda bu çalışmaların hemfikir olduğu söylenebilir. Cilli-Turner (2017) ispatın işlevlerinin içeriğe ve sunuma bağlı olarak çeşitlilik gösterebildiğini belirtmiştir. Matematikçiler için ispat, doğrulama (Hersh, 1993; de Villiers, 1999), açıklama (Hersh, 1993; Hanna, 1995), keşfetme (de Villiers, 1999), zihinsel meydan okuma/zorlama (de Villiers, 1999), sistematikleştirme (Bell, 1976; de Villiers, 1999) ve iletişim (Hanna, 1995; de Villiers, 1999; Harel ve Sowder, 2007) sağlayabilir.

Bell'e (1976) göre ispat, her biri kendi açısından çok önemli olan 3 işlev taşımaktadır: *doğrulama, açıklama, sistemleştirme*. Doğrulama, bir önermenin doğru olduğunu savunmaktır. Açıklama, bir önermenin neden doğru veya yanlış olduğuna ilişkin ispatın bir öngörü taşımasıdır. İspatın üçüncü anlamı ise aksiyomatik bir sistem içerisinde ana kavramların, teoremlerin ve diğer sonuçların tüdengelimsel bir yaklaşımla sistemleştirilmesidir. De Villiers (1990), Bell'in ifade etmiş olduğu ispatın işlevlerini 4 madde olarak ele almıştır. Bell'in (1976) de kabul ettiği *doğrulama, açıklama* ve *sistemleştirme*nin yanı sıra, ispatın doğrulanan ve açıklanan durumu karşı tarafa da iletme yani *iletişimi* sağlama işlevini de ortaya atmıştır. Bu işlevle ispat matematikçi-öğretmen-öğrenci üçlüsü arasında matematiksel bilginin taşınmasını sağlar. De Villiers (1999) çalışmasında ispatın işlevlerine *keşfetme* ve *entellektüel meydan okuma*yı da eklemiştir. De Villiers'a göre bir önermenin ispatlanması aşamasında farklı önermelere ulaşmayı sağlayacak yeni sonuçlar ortaya çıkabilir. Öklid'in 5. postulatından yola çıkarak Öklid dışı geometrilerin keşfini buna örnek olarakgösterebiliriz. Bu da ispatın *keşfetme* işlevini veya bir başka deyişle rolünü ifade etmektedir. *Entelektüel meydan okuma* rolüne sahip ispat aynı zamanda onu yapan kişinin kendini kanıtlamasına da olanak sağlar. Bu rol kişinin ispat yaptıktan sonra aldığı hazzı da ifade etmektedir. Hanna (2000) ise ispatın işlevlerini 8 maddede sıralamıştır. Doğrulama, açıklama, sistemleştirme, keşfetme, iletişim işlevlerinin yanı sıra bir deneysel teorinin inşasını sağlamada, bir tanımın veya bir sonucun sağlam zeminlerle açıklanmasında ve yeni bir bakış açısıyla iyi bilinen gerçeklerin farklı bir çerçevede kaynaştırılmasında da ispatın etkili olduğunu ifade etmiştir.

Hanna ve Jahnke'ye (1996) göre matematiğin temel özelliği olan ispatın matematik eğitiminde deanahtar bileşen olması gerekmektedir. Derslerde neden ispat anlatılması gerektiği veya öğrencilerden ispatlama etkinliklerine neden katılması istendiği soruları da pek çok yanıtla literatürde yer bulmaya devam etmektedir. Örneğin, bir öğretmen ispatı, öğrencilerini ikna etmek (Weber, 2002; Yopp, 2011), onlara ispatlamadaki fikirleri ve teknikleri öğretmek (Weber, 2002; Hanna ve Barbeau, 2008; Yopp, 2011; Weber, 2012; Cilli-Turner, 2017); diğer teoremleri ispatlamada faydalı olabilecek yaklaşımları (ispat yöntemlerini) örneklemek (Lew, Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos, ve Weber, 2016); matematiğin yapısını göstermek (Cilli-Turner, 2017; Yopp, 2011); öğrencinin (teoremi veya konuyu) anlamasını arttırmak (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Yopp, 2011; Weber, 2012); öğrencilerin matematikçilerinkine benzer şekilde muhakeme deneyimi yaşamalarını sağlamak (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, veWinicki-Landman, 2011); bazı önemli(tarihsel veya kültürel) ispatları tanıtmak (örn.,$\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin ispatı ve Analizin temel teoreminin ispatı)(Weber, 2012); bazı matematiksel ve genel düşünme becerilerini (örn., problem çözme becerisi, eleştirel düşünme becerisi) onlara kazandırmak (Knuth, 2002; Hemmi, 2010; Yopp, 2011); ispatlama sürecinin nasıl olduğunu ve ispatın nasıl oluşturulabileceğini göstermek (Weber; 2010; Yopp, 2011); matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlamak (Yopp, 2011); aksiyomatik bir yapının veya bir tanımın kullanımını göstermek (Weber, 2002); ve öğrencileri etkilemek (Yopp, 2011) için sunabilir.

Uluslararası matematik eğitimi toplulukları da düzenledikleri organizasyonlarla ispatın matematik eğitimindeki öneminin altını çizmektedir. Günümüzde matematik eğitimi alanında sadece ispat ve ispatlamayı konu edinen uluslararası bilimsel organizasyonların düzenlenmesi (örn., 2009 yılında Uluslararası Matematik Eğitimi Komisyonu (International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]) tarafından düzenlenen "Matematik eğitiminde ispat ve ispatlama" konulu ICMI 19 konferansı), veya uluslararası matematik eğitimi konferanslarında (International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME), Congress of European Research in Mathematics Education (CERME), International Congress on

Mathematical Education (ICME)) ispat ve ispatlama ile ilgili özel çalışma gruplarının ve oturumların oluşturulması matematik eğitiminde ispatın önemine vurgu yapan göstergelerdendir.

Üniversitede ispat ve ispatlama çalışmaları çoğunlukla öğrenci perspektifinden ele alınmıştır. Öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesi (örn., Demiray ve Işıksal Bostan, 2017; Stylianou, Blanton ve Rotou, 2015; Zazkis, Weber ve Mejia-Ramos, 2016; Zhen, Weber ve Mejia-Ramos, 2016) literatürde en sık yer bulan konulardan biridir. Bununla birlikte lisans düzeyinde derslerde ispatın öğretmen boyutu ile ilgili çalışmalar henüz büyümekte olan bir araştırma alanıdır. Üniversite düzeyinde ispatlama aktivitelerini öğretmen boyutuyla ele alan çalışmalardaaz da olsa öğretim elemanlarının derslerinde ispatlama etkinliklerindeki uygulamalarını gözlem verileriyle destekleyen çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalar öğretim elemanlarının ispat anlatım stillerini (örn., Weber, 2004), ispat anlatırken örnek kullanımlarını (örn., Mills, 2014), öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirmek için kullandıkları yöntemleri (örn., Blanton ve Stylianou, 2003; Pinto ve Karsenty, 2017), ispatlama esnasında yansıttıkları argümantasyon yapılarını (örn., Fukawa-Connelly, 2014) ve ispat anlatımında jestlerini kullanımlarını (örn., Weinberg, Fukawa-Connelly ve Wiesner, 2015) içermektedir. Bunun yanı sıra, derste ispat anlatımına yönelik öğretim elemanlarının mülakat yoluyla elde edilen görüşlerine yönelik çalışmalar da mevcuttur (örn., Hemmi, 2010; Yopp, 2011; Weber, 2012; Bleiler, Thompson, ve Krajčevski, 2014; Lai ve Weber, 2014).

Hemmi (2010) çalışmasında13 matematikçi ile yaptığı mülakatlarda onların ispatı derste nasıl anlattıklarına yönelik pedagojik bakış açılarını ortaya çıkarmayıamaçlamıştır. Çalışmasında bu bakış açılarını yenilikçi, tümdengelimli ve klasik stil olmak üzere üç kategori altında toplamıştır. Öğretim elemanlarının ifadelerinin sınıflandırılmasında ispata yüklenen anlam, tümevarım/tümdengelim, sezgi/formellik ve görünürlük/görünmezlik bakış açılarını kullanmıştır. Benzer şekilde Yopp (2011), 14 öğretim elemanı ile yürüttüğü çalışmada derste ispatın rollerine ve amaçlarına yönelik görüşlerini incelemiş ve bu görüşleri 3 tema altında toplamıştır. İçerik amaçları öğrencilerin matematikle ilgili bilgileri, anlayışları, yetenekleri, tutumları ve inançlarını geliştirmek için ispat ve ispatlamayı içeren planları kapsamaktadır. Örneğin, ispatın nasıl oluşturulacağını öğretme amacı bu kapsam altında ele alınmıştır. Değerlendirme amaçları ise öğrencilerin, bilgileri, anlayışları, yetenekleri, tutumları ve inançlarını ölçmek için ispat ve ispatlamayı içeren planları içermektedir.Son olarak da,geleneksel matematiksel kapsamı ve pedagojik sonuçları hedef almayan sonuçlar için ispat ve ispatlama içeren planlar/eylemleri ise yardımcı amaçlar olarak adlandırmıştır. Örneğin, eleştirel düşünmeyi öğretme amacı bu tema altında ele alınmıştır.Weber (2012) ise 9 matematikçi ile derste ispat yaparken öğretimsel uygulamaları üzerine mülakat gerçekleştirmiştir. İspatları neden yaptıklarına yönelik sonuçlarda ise katılımcıların ispatları, öğrencileri teoremin doğruluğuna ikna etmekten ziyade anlamayı sağlama ve yöntemleri göstermek için anlattıklarını belirtmiştir.

Literatürde ispatlama içeren sınıf etkinlikleri, "*ispat öğretimi*" (teaching proof) (Weber, 2004; Alcock ve Inglis, 2008), "*ispat sunumu/anlatımı*" (proof presentation) (Fukawa-Connelly, 2012; Lai ve Weber, 2014), "*ispat yapma*" (doing proof) (Herbst ve Brach, 2006; Yopp, 2011; Dimmel ve Herbst, 2018) gibi çeşitli ifadelerle tanımlanmıştır. Dimmel ve Herbst (2018) "ispat yapma" ifadesinin matematik disiplinindeki ispatlama etkinliği anlamında kullanılmadığını ve bu ifadenin öğrencilere matematiksel ispat kavramının tanıtıldığı öğretimsel bir durum olduğunu belirtmiştir. Ülkemizde de bir öğretmenin derste bir teoremin ispatını anlatması genellikle "ispat yapma" olarak ifade edilmektedir. Bu bağlamda, bu kavram bu çalışmada derste öğretimsel bir durum olarak öğretim elemanlarının kullandığı biçimde yer almaktadır.

Bills ve Tall (1998) da öğrencilerin kavram imajlarını dersteki ispat anlatımları yoluyla geliştirme fırsatlarının olabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerin ispatla yakın ilişki kurması öğretmeninin öğretimsel kararlarına göre farklılık göstermektedir (Sears ve Chavez, 2014). Ayrıca şu unutulmamalıdır ki öğrenciler derste sunulan ispatları ödevlerde ve sınavlarda yazdıkları ispatlar için model olarak kullanmaktadırlar (Fukawa-Connelly, 2014). Bu bağlamda, onların gözünde matematik disiplininin temsilcileri olan öğretim elemanlarının uygulamalarını anlamak, öğrencilerin matematiksel düşünme ve aktivitelerinde daha başarılı ve üretken olmak için neler yapabileceklerini anlamamızı sağlaması açısından faydalıdır (Lynch ve Lockwood, 2018). Speer ve arkadaşları (2010) da lisans matematik eğitimi ile ilgili hem öğretim elemanının öğretiminin gözlendiği hem de öğretim elemanıyla niyetleri ile ilgili açıklamalarda bulundukları mülakat çalışmalarının azlığından da bahsederek mevcut öğretim uygulamalarına yönelik çalışmalar için çağrı yapmıştır.

Öğretmenlerin mevcut uygulamaları ve görüşleri onların değer verdikleri ve ihtiyaç duydukları alanların belirlenmesine katkı sağlayacaktır (Lai ve Weber, 2014). Weber (2012) öğretim elemanlarının pedagojik amaçlarını ve uygulamalarını anlamanın pedagojik tavsiyelerin yayılması için önemli olduğunu fakat buna rağmen bu alanda yapılan çalışmaların az olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde, Fukawa-Connelly (2014) matematiği öğretenlerin inançları ve uygulamalarını anlamanın, matematik eğitimini geliştirmeye yönelik reform çabalarını başarmak için önemli olduğunu belirtmiştir. Tüm bu araştırmalar doğrultusunda bu çalışma üniversite düzeyinde ispat öğretiminin amacına odaklanmıştır. Yani bu çalışmada öğretim elemanlarının derste ispatları hangi pedagojik gerekçelerle anlattıklarının ve ispatın bu derslerdeki öneminin öğretmen adayları yetiştiren öğretim elemanlarının açıklamalarıyla aydınlatılması amaçlanmıştır. Literatürde öğretim elemanlarının ispata ve öğretimine yönelik inançlarını ve değerlerini araştıran mülakat çalışmaları mevcuttur (örn., Hemmi, 2010; Yopp, 2011; Weber, 2012). Ancak bu çalışma öğretim elemanlarının ilk mülakatta ifade ettiği görüşlerin analizinden sonra kendilerinin ve diğer tüm öğretim elemanlarının görüşlerini kendilerince önem düzeyine göre sıralamalarına fırsat verecek şekilde dizayn edilmiştir. Bu uygulama ile geleceğin öğretmenlerine rol model olan öğretim elemanlarının matematik eğitiminde ispatın gerekliliğine yönelik görüşlerinin ve önerilerinin vurgulanması sağlanabilir. Ve bu açıdan bu çalışmanın literatürdeki çalışmalardan farklı olduğu düşünülmektedir. Bu bağlamda, ispatın önemine ilişkin hem görüşleri hem de öğretim elemanlarının bu görüşlerin önem düzeylerine yönelik sıralamalarını içermesi bakımından bu çalışmanın, matematik eğitiminde ispat ve ispatlama literatürünekatkıda bulunabileceği söylenebilir.Özetle bu çalışmada öğretim elemanlarının ispatın önemine ve derste veriliş nedenlerine yönelik görüşleri incelenecektir. Bu bağlamda bu çalışmanın problem cümlesi şu şekildedir:

"*Öğretim elemanlarının matematik derslerinde ispatın önemi hakkında görüşleri nelerdir?"*

YÖNTEM

Matematik eğitimi bölümünde görev yapmakta olan öğretim elemanlarının ispat anlatım amaçlarının belirlenmesi amacıyla nitel araştırma yöntemlerinden gömülü teori (kuram oluşturma) kullanılmıştır. Gömülü teori, Glaser ve Strauss'un (1967) sağlık bilimleri alanında yaptığı çalışmalardan ortaya çıkan, bir yığın veriden tümevarım ve tümdengelim yöntemleriyle bir teori geliştirmeyi ifade eden nitel araştırma tekniğidir.

2.1. Katılımcılar

Bu çalışma, öğretim elemanlarının ispat anlatım yapılarının hem mülakat hem de ders video gözlemleriyle incelendiği daha büyük bir çalışmanın bir parçasıdır. Bu çalışmada katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ve kolay ulaşılabilir örneklem yöntemleri birlikte kullanılarak belirlenmiştir. Bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde ilköğretim veya ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde çeşitli matematik dersleri veren 7 öğretim elemanı (3 kadın, 4 erkek) ile gerçekleştirilmiştir.Etik kurallar gereği katılımcıların kimlik bilgilerini gizli tutmak amacıyla, tüm katılımcılar dersleriyle alakalı bir takma ad ile anılmıştır. Öğretim elemanları kullanılan takma ad konusunda bilgilendirilmiş ve onayları alınmıştır. Tablo 1 öğretim elemanlarına yönelik bilgileri içermektedir.

Bu çalışmadaki katılımcıların hepsi deneyimli ve alanlarında başarılı öğretim elemanlarıdır. Dr. Kompleks ve Dr. Vektör matematik bölümünde doktoraya sahiptir. Diğer öğretim elemanlarının doktorası ise matematik eğitimi üzerinedir.Bu çalışmanın amacı bir uygulama topluluğundaki öğretim elemanları arasında fikirlerin çeşitliliğini incelemektir. Bu sonuçlar diğer bölümlere ya da üniversitelere genellenemez. Ancak bu tür bir verinin, zengin olması ve konuyu farklı perspektiflerden aydınlatması bakımından güçlü olduğu söylenebilir.

Tablo 1.Öğretim Elemanlarının Anabilim Dalları, Pozisyonları, Öğretim Deneyimleri

Katılımcılar	**Anabilim Dalı**	**Unvan**	**Verdikleri dersler**
Dr. Kompleks	OMT*	Profesör	Kompleks Analiz (30 yıl), Analiz III-IV (20 yıl), Soyut Matematik (3 yıl), Reel Analiz (10 yıl), Diferansiyel Denklemler (5 yıl), Genel matematik (5 yıl), Fonksiyonel Analiz (15 yıl)
Dr. Vektör	İMT**	Profesör	Analiz I-II (15 yıl), Analitik Geometri (6 yıl), Diferansiyel Denklemler (11 yıl), Diferansiyel Geometri (3 yıl), Genel Matematik (9 yıl)
Dr. Soyut	İMT	Profesör	Soyut Matematik (10 yıl), Mantık (10 yıl), Cebire Giriş (10 yıl), Sayılar Kuramı (8 yıl), Lineer Cebir (4 yıl), Topoloji (2 yıl)
Dr. Türev	OMT	Profesör	Analiz I-II (15 yıl)
Dr. Öklid	OMT	Uzm. Öğr. Üyesi	Geometri (2 yıl), Nümerik Analiz (10 yıl),
Dr. Uzay	OMT	Uzm. Öğr. Üyesi	Analiz (15 yıl), Soyut Matematik (5 yıl), Mantık (5 yıl), Geometri (14 yıl), Lineer Cebir (4 yıl), Diferansiyel Denklemler (4 yıl), Diferansiyel Geometri (4 yıl), Nümerik Analiz (4 yıl), Analitik Geometri (4 yıl), Analitik Geometri (14 yıl), Genel Matematik (15 yıl)
Dr. Topoloji	OMT	Öğretim Görevlisi	Topoloji (14 yıl), Analiz (14 yıl), Lineer Cebir (2 yıl), Diferansiyel Denklemler (11 yıl), İstatistik (9 yıl), Genel Matematik (14 yıl), Analitik Geometri (3 yıl)

* OrtaöğretimMatematikEğitimi   **İlköğretimMatematikEğitimi

2.2. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarına ispat temelli dersler veren 7 öğretim elemanı ile ispatın öğretimine yönelik yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır.“Mülakatlar kişilerin deneyimleri, fikirleri, duyguları ve bilgileri ile ilgili doğrudan alıntılar yapılabilmesine olanak sağlaması” (Patton, 2014, s. 4) nedeniyle tercih edilmiştir. İlk mülakatta öğretim elemanlarının ispat anlatımlarına yönelik 20 soru sorulmuştur fakat bu çalışma kapsamında yalnızca “*Matematik derslerinde ispatın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Yani derslerde neden ispat yapmalıyız?*” sorusuna yönelik bulgular paylaşılacaktır.İkinci mülakatta ise öğretim elemanların tüm katılımcılar tarafından belirtilen görüşleri sıralamalarına olanak sağlayan bir anket uygulanmıştır.

Birinci mülakat analizinden elde edilen veriler ile oluşturulan sıralama anketi bu görüşlerin önem düzeyine yöneliktir. İlk mülakatta elde edilen tüm kategoriler, cümleler anlam kaybına uğramayacak şekilde ankete uyarlanmıştır. Sıralama anketi iki amaçla oluşturulmuştur. Birincisi öğretim elemanlarının mülakat esnasında bilerek veya unutarak beyan etmediği ifadelere katılıp katılmadığını, bu görüşleri de önemli bulup bulmadığını görmektir. İkincisi ise kendisinin veya bir başka öğretim elemanının beyan ettiği ifadelerden hangilerini daha önemli bulduğunu ortaya çıkarmaktır.

2.3. Analiz

Mülakatların transkriptleri yapıldıktan sonra gömülü teori kullanılarak katılımcıların ifadeleri gruplandırılmıştır. Sürekli karşılaştırmalı yöntem (Corbinve Strauss, 2008) ile kategoriler ve temalar oluşturulmuştur. Glaser ve Strauss (1967) gömülü teorinin verilerin sürekli karşılaştırılarak, aralarındaki ilişkiler (benzerlikler-farklılıklar) keşfedilerek kategorilerin oluşturulması ve bu kategorilerden de soyut teorinin elde edilmesi olduğunu belirtmiştir.

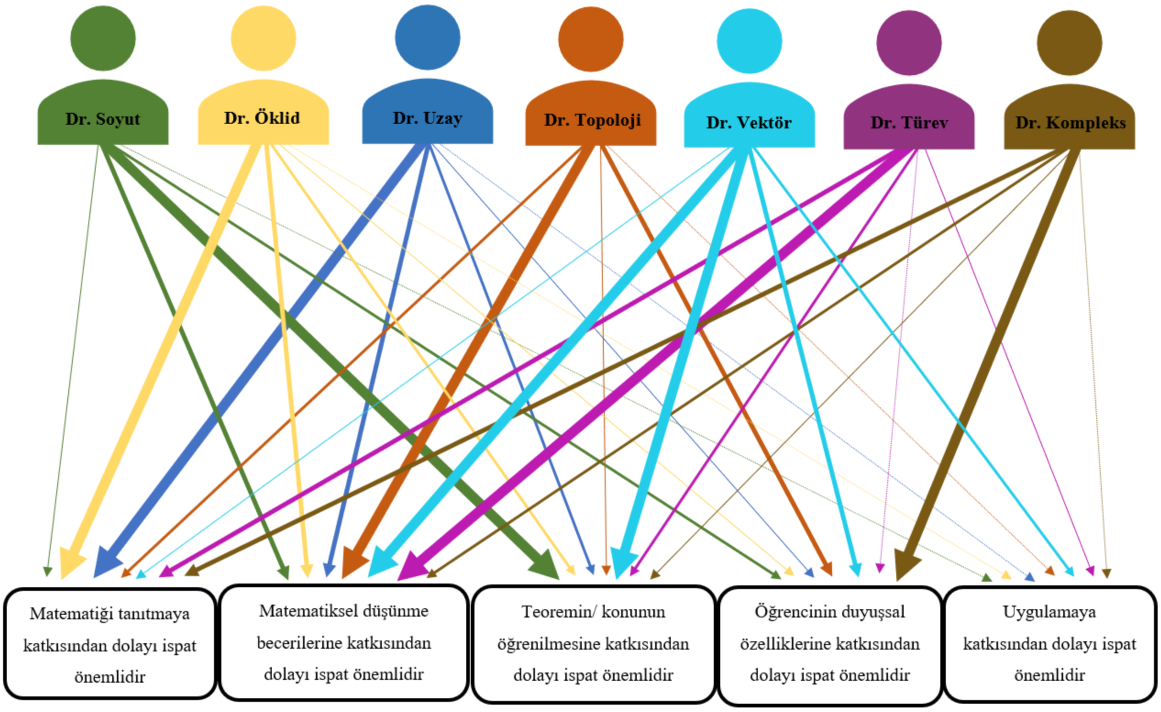
Teppo'ya (2015) göre, araştırmacı veriyi benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflamak için sürekli karşılaştırmayı kullanarak yapabildiği kadar çok olayı kodlar. Yeni tanımlanan her bir küçük parça daha önce kodlanmış olanlarla karşılaştırılır. Benzer olgulara aynı kod verilir. Benzer kodlar kategorileri oluşturmak için gruplanır. Katılımcıların yanıtları ilk olarak herbir bölüm tek bir fikrin tartışmasını içerek şekilde bölümlere ayrılmıştır. Genel olarak, bir fikir/görüş, ispatın önemli olma nedeni ya da derste ispat yapma nedeni içermektedir. Benzer bölümler gruplanmış ve başlangıçkodları verilmiştir. Yeni bölümler mevcut uygun kategorilere yerleştirilmiştir.Gerekli görüldüğü takdirde mevcut kategorinin ismi ve tanımı da modifiye edilmiştir veya yeni kategoriler oluşturulmuştur.Oluşturulan kategoriler literatürde var olanlar ile karşılaştırılmış ve mevcut bir görüşe benziyorsa o ifade ile yazılmıştır.

Verideki temalar veya kategoriler belirlendikten sonra bir kodlama şeması geliştirilmiştir. Bu kodlama şemasının güvenirliğini kontrol etmek amacıyla ikinci bir araştırmacı ifadeleri kodlamıştır. Bu araştırmacıya bu kodlama şeması ve rastgele sıralanmış katılımcı ifadeleri verilerek ifadeleri kategorilere ataması istenmiştir. Yazar ve ikinci araştırmacı bu kodlarda %85 mutabık kalmışlardır. Mutabık olunmayan kodlar üzerinde yazar ve araştırmacı birlikte çalışarak sınıflama ve kodlama şeması tamamlanmıştır. Örneğin, matematiği tanıtmaya katkı teması altında ispatın 'matematiğin formel yönünü gösterdiği' görüşü öncelikle ayrı bir kategori olarak ele alınmışken yazar ve araştırmacının benzer bir anlam içerdikleri yönünde ortak kararı ile bu kategori 'matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığı' kategorisi ile birleştirilmiştir. Sonuç olarak,toplam 25 kategori oluşmuştur ve oluşan kategoriler 5 tema altında toplanmıştır.

BULGULAR

Bu bölümde, öğretim elemanlarının "*Matematik derslerinde ispatın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Yani derslerde neden ispat yapmalıyız?*" sorusuna verdikleri yanıtlar ve bu yanıtları nasıl sıraladıkları (sıralama anketi) ile ilgili bulgular sunulacaktır.

Mülakatta ispatın önemine yönelik görüşlerin analizi sonucunda toplam 25kategori oluşmuştur. Bu yanıtlar 5 tema altında toplanmıştır.Öğretim elemanlarının ifadeleri ve temalar Tablo 2 de verilmiştir.İkinci mülakatta, öğretim elemanlarından Tablo 2 de verilen temaları önem sırasına göre sıralamaları ve her temadan en fazla üçer tane kategoriyi seçmeleri istenmiştir. Seçimlerin üçer taneyle sınırlandırılmasının nedeni en önemli gördükleri görüşlerin belirlenmesini sağlamaktadır.Temalar altında bulunan görüşlerin sayısının fazla olması nedeniyle bu görüşlerin sıralanması talep edilmemiştir. Ayrıca bazı öğretim elemanlarının temalar altında üçten fazla görüş seçtikleri görülmektedir. Bu öğretim elemanları önemli buldukları görüşler arasında seçim yapmakta zorlandıklarını o yüzden üçten fazla görüşü işaretlediklerini belirtmişlerdir.Benzer şekilde, bazı öğretim elemanlarının da bazı temalar altında yalnıca iki seçim yaptığı görülmektedir. Şekil 1, öğretim elemanlarının temaları önem sırasına göre nasıl sıraladıklarını göstermektedir.Şekildeki okların kalınlığı belirtilen önem düzeyine göre artmaktadır. Bu temalardaki görüşlerden hangilerinin seçildiği yine Tablo 2 de verilmiştir. Öğretim elemanları sıralama yaparken, aynı önem düzeyinde gördükleri temalara aynı numaraları verme konusunda özgür bırakılmıştır. Sonuç olarak, yalnızca Dr. Vektör'ün iki temayı birlikte birinci sırada seçtiği gözlenmiştir. Dr. Vektör'ün bunun haricinde diğer seçimlerinde ve diğer öğretim elemanlarının sıralamalarında aynı önem düzeyinde görülen temaların olmadığı görülmüştür.



Şekil 1.Öğretim Elemanlarının İspatın Önemine Yönelik Temaları Önem Düzeyine Göre Sıralamaları

Tablo 2. Matematik Derslerinde İspatın Önemine Yönelik Görüşler

Tema	**İfadeler**	***Dr. Kompleks***	***Dr. Vektör***	***Dr. Türev***	***Dr. Soyut***	***Dr. Öklid***	***Dr. Topoloji***	***Dr. Uzay***
Matematiği tanıtmaya katkısı	*Matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağlar.*	X	X	X*	X	X*	X	X
	Matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlar.	X*	X	X	X	X*	X	X*
Matematiksel düşünme becerilerine katkısı	*Analitik düşünme becerisi sağlar.*	X	X	X			X*	X
	Problem çözme becerisini geliştirir.		X		X	X	X*	X
	Sorgulayıcı düşünmeyi sağlar.	X					X*	X
	Düşünme yolunu öğretir.		X	X		X	*	X
	Günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi sağlar.		X				*	X
	Öğrenciye farklı bakış açısı sağlar.	X				X*	X*	
	Soyut düşünmeyi arttırır.		X*		X			X
	Uzamsal düşünmeyi arttırır.		*					
	Matematikçilerinkine benzer şekilde muhakeme deneyimi yaşamalarını sağlar		*	X	X		*	

Teoremin / konunun öğrenilmesine katkısı	*Teoremi daha iyi anlamayı sağlar*		X*		*		X	
	Konuya hakimiyeti arttırır.	X	X*	X	*			
	Daha kalıcı öğrenme sağlar.	X	X*		X*	X	X	X
	Neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlar	X*		X*	X*	*	X	X
	Bir sonraki düşüncenin/konunun temelini oluşturur.			X*		X		X
	Tanımları, teoremleri, aksiyomları tümdengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlar.	X			X*	X	X	X
	İspat tekniklerinin gösterilmesini/ öğrenilmesini sağlar.		*					
Duyuşsal özelliklere katkısı	*Öğrenciye güven verir.*		X*	X	X	X	X	X
	Duyuşsal olarak matematiksel haz sağlar	X		X	X	X	X*	X
	Bir şeyin nedenini bilmek heyecan vericidir.	X*		X	X	X	X	X
	İspat olmazsa ezber olur, o da sıkıcıdır.	X*	X					
Uygulamaya katkısı	*Bir problem durumunda koşulları doğru değerlendirmeyi sağlar.*	X	X	X	X	X	X*	X
	Uygulama yapabilmelerini sağlar.	X	X	*		*		X
	Uygulama sorularının temelini gösterir.			X*	X	X	X	X

(*→ ilk mülakatta verilen yanıtlar, X→sıralama anketinde seçilenler)

Tablo 2 de (*) işareti öğretim elemanlarından hangilerininilk mülakatta bu kategorideki görüşleri ifade ettiğini, (X) işareti ise bu mülakat analizinden elde edilen sıralama anketinde hangi öğretim elemanının hangi görüşleri seçtiğini göstermektedir. Örneğin, ispatın "*matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığı"* görüşü ilk mülakatta yalnızca Dr. Öklid ve Dr. Türev tarafından söylenmiştir. Sıralama anketinde ise tüm öğretim elemanlarının bu ifadeyi seçtiği görülmektedir. Yine örnek olarak "*Teoremi daha iyi anlamayı sağladığı"* görüşü ilk mülakatta Dr. Vektör ve Dr. Soyut tarafından söylenmiştir. Bununla birlikte sıralama anketinde Dr. Soyut'un bu ifadeyi seçmediği, Dr. Vektör ve Dr. Topoloji'nin seçtiği görülmektedir.

Tablo 2'deki tüm görüşler ilk mülakatta öğretim elemanları tarafından ispatın matematik derslerinde önemli olduğuna delil olarak sunulmuş görüşler olduğundan bir kategorinin öğretim elemanları tarafından seçilmemiş olması önemsiz olduğu anlamına gelmemektedir. Öğretim elemanları tüm görüşler içerisinden daha önemli buldukları görüşleri işaretlediklerinden, burada yalnızca, işaretlenen görüşlerin diğer görüşlere göre daha önemli görüldüğünden söz edilebilir.

Temalar, başlıklar halinde aşağıda incelenmiş, temalar içindeki kategoriler de sıralama anketi sonuçlarıyla birlikte bu başlıklar altında ele alınmıştır.

3.1. İspatlar, öğrencilere matematiği tanıtmaya katkısından dolayı önemlidir.

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini matematik disiplini ile ilişkilendiren ifadeler "Matematiği tanıtmaya katkı" teması altında gruplandırılmıştır. Bu temadaki yanıtlarda ispatın matematik yapmanın bir gereği olması sebebiyle önemli görüldüğü söylenebilir. Şekil 1'de,sıralama anketi sonuçlarında, "Matematiği tanıtmaya katkısı" temasının Dr. Öklid ve Dr. Uzay tarafından ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği görülmüştür. Dr. Türev'in seçimlerinde ise bu tema ikinci sırada yer almaktadır. Dr. Topoloji, Dr. Soyut ve Dr. Vektör'ün ilk mülakatta bu kategoriye yönelik bir açıklaması olmadığı görülmektedir. Bu duruma paralel olarak, Dr. Topoloji bu temayı üçüncü sırada tercih ederken, Dr. Soyut ve Dr. Vektör 4. sırada önemli olarak görmüşlerdir (bkz. Şekil 1).

Dr. Öklid, öğrencilerin matematiğin aksiyomatik yapısını anlamakta zorluk çektiklerini ve bunun ispatın gösterilmesiyle aşılabileceğini vurgulayarak ispatın matematiğin doğasında olduğunu belirtmiştir:

"Mesela iç ters açılar denildiğinde iç ters açının hep paralel doğrularda olduğu düşüncesi var. Ama yanlış! Böyle temel şeylerin bilinmediği... bu konuda da eksikliklerle ilerlendiğini düşündüğüm için burada matematiğin aksiyomatik yapısını anlamada zorluk çekiyor öğrenciler ya da anlayamıyorlar. Anlamaları için bence ispatın gösterilmesi, yapılması gerekiyor. Onun için önemli."

Dr. Öklid'in *aksiyomatik yapı* ifadesiyle bir kuramın ispatı için gerekli bulunan aksiyomları kastettiğisöylenebilir. Yani öğrencilerin bazı konuların temelini oluşturan bu yapılardan habersiz olmamaları için ispatların yapılması gerektiğini belirtmiştir. Benzer şekilde, ispatların matematiğin formel yönünü temsil etmesi açısından derste yapılması gerektiğini belirten Dr. Türev görüşünü şu şekilde açıklamıştır:

"Bir diğer yön öğrencilere daha formel bir..matematiğin farklı bir yönünü gösteriyoruz. Onlar için çünkü çok zor bir yön. İntegraller için ortalama değer teoremini ispatlamak onlar için zor olabiliyor ama onunla ilgili soruları çözebiliyorlar."

Burada Dr. Türev'in yaptığı açıklamayla, matematiğin formel yönü ifadesini bir iddianın/formülün uygulamasından ziyade, o iddianın/formülün temelini gösteren yönü anlamında kullandığı görülmektedir. Bu yönüyle Dr. Öklid'in bahsettiği aksiyomatik yapıyıkastettiğidüşünüldüğünden Dr. Türev'in bu ifadesi "matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağlar" kategorisi altında değerlendirilmiştir.Tablo 2'de sıralama anketinde temalar altında seçilen ifadelere bakıldığında, tüm öğretim elemanlarının derste ispat yapılmasının, matematiğin aksiyomatik yapısını anlamayı sağladığına inandıkları görülmektedir.

Dr. Uzay ve Dr. Kompleks iseispatın matematik disiplininin bir parçası olması nedeniyle önemli olduğunu belirtmişlerdir. Dr. Kompleks:

"Aslında ispatsız matematik olmaz diye düşünüyorum. İspat da işin içinde olmalı yani bence matematik yapıyorsak ispat olmalı."

Benzer şekilde,Dr. Uzay da matematiğin ispatlardan oluştuğunu belirtmiş ve matematikte teoremlerin önemine vurgu yaparak ispatın önemine değinmiştir:

"Matematik ispattan oluşuyor yani. Bunun sıralaması çok açıktır. Yani tanımsız kavramlar, tanımlı kavramlar, aksiyomlar, arkasından teoremler gelir yani bütün bu üçünü teoremleri ispatlamak için yapıyoruz. Matematiği teoremsiz gerçekleştiremiyoruz yani."

Dr. Öklid ispatın bir disiplin olarak matematiğin doğasında olduğundan söz etmiştir.

"Bir kere matematiğin kendi doğasında bu (ispat) var. Bu olmazsa olmazlardan birisi…

Dr. Kompleks, Dr. Uzay ve Dr. Öklid'in bu ifadeleri ile matematiğin ispat içeren bir disiplin olmasına vurgu yaptıkları görülmektedir. Derste ispat yapma nedenleri arasında gösterdikleri bu yöndeki açıklamalar önce "ispat, matemağin doğasında var" kategorisi altında ele alınmıştır. Ancak bu açıklamalarınliteratürde yer alan "ispat, matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlar" (Yopp, 2011) ifadesiyle benzediği ve öğrencilere matematiğin ispat içeren bir disiplin olduğunu gösterme amacıiçerdiği düşünüldüğünden bu kategori altında değerlendirilmiştir. Tablo 2'de, sıralama anketinde bu tema altındaki bu kategorinin de önemli olarak işaretlendiği görülmüştür.

3.2. İspat, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine katkısı nedeniyle önemlidir.

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini öğrencilerin düşünme becerileri ile ilişkilendiren ifadeler "Öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine katkı" teması altında gruplandırılmıştır. Bu kategorinin Dr. Topoloji, Dr. Vektör ve Dr. Öklid'in yanıtlarıyla oluştuğu söylenebilir. Sıralama anketinde, bu temanın Dr. Topoloji, Dr. Vektör ve Dr. Türev tarafından ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği görülmüştür (bkz. Şekil 1). Dr. Kompleks haricinde diğer tüm öğretim elemanlarının seçimlerinde ise bu tema ikinci sırada yer almaktadır. Sonuç olarak, ispatın öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine katkısı bakımından tüm öğretim elemanlarınca oldukça önemli kabul edildiği söylenebilir.

Dr. Topoloji'ninispatın önemini,ispatın öğrencilerin düşünme becerilerine katkısı ile ispatın uygulamaya yönelik katkısını harmanlayarak ele aldığı söylenebilir:

"Bana kalırsa ispat düşünme yolunu öğretiyor insanlara. Günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi sağlıyor yani gelecekteki yaşantıları içerisinde günlük yaşam problemleri olsun ya da kendi mesleklerine dair problemleri olsun, bu problemleri çözebilmek için belli bir düşünce mantığına matematiksel düşünme metoduna sahip olmak lazım. Verileri, koşulları doğru değerlendirip bunun üzerine çözüm yollarını kurmak gerekiyor. Bu da ispat yoluyla oldukça edinilebilir diye düşünüyorum. Dolayısıyla analitik düşünme becerisini sağlıyor yani bu altı çizilir bir şey. Dediğim gibi problem çözme becerisini geliştiriyor. Yani sadece sayılarla işlem yapmak değildir problem çözmek. Dolayısıyla Polya'nın (problem çözme) adımlarını düşünecek olursak ispat yaparken bu adımları kullanıyoruz. Daha geniş düşünme, neden-niçin sorgulama şansı veriyor bize. Sürekli yani biz matematikçiler mesela herhangi bir yerde bir şey konuşulduğu zaman neden diye sorarız yani bu şeyi bize sağlıyor. Sorgulayıcı düşünmeyi sağlıyor."

Dr. Topoloji'nin, sebep sonuç ilişkileriyle birbirine bağladığı çeşitli temaları da içeren faydalar içesinde öğrencilerin düşünme süreçlerine yönelik Tablo 2 de bu tema altında verilen ilk beş kategorinin oluşumunu sağladığı görülmektedir. Özetle, ispat yaparken problem çözme adımlarının da kullanıldığını, dolayısıyla bu beceriye katkı sağladığını, veri analizi gerektirdiğini ve bu analizin de analitik düşünmeyi geliştirdiğini, bir durumun nedenlerini incelerken sorgulayıcı düşünmeye de katkı sağladığını, tüm bu süreçlerle düşünme yollarını öğrettiğini ve günlük yaşama dair matematiksel düşünmeyi içerdiğini belirterek ispatın önemli olduğuna değinmiştir. Bu kategoriler içerisinden ilk mülakatta yalnızca Dr. Topoloji tarafından belirtilen "analitik düşünme becerisi sağlama", "problem çözme becerisini geliştirme" ve "düşünme yolunu öğretme" görüşlerinin sıralama anketinde bu tema altında en çok tercih edilen görüşler olduğu da Tablo 2 de görülmektedir.

Dr. Topoloji'nin açıklamalarında bir teorinin öğrenilmesinin yanı sıra yeni teoriler üretmek için gerekli olan farklı düşünme yollarına da vurgu yaptığı görülmektedir.

"Kendini geliştirerek yeni teoriler üretebilmede de önemli yani dediğim gibi sayısal bazı işlemler yapmak demek değildir matematik. Dolayısıyla teorileri doğru analiz edip ispatlar yapıp doğru sonuçlar çıkarabiliyorsak eğer yapılmışların üzerinden yavaş yavaş belli bir alt yapı edindikten sonra ufak tefek de olsa kendi teorilerimizi de üretebilir duruma geliriz. Veya aynı teoriyi farklı yollarla ispatlar hale geliriz. Bu matematikçiler için önemli. Farklı düşünce yollarını bize sağlar."

İspatın öğrenciye farklı bakış açısı sağlayabilecek olmasını Dr. Öklid de vurgulamıştır ve açıklaması yine bu kategori altında değerlendirilmiştir:

“Matematiksel düşünmeyi geliştirmek için önemli. Yani sadece ispat yapmış olmak için yapmıyoruz tabi ki. Öğrencinin bakış açısını geliştiriyor, farklı düşünmesine yardımcı oluyor.

Dr. Topoloji lisede ispat yapmaya çalışma deneyimlerinden yola çıkarak ünlü matematikçilere benzer şekilde muhakameyapma deneyimindenbahsetmiştir:

“Bunun yanında bir de duyuşsal olarak matematiksel bir haz sağlıyor bize bu çok önemli bence. Çünkü lisede, ki ben meslek lisesi mezunuyumdur matematiği bu kadar seviyor olmamın sebebi herhangi bir şekilde ufak tefek de olsa orada yapılan ispatlarda bir Pisagor ile ya da diğer teorisyenler ile aynı düşündüğüm hissini bende uyandırmıştır kendi yapabildiğim ispatlar sonra üniversite de benzer şeyler veya hocalarımızın yaptığı ispatın aynısını ezberlemek yerine sınavlar için acaba ben bu bilgilerimle bunu nasıl yapabilirim diye düşünüp işin içinden çıkabildiğiniz zaman bu size müthiş bir matematiksel haz verir. Siz de demek ki artık doğru yoldasınız anlamına gelir. Bu önemli bence matematikçiler için.”

Dr. Topoloji’nin bu açıklamasının literatürde yer alan “*Matematikçilerinkine benzer şekilde muhakeme deneyimi yaşamalarını sağlar”* (Zaslavsky ve diğerleri, 2011) ifadesini içerdiği düşünüldüğünden bu kategori altında değerlendirilmiştir.Bu ifadenin,öğretmenin derste ispatı yapmasından ziyade öğrencilerin bu deneyimi yaşamak bakımından ispat yapmaya çalışmalarını içerdiği söylenebilir.

Dr. Vektör ise ispat öğretimini hem kendi dersi hem de daha küçük yaş grupları için değerlendirerek iki durumda da ispat yapmanın öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirdiğini belirtmiştir:

“*…bir türevin maksimum minimumunu ifade eden bir fermat teoreminin ispatını ve mantığını öğrencinin anlaması lazım. Çünkü aslında onu verirken yerel maksimum ve minimumu da tekrar etmiş oluyorsun. Süreklilik konusunu tekrar etmiş oluyorsun.Dolayısıyla öğrencilerin ispat yapma yeteneği şu bakımdan önemli. Onların muhakeme gücünü geliştiriyor…Küçük yaşlarda yapılan ispatlar, öğrencilerin kesinlikle muhakeme gücünü geliştiriyor. Soyut düşünmelerini arttırıyor. Uzamsal düşünmelerini arttırıyor. O bakımdan derslerde ispatların yapılması önemli.”*

Dr. Vektör’ün bu ifadesi ile öğrencilerden beklediği muhakeme deneyimi için özellikle “matematikçilerinkine benzer” vurgusu yapmadığı görülmektedir. Bununla birlikte hem diğer kategorilere uymaması hem de bu kategorideki amacı de kapsayabileceği düşünüldüğünden bu kategori altında ele alınmıştır. Sıralama anketinde ise yalnızca Dr. Türev ve Dr. Soyut’un bu kategoriyi öncelikli bulduğu görülmektedir.

Dr. Vektör’ün bu açıklamasındaki “öğrencilerin ispat yapma yeteneği …” ifadesine açıklık getirmek amacıyla araştırmacı tarafından “öğretmenlerin anlatmasını mı öğrencilerin yapmasını mı” kastettiği sorulmuştur. Dr. Vektör’ün cevabı öğretmenin anlatması yönünde olmuştur.Tablo 2’ye göre derste ispat yapmanın soyut düşünmeyi arttırdığı görüşü ise Dr. Vektör’ün yanı sıra Dr. Uzay ve Dr. Soyut tarafından da diğer görüşlere göre daha önemli kabul edilmiştir. İspatın uzamsal düşünme becerisine katkısına yönelik görüşünüise hiçbir öğretim elemanının işaretlemediği görülmektedir.

3.3. İspatlar, teoremin veya ilgili konunun öğrenilmesine katkısı nedeniyle önemlidir.

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini ispatı yapılan teoremin veya ispatın bulunduğu ilgili konunun daha iyi öğrenilmesi ile ilişkilendiren ifadeler “Teoremin veya ilgili konunun öğrenilmesine katkı” teması altında gruplandırılmıştır.Sıralama anketinde, bu temanın oluşmasında büyük paya sahip olan Dr. Soyut ve Dr. Vektör tarafından ispatın matematik derslerinde anlatılmasına en önemli neden olarak kabul edildiği görülmüştür.

Diğer öğretim elemanları ise bu temayı 3. veya 4. sırada tercih etmişlerdir. Dr. Topoloji ve Dr. Uzay'ın bu temaya yönelik bir açıklaması bulunmadığı da söylenebilir.

Hem Dr. Vektör'ün hem de Dr. Soyut'un, ispatın, hem teoremi daha iyi anlamayı hem konuya hakimiyeti arttırdığını, hem de daha kalıcı öğrenme sağladığını düşündükleri söylenebilir.Dr. Vektör:

> *"Mesela ben şunu hissettim. Ne kadar fazla ispat yaparsan o kadar konuya hakim oluyor...İspatları anlayınca zaten konuyu yorumlamak da kolay oluyor. Örneğin, bu ortalama değer teoreminin içinde de var. Ortalama değer teoreminin ifadesi ne türevler için? Bir f fonksiyonu veriliyor. [a,b] aralığında sürekli, (a,b) türevli ise en az bir x ∈(a,b) için f'(x)=F(b)-F(a)/b-a. Şimdi burada ne diyoruz F(b)-F(a)/b-a ifadesi eğim diyoruz. Kirişin eğimi. f'(x) de türevin geometrik anlamından yine teğetin eğimi. Bunların eşit olması veya bunların paralel olması. Ya da ne diyoruz [A,B] kiriişine paralel en az bir teğet vardır. şimdi soruyu öyle sorduğum zaman "aaa bu soru ortalama değer teoremi.." diye öğrenci ne yapar hemen anladıysa yapıyor. Ama ifadeyi değiştirdiğin zaman anlayamıyor. Diyor ki bu kirişe paralel teğet var mıdır ne demek? O yüzden ispatı ve notasyonları iyi bilirse öğrenci konuya olan hakimiyeti güveni kesinlikle artıyor. Ben kendim de yaşadım bunu çünkü...Ezberleyince şimdi şöyle sıkıntı oluyor belki bu teoremi anlıyor ama birkaç hafta sonra sorduğumuz zaman bilemiyor. Mantığı da oluşmuyor kafasında. Ezberlediğin zaman da zaten kafa da çok fazla dolmuş oluyor. Şimdi bir sürü teorem olduğunu düşünelim. Hepsi ezbere kafanda durduğu zaman onların mantığını da anlamıyorsun. O yüzden ezberlemeden, mantığını anlamak hem öğrenmeyi kolaylaştırıyor hem de öğrencinin kendine olan güvenini arttırıyor. Özetle bir konudaki ispatların öğrenilmesi o konunun daha iyi öğrenilmesine ve pekiştirilmesine sebeptir. Bu yüzden ispatlar matematik derslerinde önemlidir.*

> "*...bir türevin maksimum minimumunu ifade eden bir fermat teoreminin ispatını ve mantığını öğrencinin anlaması lazım. Çünkü aslında onu verirken yerel maksimum ve minimumu da tekrar etmiş oluyorsun. Süreklilik konusunu tekrar etmiş oluyorsun."*

Teoremin ve konunun daha iyi anlaşılmasına ve kalıcı öğrenmeye vurgu yapan bir başka öğretim elemanı ise Dr. Soyut'tur. Dr. Soyut verdiği derslerin de ispatları gerektirdiğini belirtmiş ve ispatların neyin nereden geldiğini bilmeyi de sağladığına dikkat çekmiştir:

> *"İspatı yapmak ilgili teoremi de daha iyi anlamaya neden olabiliyor. "Özellikle matematik bölümünde neyin nereden geldiğini bilebilmek amaçlı ispat yapılabilmeli. İspatı bildiği zaman bir öğrenci belki de o teoremi daha iyi anlamlandırabiliyor. Unutmayabiliyor. Daha uzun süreli öğrenme sağlayabiliyor. Hatta bazen ispatlardan konuyu anladıkları oluyor diyebilirim."*

"Teoremi anlama" ve "konuya hakimiyet" kategorilerinin birbirine benzediği düşünülebilir. Ancak ilki yalnızca teoremin daha iyi anlaşılmasına vurgu yaparken ikincisi o ispatın bulunduğu ilgili konunun anlaşılması anlamına geldiğinden bu iki ifade ayrı kategoriler olarak değerlendirilmiştir. Sıralama anketinde, yalnızca Dr. Vektör ve Dr. Tooloji'nin teoremi daha iyi anlamayı sağladığı görüşünüönemli olarak seçtiğigörülmektedir (bkz. Tablo 2).İspatın konuya hakimiyeti arttırdığı görüşü ise Dr. Kompleks, Dr. Vektör ve Dr. Türev tarafından seçilmiştir.İspatın "teoremi daha iyi anlamayı sağlaması ve konuyu yorumlamayı kolaylaştırması ifadelerinin ispatın "açıklama" (Hanna, 1990) işlevine paralel olduğu da söylenebilir.Ancak teorem ve konu için ayrı ayrı yapılan vurgulamanın ifade edilmesi ve sıralama anketinde öğretim elemanları tarafından bu ayrımın seçimle vurgulanıp vurgulanmayacağı (açıklama ile neyin kastedildiğinin anlaşılması amacıyla)merak edildiğinden bu kategoriler yalnızca "açıklama" başlığı altında yazılmamıştır."Daha kalıcı öğrenme sağlaması" kategorisiise sıralama anketinde Dr. Türev haricinde tüm öğretim elemanları tarafından seçilmiştir ve bu tema altında en çok tercih edilen üç görüşten birini teşkil etmektedir.

Dr. Soyut'un yukarıdaki açıklamalarında ispatın teoremi ve konuyu anlamayı sağlamasında neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlamasının da payı olduğunu düşündüğü görülmektedir. Dr. Öklid ve Dr. Kompleks de anlatılanların neyin nereden geldiğini ve nasıl oluştuğunu öğrencinin bilmesi gerektiğini, bu nedenle de ispatın önemli olduğunu söylemişlerdir. Dr. Öklid: *"Ayrıca neyin nerden geldiğini nasıl oluştuğunu göstermek benim için önemli bir hal alıyor."* derken Dr. Kompleks: *"Öğrenci neyin nasıl olduğunu bilmeli. Dolayısıyla ezbere can sıkıcı olur."* demiştir."Neyin nereden geldiğini bilmenin" teoremi doğal olarak daha iyi anlamayı sağlayabileceği düşünülebilir. Ancak bu iki ifade ayrı olarak ele alınmıştır. Çünkü hem bu gerekçelerin ikisini birlikte ifade ederek bağlantı kuran sadece Dr. Soyut'tur hem de teoremin daha iyi anlaşılmasının başka yollarının da olabileceği söylenebilir.Sıralama anketinde bu ifade bu tema altında en çok tercih edilen görüşlerden biri olmuştur. Bu görüşü belirten dört öğretim elemanından üçü tarafından da seçildiği görülmektedir.Bunun yanı sıra Dr. Topoloji ve Dr. Uzay da bu kategoriyi seçmişlerdir.

Dr. Türev ise ispatların başka konulara temel olabileceğine değinmiştir. Bu ifadenin ispatın "keşfetme" (de Villiers, 1999) işlevi ile paralellik gösterdiği de söylenebilir:

"Aynı zamanda ben şunu düşünüyorum bir ispat bir sonraki düşüncenin de temelini atıyor. O yüzden ispatların önemli olduğunu düşünüyorum.

Dr. Soyut ispatın içinde tanımlar ve teoremler gibi bilgilerin bir araya getirilerek organize edildiğine değinmiştir:

"*İspat yaparken öğrenci bildiği tanımları ve teoremleri kullanabiliyor. Bunları mantıklı bir şekilde biraraya getirmesi gerekiyor"*

Dr. Soyut'un bu açıklamasının ispatın sistemleştirme fonksiyonuna işaret ettiği söylenebilir.Bu nedenle bu ifade "*Tanımları, teoremleri, aksiyomları tümdengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması"* (Bell, 1976) kategorisi altında değerlendirilmiştir. Bu ifadenin öğretim elemanlarından beşi tarafından seçildiği de Tablo 2 de görülmektedir.

İspat yapmanın "ispat tekniklerinin öğrenilmesine faydasının" ise hiçbir öğretim elemanı tarafından seçilmediği yani derste ispat yapmakla hedeflenen amaçlar içerisinde öncelikli olarak yer almadığı görülmektedir. Dr. Vektör bu görüşünü şu şekilde ifade etmiştir:

"Aynı zamanda ne kadar ispat görürse kendisinin ispat tekniğini de geliştirir. Çünkü bu iş tecrübedir. Mesela diyelim ki verdim şunun ispatı nedir? Neye bakacak. Tecrübe yani. Gördüğü ispatları düşünerek ona göre ispat yapacak. Bu mesela ispat yeteneğini de artırır..."

Tablo 2'ye bakıldığında, ispatın matematik derslerinde önemli olduğuna gösterilen en önemli nedenlerin "*daha kalıcı öğrenme sağlaması*", "*neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması* ve "*sistemleştirme yani tanımları teoremleri aksiyomları tümdengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması*" olduğu söylenebilir.

3.4. İspatlar, öğrencinin duyuşsal özelliklerine katkısı nedeniyle önemlidir.

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini güven, haz, heyecan, sıkılma vb. gibi duyuşsal özellikler ile ilişkilendiren ifadeler "Duyuşsal alana katkı" teması altında gruplandırılmıştır. Şekil 1 de sıralama anketi sonuçlarına göre, bu tema yalnızca Dr. Kompleks tarafından birinci sırada seçilmiştir. Dr. Vektör ve Dr. Topoloji'nin ise ikinci sırada tercih ettikleri görülmektedir.

Matematiksel düşünme becerilerine katkı teması altında "matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yapmalarını sağlaması" kategorisinde değerlendirilen Dr. Topoloji'nin açıklamaları, aynı zamanda yaşadığı duyuşsal hazza da vurgu yapması nedeniyle bu kategori altında da ele elınmıştır:

“Bunun yanında bir de duyuşsal olarak matematiksel bir haz sağlıyor bize bu çok önemli bence. Çünkü lisede…”

Dr. Topoloji bu vurgusuyla aslında girişte de bahsedilen ispatın “zihinsel meydan okuma” (de Villiers, 1999)işlevine de değindiği söylenebilir.Bu kategori Dr. Vektör haricinde diğer tüm öğretim elemanları tarafından işaretlenmiştir (bkz. Tablo 2).

Dr. Vektör bir önceki tema başlığı altında ele alınan ispatın konuya hakimiyeti arttırmasının sonucu olarak öğrencinin kendine güveninin de artacağını belirtmiştir. Öğrencinin güveninin nasıl artacağı sorulduğunda ise cevabını ayrıntılandırmıştır:

“Ne kadar fazla ispat yaparsak öğrencinin konuya olan hakimiyeti ve kendine olan güveni artar. Mesela ortalama değer teoreminin mantığını anladı o zaman “ben bunu iyi biliyorum, buna hakimim” havası yaratıyor çünkü ispatını öğrenmişim ben bunun uygulamasını mı yapamayacağım? Öğrencide öyle bir şey oluyor… İspatı ve notasyonları iyi bilirse öğrenci konuya olan hakimiyeti güveni kesinlikle artıyor. Ben kendim de yaşadım bunu çünkü.”

Sıralama anketi sonuçlarına göre, Dr. Kompleks haricinde diğer tüm öğretim elemanlarının, “ispatın öğrencinin güvenini arttıracağına” inandığı söylenebilir.

Dr. Kompleks ise yine bir önceki temada ele alınan öğrencilerin neyin nereden geldiğini bilmelerine yönelik gerekçe olarak aynı zamanda konuyu can sıkıcı olmaktan çıkardığını belirtmiştir ve öğrencinin bir ifadenin nedenini bilmesinin heyecan verici olduğuna değinmiştir:

“Ondan sonra öğrenci neyin nasıl olduğunu bilmeli. Dolayısıyla ezbere can sıkıcı olur. Bir şeyin nedenini bilmek heyecan vericidir.

Bu tema altında öğrencinin güven duyması, haz alması ve heyecan duymasına sebep olması argümanlarının sıralama anketinde en çok tercih edilen görüşler olduğu görülmektedir. Dr. Kompleks’in ispatın konuyu sıkıcı olmaktan kurtarması görüşüne ise ise yalnızca Dr. Vektör’ün katıldığı söylenebilir (bkz. Tablo 2).

3.5. İspatlar, uygulama yapmaya katkısı nedeniyle önemlidir!

Verilen yanıtlar içerisinde, ispat yapma nedenlerini ya da ispatın önemini matematiğin sorulara uygulanması ile ilişkilendiren ifadeler “Uygulamaya dönük katkı” teması altında gruplandırılmıştır. Burada uygulama ile kastedilen bir teoremde verilen bir formülün bir problemi çözme için uygulanmasıdır. Katılımcıların bu ifadeyi açıklamalarında bu anlamda kullandığı söylenebilir.Bu temanın teoremin/konunun öğrenilmesine katkı teması altında değerlendirilebildeğide düşünülebilir. Ancak bu tema altındaki kategorilerde katılımcıların uygulama yapmaya vurgu yapması ve uygulama yapmanın teoremi anlama veya konunun öğrenilmesine doğrudan bağlanamayacağı görüldüğünden ayrı bir tema olarak ele alınmıştır. Şekil 1'de sıralama anketi sonuçlarına göre, bu tema (uygulamaya katkı) beş öğretim elemanı tarafından son sırada tercih edilmiştir.

Örneğin, Dr. Topoloji ispatın veri analizi uygulamalarına katkısına değinmiştir:

“Veri analizi konusunda bize yardımcı oluyor. Çünkü bir ispat yaparken teoremi doğru anlamamız lazım en başta. Eğer bunu doğru anlayabiliyorsak parçalara ayırabiliyorsak kendi mantığımızla ifade edebiliyorsak ondan sonra ancak ispata geçebiliyoruz. Bu da bir tür veri analizidir yani bakacak olursanız. Bu alışkanlığı edinmek de ispatlar yardımıyla bize doğru veri analizini sağlıyor…Verileri, koşulları doğru değerlendirip bunun üzerine çözüm yollarını kurmak gerekiyor. Bu da ispat yoluyla oldukça edinilebilir diye düşünüyorum.”

Sıralama anketi sonuçlarına göre tüm öğretim elemanlarının Dr. Topoloji’nin bu görüşüne katıldığı söylenebilir.

Dr. Öklid, ispatların soru çözmeye katkı sağladığını düşündüğünü belirtmiştir ve bu ifade "uygulama yapabilmelerini sağlar" kategorisi altında ele alınmıştır:

"Soru da çözmek önemli, soruları çözerken destek sağladığını düşünüyorum."

Dr. Türev'in de ispatların soru çözmeye katkı sağladığını düşündüğü söylenebilir.Bu açıdan bu açıklama Dr. Türev'in ifadesi ile aynı kategori altında değerlendirilmiştir. Dr. Türev aynı zamanda bir teoremin ispatını öğrenmenin o teoremin uygulamalarını çözmekten daha önemli olduğunu, çünkü bunu anlarlarsa farklı sorulara da uygulayabileceklerini belirtmiştir:

Bir diğer yön öğrencilere daha formalbir..matematiğin farklı bir yönünü gösteriyoruz. Onlar için çünkü çok zor bir yön. İntegralle için ortalama değer teoremini ispatlamak onlar için zor olabiliyor ama onunla ilgili soruları çözebiliyorlar. Orada da hep şunu söylüyorum. Önemli olan o soruları çözme değil. O sorulara temel oluşturan şey ne, neden öyle? Onu artık uygulama olarak farklı yerlere uygulayabilirler.""İspat aslında her şeyin temeli. Oradaki ispatları yaptıklarında onları uygulayabiliyorlar. Farklı durumlara uygulayabiliyorlar.

Dr. Türev'in ifadeleriyle oluşan ispatın "uygulama sorularının temelini göstermesi" kategorisi, teoremin/konunun öğrenilmesine katkı teması altında "neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması" kategorisine benzerlik gösterdiği söylenebilir ancak burada Dr. Türev'in bu durumu özellikle uygulama soruları üzerinde de vurgulaması nedeniyle bu tema altında da değerlendirilmiştir. Ayrıca,bu kategori sıralama anketinde de öğretim elemanlarından beşi tarafından seçilmiştir.

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir eğitim fakültesinde görev yapan öğretim elemanlarının derslerinde ispatları hangi amaçlarla yaptıkları yani ispatı derslerde neden önemli bulduklarına yönelik bu çalışmanın sonuçları, öncelikleispatın matematik derslerinde hem ne kadar çok çeşitli amaçlarla yapıldığının/anlatıldığının hem de ne kadar farklıgerekçelerle önemli görüldüğünün göstergesi olarak kabul edilebilir.

Bu çalışmanın en önemli bulgusunun belirtilen görüşlerin birbirleriyle kıyaslanmasına olanak sağlaması olduğu söylenebilir.Örneğin, öncelikli olarak seçilen temalar çeşitlilik göstermekle birlikte, tercih sıraları dikkate alındığında öğretim elemanlarının ispatları önemli bulmasında en etkili gerekçenin öğrencilerin düşünme becerilerine katkı yapması olduğu söylenebilir. Bu temayı sırasıyla, teoremin/konunun öğrenilmesi, matematiğin tanıtılması, duyuşsal özellikler ve son olarak uygulamalar takip etmektedir.Tema ayırt etmeksizin bakıldığında ise tüm öğretim elemanlarının da seçtiği üç görüş olduğu belirlenmiştir: matematiğin bir disiplin olarak farkına varılmasını sağlaması, aksiyomatik yapısını anlamayı sağlaması ve verileri doğru değerlendirip çözüm üretmeyi öğretmesi öğretim elemanlarının derste ispatın önemli görülmesinde en çok tercih ettikleri argümanlar olmuştur.Bununla birlikte tüm katılımcılar tarafından seçilmemiş olmakla birlikte çoğunlukla tercih edilen görüşler: analitik düşünme becerisi sağlaması, problem çözme becerisini geliştirmesi, daha kalıcı öğrenme sağlaması, neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlaması, tanımları, teoremleri, aksiyomları tümdengelimli bir sistem içinde organize etmeyi sağlaması, güven vermesi, matematiksel haz sağlaması, heyecan sağlaması, bir problem durumunda koşulları doğru değerlendirmeyi sağlaması ve uygulama sorularının temelini göstermesidir.

Sıralama anketinde hiçbir öğretim elemanı tarafından tercih edilmeyen görüşlerin de olduğu görülmüştür: ispat tekniklerinin gösterilmesi ve uzamsal düşünmeyi arttırması öğretim elemanları tarafından işaretlenmeyen kategorilerdir. Daha önce de belirtildiği gibi bu görüşlerin seçilmemiş olması önemsiz olduğu anlamına gelmemektedir. Öğretim elemanları tüm görüşler içerisinden daha önemli buldukları görüşleri işaretlediklerinden, burada yalnızca, işaretlenen görüşlerin diğer görüşlere göre daha önemli görüldüğünden söz edilebilir.

Bunun yanı sıra bu çalışmanın ikinci önemli bulgusu, nitel araştırmalarda bu tür amaçlarla yapılan mülakatlarda katılımcıların söylediklerinden ziyade (o anki koşullara göre unutmaları vb. nedenlerle) söylemediklerine karşı kendi söylediklerinden daha fazla inanç besleyebildiklerini göstermiş olmasıdır. Örneğin, Dr. Türev ilk mülakatta öğrencilerin düşünme becerilerine yönelik bir amaçtan söz etmezken sıralama anketinde bu temayı öncelikli olarak seçmiştir. Sonuç olarak, mülakat verilerinin hem diğer veri türleriyle (gözlem vb.) desteklenmesi hem de ek mülakatlarla daha da aydınlatılmasının daha faydalı olacağı söylenebilir.

Bu çalışmada elde edilen görüşlerin bir çoğu literatürdeki görüşlere paralellik göstermektedir. Örneğin, matematiğin aksiyomatik yapısının anlaşılması (Yopp, 2011); matematiksel düşünme becerilerini geliştirme (Knuth, 2002; Hemmi, 2010; Yopp, 2011); farklı bakış açıları sağlama (Weber, 2012); düşünme yolunu öğretme (Schoenfeld, 1994); matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yaşama (Zaslavsky ve diğerleri, 2011); teoremi daha iyi anlamayı sağlama (Yopp, 2011; Weber, 2012); daha kalıcı öğrenme sağlama (Weber, 2012); neyin nereden geldiğini bilmeyi sağlama (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Yopp, 2011; Weber, 2012) ve ispat tekniklerinin öğretilmesi (Yopp, 2011; Weber, 2012; Lew ve diğerleri, 2016) bu bulgulara örnek gösterilebilir. Bununla birlikte farklı görüşlerin de ortaya çıktığı söylenebilir. Örneğin, ispatın öğrenciye güven vermesi, heyecan duymaya sebep olması vb.. Bir öğretim elmanının, öğrencinin kendine derste güven duymasını sağlamak amacıyla ispat yapıyor olması bu çalışmanın en ilginç sonuçlarından biridir ve bu bulgunun daha ayrıntılı incelenmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada bulunan amaçlar ispatın işlevlerini (doğrulama, açıklama, keşfetme, zihinsel meydan okuma, sistemleştirme) içermesi bakımından literatürdeki Hersh (1993), Hanna (1995), de Villiers (1999) ve Bell'in (1976) çalışmalarını desteklemektedir. Bununla birlikte iletişim işlevi öğretim elemanlarınca ifade edilmemiştir. Bu yönüyle Hanna (1995), de Villiers (1999), Harel ve Sowder (2007) den ayrılmaktadır.

Öğretim elemanlarının derslerinde ispat yaparken bu görüşlerden birini veya birkaçını birlikte amaçladığı da düşünülebilir. Bununla birlikte her ispat için ayrı amaç da planlıyor olabilirler. Cilli-Turner (2017) ispatın işlevlerinin içeriğe ve sunuma bağlı olarak çeşitlilik gösterebildiğini belirtmiştir. Bu bağlamda, bu çalışmanın sonuçlarınıngenellenemeyeceği söylenebilir. Ancak bu sonuçların,öğretim elemanlarınınöğretmen adaylarının matematik derslerinde ispat anlatım amaçları olarak kabul edilebilecek olması bağlamında bir anlam ifade ettiği kabul edilebilir.

Öğretim elemanlarının genel olarak sadece kendilerinin ispatı sunması ile öğrencinin ne kazanacağı veya öğrencinin kendisinin ispat yapmaya çalışması ile ne kazanacağı şeklinde kesin ayrımlar yapmadığı hatta bazen bunu belirtmediği görülmüştür. Bu durum bu çalışmanın sınırlıklarından biridir. İlerleyen çalışmalarda bu ayrımın kesinleştirilmesine yönelik araştırmaların yapılması hedeflenmektedir. Örneğin öğrencilerin öğretmenin anlattığı bir ispatı dinlemesiyle, kendisinin ispat yapmaya çalışması veya kitapta yer alan bir ispatı incelemesi arasındaki farkların belirginleştirilmesi planlanmaktadır. Bununla birlikte ders bazında da ispatın önemi farklılaşabileceğinden öğretim elemanlarının görüşlerini bu doğrultuda paylaşmaları sağlanabilir.

Bu çalışma bir üniversite ve bir eğitim fakültesiyle sınırlıdır. Hem farklı üniversitelerde matematik öğretmen adaylarına ders veren öğretim elemanlarının hem de fen fakültelerinde matematik bölümü öğrencilerine ders veren öğretim elemanlarının görüşlerinin alınması farklılıklar ve benzerliklerin ortaya çıkarılmasında önemli rol oynayabilir.

Bir öğretim elemanının zaman içinde derste ispat yapma nedenlerinde değişiklik olmasa bile bu nedenlerin önceliğinde değişiklik olabileceği düşünülebildiğinden bu görüşlerin zaman içinde değişip değişmediği de incelenebilir.

Hemmi (2010) ve Lai ve Weber (2014) öğretmenlerin kendi inançları ve değerlerine ters düşecek şekilde öğretim yapabildiklerini belirtmişlerdir. Bu sebeple, olabildiğince çok öğretim elemanının hem görüşleri hem de mevcut öğretim uygulamalarının uzun süreler içerecek şekilde incelenmesi onların hem beyan edilmiş hem de sahnelenmiş inançlarını anlamamıza da yardımcı olacaktır. Fukawa-Connelly (2012) geleneksel öğretmenlerin genellikle öğrencilerinden bekledikleri davranışları modellediklerini belirtmiştir. Bu açıdan öğretim elemanlarının ispat anlatırken neler yaptıkları, tercihlerinin altında yatan pedagojik gerekçeleri ve görüşlerine yönelik çalışmalar matematik eğitimi literatürüne bu bağlamda da katkıda bulunabilir.

KAYNAKÇA

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students’ use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 111-129.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates’ interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *31*(6), 896-890.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, *7*(1-2), 23-40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 351-382.

Bills, E., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of least upper bound. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference for the International Group for the Psychology of MathematicsEducation,* 2, 104-111.

Blanton, M. L., & Stylianou, D. A. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th annual conference of PME-NA, Vol. 2* (pp. 113-120). Honolulu, HI: University of Hawai'i.

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students’ mathematical arguments: proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 105-127.

Cilli-Turner, E. (2017). Impacts of inquiry pedagogy on undergraduate students conceptions of the function of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 14-21.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994).Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20(*1), 41-53.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research*, 3e. London: Sage.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24,* 17-24.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking proof with Sketchpad*, 3-10.

Demiray, E. ve Bostan, M. I. (2017). An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' ability to conduct valid proofs, methods used, and reasons for invalid arguments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 109-130.

Dimmel, J. K., & Herbst, P. G. (2018). What details do teachers expect from student proofs? A study of proof checking in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(3), 261-291.

Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 325-345.

Fukawa-Connelly, T. (2014). Using Toulmin analysis to analyse an instructor's proof presentation in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(1),* 75-88.

Glaser, B., & Strauss, A.L. (1967) *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research,* Chicago: Aidine.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, *15*(3), 42-49.

Hanna, G., (2000). Proof, explanation and exploration: An overview, *Educational Studies in Mathematics.44*, 5–23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In *Explanation and proof in mathematics* (s. 85-100). Springer, Boston, MA.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In *International handbook of mathematics education* (s. 877-908). Springer, Dordrecht.

Harel, G., &Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 271-291.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 283-312.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students?. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73-122.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 379-405.

Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(6), 1109-1129.

Ko, Y. Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counter examples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 20-35.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 85(1)*, 93-108.

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 181-203.

Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(2), 162-198.

Lynch, A. G., & Lockwood, E. (2017). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *TheJournal of Mathematical Behavior*.Erişim adresi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 41-51.

McCrory, R., & Stylianides, A. J. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research*, *64*, 119-131.

Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *TheJournal of Mathematical Behavior*, *49*, 24-34.

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 106-118.

Nardi, E., & Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 267–274.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri*. (Çev. M. Bütün, S. B. Demir). Ankara: Pegem Akademi.

Pinto, A., & Karsenty, R. (2017). From course design to presentations of proofs: How mathematics professors attend to student independent proof reading. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 129-144.

Sears, R., & Chávez, Ó. (2014). Opportunities to engage with proof: the nature of proof tasks in two geometry textbooks and its influence on enacted lessons. *ZDM*, *46*(5), 767-780.

Selden, A. ve Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4–36.

Speer, N. M., Smith III, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *TheJournal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 99-114.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, *33*(2), 455-488.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. Educational Studies in Mathematics, *72*(2), 237-253.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1463-1490.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective. New York: Routledge.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., &Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(1), 91-134.

Teppo, A. R. (2015). Grounded theory methods. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s. 3-21). Springer, Dordrecht.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, *22*(3), 14-17.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior, 23(2)*, 115-133.

Weber, K. (2010). Mathematics' majors perceptions of conviction, validity, and proof. Mathematical Thinking and Learning, 12, 306–336.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *Int J Math Educ Sci Technol. 43(4),* 463–482.

Weinberg, A., Fukawa-Connelly, T., & Wiesner, E. (2015). Characterizing instructor gestures in a lecture in a proof-based mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, 90(3),* 233-258.

Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 115-130.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., &Winicki-Landman, G. (2011). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (s. 215-229). Springer, Dordrecht.

Zazkis, D., Weber, K., &Mejía-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 155-173.

Zhen, B., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2016). Mathematics majors' perceptions of the admissibility of graphical inferences in proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 1-29.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Many studies on the roles of proof agree on the importance of the roles in mathematicseducation. Questions about why proof should be presented or why students should be participated in proving activities continue to take place within the literature with some answers (e.g. Yopp, 2011; Cilli & Turner, 2017). It can be seen in the literature that the role of proof may vary depending on the context of its presentation or creation. (Cilli-Turner, 2017). For mathematicians, proof can provide verification (Hersh, 1993; de Villiers, 1999), explanation (Hersh, 1993; Hanna, 1995), invention (de Villiers, 1999), intellectual challenge (de Villiers, 1999), systematization (Bell, 1976; de Villiers, 1999), communication (de Villiers, 1999; Hanna, 1995; Harel & Sowder, 2007). Most of these roles also take place in mathematics education under the question of why instructors should present proofs to their students or lead them to read or write proofs. For instance, an instructor may present proofs to students to convince them (Yopp, 2011; Weber, 2002), to teach techniques and ideas in proving (Weber, 2002; Weber, 2012; Hanna & Barbeau, 2008; Cilli-Turner, 2017; Yopp, 2011) ; to illustrate a new approach that would be useful in proving other theorems (Lew, Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos, & Weber, 2016); to illuminate the structure of mathematics (Cilli-Turner, 2017; Yopp, 2011); to increase students understanding and to gain insight (Hersh, 1993; Hanna, 1990; Yopp, 2011; Weber, 2012); to introduce some important (historically or culturally) proofs (Weber, 2012); to develop some mathematical thinking skills (Knuth, 2002; Yopp, 2011; Hemmi, 2010); to expose students to the proving process (Weber; 2010); to teach how to construct proof (Yopp, 2011); to justify the use of a definition or axiomatic structure (Weber, 2002); to stress the importance of some theorems (Weber, 2012).In this study, the instructors' opinions about the importance of mathematical proof were investigated. In this context the following research question guided this study:"*What are the instructors' opinions about the importance of the proof in mathematics courses?*"

Method

This study is an integral part of a broader study which was conducted with 7 professors (3 female and 4 male) who teach mathematics courses in the faculty of education at a state university. The broader study covers professors' views about proofs and proving in teaching and actual pedagogical practices about proof. The interviews were recorded by a video camera. 20 questions on proof presentation were asked in the interview; however, within the scope of this study, only the findings on the question of "*What do you think about the importance of proof in mathematics courses? Why do we do proofs in mathematics courses?".*

After the interviews were transcripted, the statements of the participants were grouped by using grounded theory and constant comparative method (Corbin & Strauss, 2008), and the categories and themes were created.The ranking questionnaire formed by the analysis of the first interview. At the second interview, the instructors were asked to rank these themes according to the importance.

Results

As the result of the qualitative analysis of the interview data, it was found that the instructors put forward 25 distinct reasons totally for not presenting proofs. These reasons have been evaluated under 5 themes.These themes are the "contribution to the introduction of mathematics" "contribution to the students' mathematical thinking skills" "contribution to the learning of the theorem/topic", contribution to affective characteristics", and "contribution to applying the mathematics".

Discussion and Conclusion

It can be said that the most important finding of this study is that it allows comparison of the opinions mentioned. For instance, it was found that the most effective reason for the instructors' presenting proofs is the proof's contribute to the students' mathematical thinking skills. This theme is followed by respectively "contribution to the learning of the theorem/topic", "contribution to the introduction of mathematics", contribution to affective characteristics", and "contribution to applying the mathematics". Although the categories that are related to the importance of proof are mostly in parallel with the opinions in the literature, it has been seen that different opinions emerged, such as the fact that the proof gives confidence to the student and causes excitement.

In addition, the second important finding of this study is that, in the interviews conducted for such purposes in qualitative researches, it showed that the participants may have more faith to what they didn’t say than what they say. For instance, although Dr. Türev did not mention an aim for students' thinking skills but she preferred this theme as a priority in the ranking survey.