Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(2), 783-787
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019, 12(2), 783-787
DOI:10.18185/erzifbed.487830
Research Article

Padovan-circulant-Hurwitz Dizilerinin m Modülüne Göre Periyotları

Zafer ADIGÜZEL*, Özgür ERDAĞ, Ömür DEVECİ

Kafkas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kars, Türkiye

Geliş / Received: 26/11/2018, Kabul / Accepted: 13/05/2019

Öz

Padovan-circulant-Hurwitz dizisi ve Padovan-circulant-Hurwitz matrisi Adıgüzel vd. tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada Padovan-circulant-Hurwitz matrisinin m modülüne göre indirgenmesi suretiyle bu matris üreteç olarak seçilerek devirli gruplar elde edilmiştir. Ayrıca üretilen devirli grupların mertebeleri ile dizinin m modülüne göre periyotları arasında bağıntılar oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Circulant Matris, Dizi, Periyot

Padovan-circulant-Hurwitz Sequences Modulo m

Abctract

The Padovan-circulant-Hurwitz sequence and the Padovan-circulant-Hurwitz matrix were defined by Adıgüzel et al.. In this work, we consider the cyclic groups which are generated by the multiplicative orders of the Padovan-circulant-Hurwitz matrix when read modulo m. Also, we study the Padovan-circulant-Hurwitz sequence modulo m and then we obtain the relationship among the periods of the Padovan-circulant-Hurwitz sequence modulo m and the orders of the cyclic groups obtained.

Keywords: Circulant Matrix, Sequence, Period

1. Giriş

İndirgemeli bir dizinin α modülüne göre periyodu aynı zamanda bu dizinin α-inci mertebeden bir devirli gruptaki periyoduna karşılık gelmektedir. İndirgemeli diziler cebirsel yapılara ilk olarak Wall (1960) tarafından taşınmıştır. Wall, bu çalışmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini incelemiştir. Gruplarda indirgemeli diziler

*Sorumlu Yazar: zafer-adiguzel36@hotmail.com

üzerine oluşturulan konsept, daha sonra yapılan çalışmalarla çeşitli indirgemeli dizilerin farklı grup ailelerinde incelenmesi şeklinde genişletilmiştir (Aydın ve Aydın, 1998; Campbell vd., 1990; Deveci, 2015; Deveci, baskıda; Knox, 1992; Lü ve Wang 2006; Özkan vd., 2003).

2. Materyal ve Metot

Adıgüzel vd., Padovan-circulant-Hurwitz dizilerini $n \geq 1$ için sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$a^1(1) = a^1(2) = a^1(3) = 0$ ve $a^1(4) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^1(n+4) = a^1(n+2) - a^1(n+1) + a^1(n), \qquad (1)$$

$a^2(1) = a^2(2) = a^2(3) = a^2(4) = 0$ ve $a^2(5) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^2(n+5) = -a^2(n+2) + a^2(n+1) + a^2(n), \qquad (2)$$

$a^3(1) = a^3(2) = a^3(3) = a^3(4) = a^3(5) = 0$ ve $a^3(6) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^3(n+6) = -a^3(n+3) + a^3(n+2) + a^3(n), \qquad (3)$$

$a^4(1) = a^4(2) = a^4(3) = a^4(4) = a^4(5) = 0$ ve $a^4(6) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$a^4(n+6) = a^4(n+3) - a^4(n+2) + a^4(n). \qquad (4)$$

(1), (2), (3) ve (4) ifadeleri yardımıyla, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz dizileri için Companion matris formundaki üreteç matrisleri sırasıyla;

$$PH^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PH^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PH^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$PH^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış olup, $PH^{(1)}$, $PH^{(2)}$, $PH^{(3)}$ ve $PH^{(4)}$ matrisleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tür Padovan-circulant-Hurwitz matrisleri olarak adlandırılır.

$k = 1, 2, 3, 4$ için $a^k(\alpha)$ notasyonu a_α^k şeklinde gösterilsin. $\alpha \geq 3$ için α üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak $\left(PH^{(1)}\right)^\alpha$, $\left(PH^{(2)}\right)^\alpha$, $\left(PH^{(3)}\right)^\alpha$ ve $\left(PH^{(4)}\right)^\alpha$ matrisleri;

$$\left(PH^{(1)}\right)^{\alpha}=\begin{bmatrix} a^1_{\alpha+4} & a^1_{\alpha+5} & a^1_{\alpha+2}-a^1_{\alpha+3} & a^1_{\alpha+3} \\ a^1_{\alpha+3} & a^1_{\alpha+4} & a^1_{\alpha+1}-a^1_{\alpha+2} & a^1_{\alpha+2} \\ a^1_{\alpha+2} & a^1_{\alpha+3} & a^1_{\alpha}-a^1_{\alpha+1} & a^1_{\alpha+1} \\ a^1_{\alpha+1} & a^1_{\alpha+2} & a^1_{\alpha-1}-a^1_{\alpha} & a^1_{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\left(PH^{(2)}\right)^{\alpha}=\begin{bmatrix} a^2_{\alpha+5} & a^2_{\alpha+6} & a^2_{\alpha+7} & a^2_{\alpha+3}+a^2_{\alpha+4} & a^2_{\alpha+4} \\ a^2_{\alpha+4} & a^2_{\alpha+5} & a^2_{\alpha+6} & a^2_{\alpha+2}+a^2_{\alpha+3} & a^2_{\alpha+3} \\ a^2_{\alpha+3} & a^2_{\alpha+4} & a^2_{\alpha+5} & a^2_{\alpha+1}+a^2_{\alpha+2} & a^2_{\alpha+2} \\ a^2_{\alpha+2} & a^2_{\alpha+3} & a^2_{\alpha+4} & a^2_{\alpha}+a^2_{\alpha+1} & a^2_{\alpha+1} \\ a^2_{\alpha+1} & a^2_{\alpha+2} & a^2_{\alpha+3} & a^2_{\alpha-1}+a^2_{\alpha} & a^2_{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\left(PH^{(3)}\right)^{\alpha}=\begin{bmatrix} a^3_{\alpha+6} & a^3_{\alpha+7} & a^3_{\alpha+8} & a^3_{\alpha+3}+a^3_{\alpha+5} & a^3_{\alpha+4} & a^3_{\alpha+5} \\ a^3_{\alpha+5} & a^3_{\alpha+6} & a^3_{\alpha+7} & a^3_{\alpha+2}+a^3_{\alpha+4} & a^3_{\alpha+3} & a^3_{\alpha+4} \\ a^3_{\alpha+4} & a^3_{\alpha+5} & a^3_{\alpha+6} & a^3_{\alpha+1}+a^3_{\alpha+3} & a^3_{\alpha+2} & a^3_{\alpha+3} \\ a^3_{\alpha+3} & a^3_{\alpha+4} & a^3_{\alpha+5} & a^3_{\alpha}+a^3_{\alpha+2} & a^3_{\alpha+1} & a^3_{\alpha+2} \\ a^3_{\alpha+2} & a^3_{\alpha+3} & a^3_{\alpha+4} & a^3_{\alpha-1}+a^3_{\alpha+1} & a^3_{\alpha} & a^3_{\alpha+1} \\ a^3_{\alpha+1} & a^3_{\alpha+2} & a^3_{\alpha+3} & a^3_{\alpha-2}+a^3_{\alpha} & a^3_{\alpha-1} & a^3_{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

ve

$$\left(PH^{(4)}\right)^{\alpha}=\begin{bmatrix} a^4_{\alpha+6} & a^4_{\alpha+7} & a^4_{\alpha+8} & a^4_{\alpha+3}-a^4_{\alpha+5} & a^4_{\alpha+4} & a^4_{\alpha+5} \\ a^4_{\alpha+5} & a^4_{\alpha+6} & a^4_{\alpha+7} & a^4_{\alpha+2}-a^4_{\alpha+4} & a^4_{\alpha+3} & a^4_{\alpha+4} \\ a^4_{\alpha+4} & a^4_{\alpha+5} & a^4_{\alpha+6} & a^4_{\alpha+1}-a^4_{\alpha+3} & a^4_{\alpha+2} & a^4_{\alpha+3} \\ a^4_{\alpha+3} & a^4_{\alpha+4} & a^4_{\alpha+5} & a^4_{\alpha}-a^4_{\alpha+2} & a^4_{\alpha+1} & a^4_{\alpha+2} \\ a^4_{\alpha+2} & a^4_{\alpha+3} & a^4_{\alpha+4} & a^4_{\alpha-1}-a^4_{\alpha+1} & a^4_{\alpha} & a^4_{\alpha+1} \\ a^4_{\alpha+1} & a^4_{\alpha+2} & a^4_{\alpha+3} & a^4_{\alpha-2}-a^4_{\alpha} & a^4_{\alpha-1} & a^4_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (8)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\det\left(PH^{(1)}\right)^{\alpha}=\left(PH^{(3)}\right)^{\alpha}=\left(PH^{(4)}\right)^{\alpha}=(-1)^{\alpha}$ ve $\det\left(PH^{(2)}\right)^{\alpha}=1$ olduğu açıktır.

3. Bulgular

a_{ij} ler tam sayılar olmak üzere verilen bir $A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A nın her elemanının $mod\alpha$ ya göre indirgenmesi $A(mod\alpha)$ şeklinde ifade edilir. Yani $A(mod\alpha)=\left(a_{ij}\,(mod\alpha)\right)$ dir. $\langle A\rangle_{\alpha}=\left\{A^{i}(mod\alpha)\,|\,i\geq 0\right\}$ olmak üzere $\text{obeb}(\alpha,\det A)=1$ ise, o zaman $\langle A\rangle_{\alpha}$ bir devirli gruptur. $\langle A\rangle_{\alpha}$ devirli grubunun mertebesi $\left|\langle A\rangle_{\alpha}\right|$ ile gösterilir. $PH^{(k)}$, $(k=1,2,3,4)$ matrisleri için $\det PH^{(1)}=\det PH^{(3)}=\det PH^{(4)}=-1$ ve $\det PH^{(2)}=1$ olduğundan m nin tüm pozitif tam sayı değeri için $\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{m}$, $\left\langle PH^{(2)}\right\rangle_{m}$, $\left\langle PH^{(3)}\right\rangle_{m}$ ve $\left\langle PH^{(4)}\right\rangle_{m}$ devirli gruplardır.

Teorem 2.1: r bir asal sayı ve $k=1,2,3,4$ için $\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^m}$ devirli gruplar olsun. Eğer u, $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|=\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^u}\right|$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı ise bu takdirde $v\geq u$ için $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right|=r^{v-u}\cdot\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|$ eşitliği yazılır. Özellikle $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|\neq\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^2}\right|$ ise, her $v\geq 2$ için $\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r^v}\right|=r^{v-2}\cdot\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_{r}\right|$ olur.

İspat: $k=1$ için $\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{r^m}$ devirli grubunu ele alalım. Farzedelim ki t pozitif bir tamsayı olsun ve $\left|\left\langle PH^{(1)}\right\rangle_{r^m}\right|$, $h\left(r^{m}\right)$ ile gösterilsin. Eğer $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)}=I\left(\text{mod}\,r^{t+1}\right)$ ise $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t+1}\right)}=I\left(\text{mod}\,r^{t}\right)$ dir. Burada I, 4×4 tipinde birim matristir. Böylece $h\left(r^{t}\right)$ nin $h\left(r^{t+1}\right)$ yı böldüğü görülmektedir. Ayrıca $\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t}\right)}=I+\left(\mathrm{m}_{ij}^{(t)}\,r^{t}\right)$ eşitliği yazılarak binom açılımından

$$\left(PH^{(1)}\right)^{h\left(r^{t}\right)\cdot r}=\left(I+\left(m_{ij}^{(t)}r^{t}\right)\right)^{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(m_{ij}^{(t)}r^{t}\right)^{i}\equiv I\left(\text{mod}\,r^{t+1}\right)$$

elde edilir ki, bu da $h\left(r^{t+1}\right)$ nin $h\left(r^{t}\right)\cdot r$ tarafından bölünebilir olduğu gösterir. Bundan dolayı $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)$ yada $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)\cdot r$ dir. Ancak $h\left(r^{t+1}\right)=h\left(r^{t}\right)\cdot r$ eşitliğinin sağlanması r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(t)}$ nin var olması ile mümkündür. u, $h(r)=h\left(r^{u}\right)$ eşitliğini sağlayan en büyük pozitif tamsayı olduğundan $h\left(r^{u}\right)\neq h\left(r^{u+1}\right)$ eşitsizliği yazılır ki bu eşitsizlik, r tarafından bölünemeyen bir $m_{ij}^{(u+1)}$ nin mevcut olduğunu gösterir. Dolayısıyla $h\left(r^{u+1}\right)\neq h\left(r^{u+2}\right)$ sonucu elde edilir . u üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak ispat tamamlanır.

$k=2,3,4$ için ispat benzer şekildedir.

$\left\{a_{\alpha}^{k}\right\}$ Padovan-circulant-Hurwitz tipli diziler bir m modülüne göre indirgenirse, tekrar eden,

$$\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}=\left\{a_{\alpha}^{1}(m),a_{\alpha}^{2}(m),\ldots,a_{\alpha}^{i}(m),\ldots\right\}$$

dizisi elde edilir ve burada $a_{\alpha}^{k}(m)=a_{\alpha}^{k}(\operatorname{mod} m)$ dir.

Teorem 2.2: $k=1,2,3,4$ için $\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}$ dizisi basit periyodik bir dizidir.

İspat: Farz edelim ki $T=\left\{\left(t_1,t_2,\ldots,t_k\right)\mid 0\le t_i\le m-1\right\}$ olsun. Bu durumda $|Q|=m^{k}$ dır. Q_m nin elemanlarının m^{k} tane farklı k-tiplisi mevcut olduğundan, bu k-tiplilerden en az bir tanesi $\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}$ dizisinde iki kez ortaya çıkar. Bundan dolayı bu k-tiplileri takip eden alt dizi tekrarlanır. Dolaysıyla dizi periyodiktir. $i>j$ olmak üzere

$$a_{\alpha}^{i+1}(m)\equiv a_{\alpha}^{j+1}(m),a_{\alpha}^{i+2}(m)\equiv a_{\alpha}^{j+2}(m),\ldots,a_{\alpha}^{i+k}(m)\equiv a_{\alpha}^{j+k}(m)$$

ise $i\equiv j(\operatorname{mod}k)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Padovan-circulant-Hurwitz dizilerinin tanımından

$$a_{\alpha}^{i}(m)\equiv a_{\alpha}^{j}(m),a_{\alpha}^{i-1}(m)\equiv a_{\alpha}^{j-1}(m),\ldots,a_{\alpha}^{i-j+1}(m)\equiv a_{\alpha}^{1}(m)$$

eşitliği elde edilir ki bu da $\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}$ dizisinin basit periyodik olduğunu gösterir.

$\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}$ dizisinin periyodu $S^{k}(m)$ ile gösterilsin.

(5), (6), (7) ve (8) matrisleri için her m pozitif tamsayıları ve $k=1,2,3,4$ için $S^{k}(m)=\left|\left\langle PH^{(k)}\right\rangle_m\right|$ elde edilir.

Teorem 2.3: p_i ler farklı asal sayıları olmak üzere $m=\prod_{i=1}^{u}\left(p_i\right)^{r_i}$, $(u\ge 1)$ olsun. O zaman

$$S^{k}(m)=okek\left[S^{k}\left(\left(p_1\right)^{r_1}\right),S^{k}\left(\left(p_2\right)^{r_2}\right),\ldots,S^{k}\left(\left(p_u\right)^{r_u}\right)\right]$$

dır.

İspat: $\left\{a_{(p_i)^{r_i}}^{k}(m)\right\}$ dizisinin periyodu $S^{k}\left(\left(p_i\right)^{r_i}\right)$ olduğundan bu dizi sadece $\lambda\cdot S^{k}\left(\left(p_i\right)^{r_i}\right)$, $(\lambda\in N)$ uzunluğundaki bloklarda tekrar eder. Aynı zamanda $S^{k}(m)$, $\left\{a_{\alpha}^{k}(m)\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan, her i değeri için $\left\{a_{(p_i)^{r_i}}^{k}(m)\right\}$ dizisi $S^{k}(m)$ terimde bir defa tekrar eder. Böylece, her i değeri için $S^{k}(m)$ periyodu $\lambda\cdot S^{k}(m)$

şeklinde olup bu sayı $\{a_{\alpha}^{k}(m)\}$ dizisinin periyodu vermektedir. Dolayısıyla

$$S^{k}(m)=okek\left[S^{k}\left((p_1)^{r_1}\right),S^{k}\left((p_2)^{r_2}\right),\ldots,S^{k}\left((p_u)^{r_u}\right)\right]$$

eşitliği elde edilir.

4. Teşekkür

Bu çalışma, 2017-FM-65 numaralı proje ile Kafkas Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir.

5. Kaynaklar

Adıgüzel, Z., Erdağ, Ö., Deveci, Ö. "Padovan-circulant-Hurwitz Sequences", 1st International Conference on Mathematical and Related Sciences-ICMRS, 30 April-04 May, Belek, Antalya, Turkey.

Aydın, H., Aydın, R. 1998. "General Fibonacci Sequences in Finite Groups", *Fibonacci Quarterly,* 36(3), 216-221.

Campbell, C. M., Doostie, H., Robertson, E. F. 1990. "Fibonacci Length of Generating Pairs in Groups in Applications of Fibonacci Numbers", *Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers,* 27-35.

Deveci, Ö. 2015. "The Pell-Padovan Sequences and The Jacobsthal-Padovan Sequences in Finite Groups", *Utilitas Mathematica,* 98, 257-270.

Deveci, Ö. "The Padovan-Circulant Sequences and their Applications", *Mathematical Reports,* Baskıda.

Knox, S. W. 1992. "Fibonacci Sequences in Finite Groups", *Fibonacci Quarterly,* 30, 116-120.

Lü, K., Wang, J. 2006. "k-Step Fibonacci sequence modulo m", *Utilitas Mathematica*, 71, 169-177.

Özkan, E., Aydın, H., Dikici, R. 2003. "3-step Fibonacci series modulo m", *Applied Mathematics and Computation*, 143, 165-172.

Wall, D. D. 1960. "Fibonacci series modulo m", *American Mathematical Monthly,* 67, 525-532.