



YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN DEĞME MEKANİĞİ

Müjgen YAYLI¹, Murat YAYLACI^{1*}, Ahmet BİRİNCİ²

¹ Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Rize, Türkiye

² Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, Türkiye

Anahtar Kelimeler	Öz
<i>Değme mekaniği, Fonksiyonel dercelendirilmiş tabaka, Elastisite teorisi, İntegral denklem.</i>	Bu çalışmada, yarım düzlem üzerine oturan ve üstten yayılı yükler ile bastırılan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir tabakanın eksenel simetrik değme mekaniği elastisite teorisine göre ele alınmıştır. Değme yüzeyleri sürtünmesiz olup, kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir. Denge denklemlerine, bünye denklemlerine ve şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarına sınır şartları uygulanıp problemde integral dönüşüm teknikleri kullanılarak değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemin sayısal çözümü, denge şartı da dikkate alınarak, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile gerçekleştirilmiş, değme uzunlukları ve değme gerilmeleri bulunmuştur. Ayrıca çalışmada, yayılı yükün uygulama genişliği ve malzeme özelliklerinin fonksiyonel değişiminin tabakada oluşacak gerilme dağılımlarına etkisi incelenmiştir.

THE CONTACT MECHANIC FOR FUNCTIONALLY GRADED LAYER RESTING ON HALF PLANE

Keywords	Abstract
<i>Contact mechanics, Functionally graded layer, Theory of elasticity, Integral equation.</i>	In this study, a contact mechanic of a functionally graded (FG) layer resting on a half plane and pressed with distributed load from the top was considered according to theory of elasticity. The problem is solved under the assumptions that all surfaces are frictionless, the effect of gravity forces is neglected. The problem is reduced a system of integral equation in which the contact pressure are unknown functions by using integral transform technique and applying boundary conditions on equilibrium equations, constitutive equations and strain-displacement equations. The numerical solution of the integral equation was carried out with Gauss-Jacobi integration formulation taking into account the equilibrium condition and contact lengths and stresses have been found. In addition, in this study, the effect of the Application width of distributed load and the functional change of material properties on the stress distribution will be investigated.

Alıntı / Cite

Yaylı, M., Yaylacı, M., Birinci, A., (2019). Yarım Düzlem Üzerine Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Değme Mekaniği, Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi, 7(3), 639-646.

Yazar Kimliği / Author ID (ORCID Number)

M. Yaylı, 0000-0002-2017-218X

M. Yaylacı, 0000-0003-0407-1685

A. Birinci, 0000-0002-5913-7699

Makale Süreci / Article Process

Başvuru Tarihi / Submission Date 28.02.2019

Revizyon Tarihi / Revision Date 15.04.2019

Kabul Tarihi / Accepted Date 19.04.2019

Yayın Tarihi / Published Date 15.09.2019

1. Giriş

Yapı ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile değme yüzeyleri bulunmaktadır. Bu değmenin karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletişim şekilleri, değme halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, değme uzunlukları ve değme bölgesindeki değme gerilmesi dağılımı sistemlerin

davranışında önemli bir etkiye sahiptir. Karayolu, havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler değmenin söz konusu olduğu mühendislik çalışmalarına örnek verilebilir. Taşıt çarpışmalarının uygulanması ve biyomekanik davranış gibi konular da değme mekaniğinin çalışma alanına girmektedir (Çömez, 2009). Yeni malzemelerin geliştirilmesi,

* İlgili yazar / Corresponding author, murat.yaylaci@erdogan.edu.tr, +90-464-223-7518/1219

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (3)$$

$$\sigma_{1x} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - \kappa_1) m_j n_j + \xi(\kappa_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (4)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (5)$$

$$\tau_{1xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (6)$$

Elastik yarım düzlem için:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (7)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-B_1 + \left(\frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_2 e^{\xi y} \right] \cos(\xi x) d\xi \quad (8)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\xi (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\xi (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\xi (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (11)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen κ_i ($i = 1, 2$) bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_i = (3 - 4\nu_i)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa_i = (3 - 4\nu_i) / (1 + \nu_i)$ olarak verilmektedir. Tabakaya ve yarım düzleme ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen A_j ($j=1, \dots, 4$), B_1 ve B_2 bilinmeyen katsayılar olup problemin sınır şartlarından elde edilecektir.

Bu tip problemler genel olarak değme problemleri olarak adlandırılır. Elemanlar arasındaki değme, yük aktarma metodlarından biridir. Bu tür bir yük aktarma tekniği iki ya da daha fazla değme yüzeyi arasındaki ilişkinin yapısına bağlıdır. Değme durumunun doğrudan incelenmesi ve kesin bir şekilde değerlerin ölçülmesi oldukça zordur. Değme problemi değme gerilmelerini oluşturan elemanların davranışının, malzeme özelliklerine bağlı olmasından dolayı karmaşıktır.

Değme problemlerini sonlu elemanlar yöntemiyle modellemek oldukça zor olmasına rağmen bu yöntem uzun yıllardır değme problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Günümüzde bu yöntem ürünlerin tasarımı ve geliştirilmesi sürecinde maliyetlerin azaltılması için endüstri alanında da yer buldu.

3. Sınır Şartları ve İntegral Denklemin Elde Edilmesi

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenlerini $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ gerilme bileşenlerini göstermek üzere probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\sigma_{y1}(x, h) = \begin{cases} -p_0 & ; a_1 < x < a_2 \\ 0 & ; x > a_2 \quad x < a_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{xy1}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (13)$$

$$\sigma_{y2}(x, 0) = \begin{cases} -p_1(x) & ; 0 \leq x < b \\ 0 & ; b \leq x < \infty \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma_{y1}(x, 0) = \sigma_{y2}(x, 0), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (15)$$

$$\tau_{xy1}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (16)$$

$$\tau_{xy2}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)] = 0, \quad (0 \leq x < b) \quad (18)$$

Probleme ilişkin denge şartı ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\int_{-b}^b P_1(x) dx = 2(a_2 - a_1) p_0 \quad (19)$$

Burada p_0 yayılı yükün şiddetini, $P_1(x)$ ise FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmelerini göstermektedir. a_1 ve a_2 sırasıyla yayılı yük ile FD tabakanın değme uzunluğunun başlangıç ve bitiş noktalarını, b ise FD tabaka ile yarım düzlemin ayrıldığı noktanın y eksenine olan mesafesini ifade etmektedir.

(12-17) nolu denklemleriyle verilen sınır şartlarında, gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin yerine konulup Fourier integral dönüşümü kullanılarak altı bilinmeyenli altı cebrik denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilir. Elde edilen bu denklem takımının çözülmesiyle gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen katsayılar ($A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$) bilinmeyen $P_1(x)$ değme gerilmesi fonksiyonuna bağlı olarak bulunur (Ek 1). Elde edilen katsayılar (18) nolu sınır şartında yerlerine yazıldığında ve gerekli ara işlemler yapıldığında değme gerilmesinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklem aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$p_0 M(x) + \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b P_1(t) \left\{ k(x, t) + \left[\frac{1}{t-x} \right] \left[\frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_0} + \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_2} \right] \right\} dt = 0 \quad (20)$$

Yukarıdaki ifadede geçen:

$$M(x) = \int_0^{\infty} \frac{-\xi(\kappa_1 - 1)}{\Delta\mu_0 e^{\beta h}} \{ (e^{nh} ((C_3 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_3) M_2 + (C_4 D_1 D_2 - C_2 D_1 D_4) M_3 + (C_2 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_2) M_4) + (e^{nh} ((C_4 D_2 D_3 - C_3 D_2 D_4) M_1 + (C_1 D_2 D_4 - C_4 D_1 D_2) M_3 + (C_3 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_3) M_4) + (e^{nh} ((C_2 D_3 D_4 - C_4 D_2 D_3) M_1 + (C_4 D_1 D_3 - C_1 D_3 D_4) M_2 + (C_1 D_2 D_3 - C_2 D_1 D_3) M_4) + (e^{nh} ((C_3 D_2 D_4 - C_2 D_3 D_4) M_1 + (C_1 D_3 D_4 - C_3 D_1 D_4) M_2 + (C_2 D_1 D_4 - C_1 D_2 D_4) M_3) \} \sin(\xi x) \sin(\xi a_2 - \xi a_1) d\xi \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
k(x,t) = & \int_0^{\xi} \frac{\xi(\kappa_1-1)}{2\Delta\mu_0} \{ e^{h(n_1+n_2)} ((C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)M_3 + (C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} ((C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)M_2 + (C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_4)} ((C_1D_2D_3 - C_1D_3D_4)M_2 + (C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2)M_3) \\
& + e^{h(n_2+n_3)} ((C_2D_2D_4 - C_2D_3D_4)M_1 + (C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2)M_4) \\
& + e^{h(n_2+n_4)} ((C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3)M_1 + (C_4D_1D_4 - C_2D_1D_2)M_3) \\
& + e^{h(n_3+n_4)} ((C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4)M_1 + (C_3D_1D_4 - C_4D_1D_2)M_3) \\
& - \frac{(\kappa_1+1)}{8\mu_0} \sin(\xi(x-t))d\xi \\
\Delta = & e^{h(n_1+n_2)} (C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 - C_2C_4D_1D_3) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} (-C_1C_2D_3D_4 + C_1C_4D_2D_3 + C_2C_3D_1D_4 - C_3C_4D_1D_2) \\
& + e^{h(n_1+n_4)} (C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\
& + e^{h(n_2+n_3)} (C_1C_2D_3D_4 - C_1C_3D_2D_4 - C_2C_4D_1D_3 + C_3C_4D_1D_2) \\
& + e^{h(n_2+n_4)} (-C_1C_2D_3D_4 + C_1C_4D_2D_3 + C_2C_3D_1D_4 - C_3C_4D_1D_2) \\
& + e^{h(n_3+n_4)} (C_1C_3D_2D_4 - C_1C_4D_2D_3 - C_2C_3D_1D_4 + C_2C_4D_1D_3)
\end{aligned} \quad (22)$$

olarak tanımlanabilir.

4. İntegral Denklemin Çözümü

İntegral denklemlerin sayısal çözümleri Gauss-Jacobi İntegrasyon Formülasyonu ile gerçekleştirilecektir (Erdoğan vd., 1973; Krenk, 1975). Bu integral denklem sistemine, Gauss-Jacobi metodunu uygulamak için önce denklem takımının tanımlı olduğu integral aralığını $(-1,1)$ 'e normalize etmek uygun olur.

$$z = \xi h, \quad dz = h d\xi, \quad (24)$$

$$x = bs \quad (25)$$

$$t = br, \quad dt = bdr \quad (26)$$

$$\phi(r) = \frac{h}{P} P_1(t) \quad (27)$$

Tanımlanan boyutsuz büyüklükler, integral denklemde ve denge şartında yerlerine yazılırsa;

$$\int_{-1}^1 \phi(r) \left\{ \frac{b}{h} k(s,r) + \left[\frac{1}{r-s} \right] \left[\frac{\kappa_1+1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2+1)}{8\mu_2} \right] \right\} dr = -\frac{P_0}{P/h} M(s) \quad (28)$$

$$\frac{b}{h} \int_{-1}^1 \phi(r) dr = (a_2 - a_1) \frac{P_0}{P} \quad (29)$$

olarak elde edilir. İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü aşağıdaki ifadelerle aranabilir,

$$\begin{aligned}
g_j(r_j) &= G_j(r_j) w_j(r_j) \\
w_j(r_j) &= (1-r_j)^{\alpha_j} (1+r_j)^{\beta_j}, \quad j=1,2
\end{aligned} \quad (30)$$

Tabaka ve yarım düzlemin arasında değme gerilmeleri, değme bölgesinin bittiği noktalardan itibaren sıfır olduğundan integral denklemin indeksi "-1" olmaktadır (Erdoğan ve Gupta, 1972). "-1" indeks için çözüm ele alındığında $\alpha = \beta = 0.5$ olarak alınır.

Gerilmeler için tanımlanan bu ifadeler integral denklemde yerlerine yazılırsa, integral denklem

değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu aşağıdaki denklem takımına indirgenebilir;

$$\sum_{i=1}^N W_i g(r_i) \left[\frac{b}{h} k(s_k, r_i) + \left[\frac{1}{r_i - s_k} \right] \left[\frac{\kappa_1+1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2+1)}{8\mu_2} \right] \right] = \frac{1}{h} M(s) \quad (31)$$

$$\frac{b}{2(a_2 - a_1)} \sum W_i(r_i) g(r_i) = 1 \quad (32)$$

Bu ifadelerde geçen;

$$r_i = \cos \left(\frac{i\pi}{N+1} \right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (33)$$

$$s_k = \cos \left(\frac{\pi(2k-1)}{2(N+1)} \right) \quad (k=1, \dots, N+1) \quad (34)$$

$$W_i^N = \pi \left(\frac{1-r_i^2}{N+1} \right) \quad (i=1, \dots, N) \quad (35)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Denklemlerde geçen $g(r_i)$ bilinmeyen değme gerilme değerleridir ve N tanedir. İntegral denklemden $(N+1)$ tane denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. (34) ifadesindeki $(N/2 + 1)$ 'inci denklem uygunluk şartına denk gelir ve otomatik olarak sağlanmaktadır. Bu ifade denklem sisteminden çıkarıldığında N bilinmeyenli N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözümünden, değme gerilme yayılımı ve yarı değme uzunluğu b hesaplanabilir. Elde edilen değme gerilme değerleri ve değme yarı uzunluklarının (35) denklemini sağlaması gerekir. Seçilen değme bölgeleri b için (34) nolu denklemin çözümünden $g(r_i)$ 'ler hesaplanır ve bulunan değerler (35) nolu denklemde yerine yazılarak eşitliği sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Eşitlik sağlanmadığı takdirde b 'ye artırımlar verilir ve yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu işlemler sonunda bulunacak $g(r_i)$ değerleri (30) ifadesinde yerine yazılarak boyutsuz değme uzunluğu b elde edilmiş olur.

5. Bulgular ve Tartışma

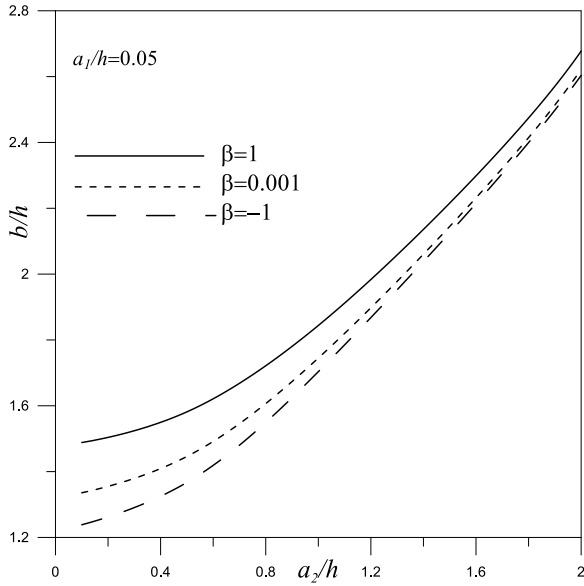
Bu çalışmada yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı (a_1/h) , bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı (a_2/h) , malzeme özellikleri $(\kappa_1/\kappa_2 = 1)$ ve rijitlik parametresi βh gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için boyutsuz yarı değme mesafeleri (b/h) , değme gerilmeleri $(P_1(x)/P_0)$ incelenmiştir.

Tablo 1'de yayılı yükün başlama mesafesi sabit tutulup $(a_1/h = 0.05)$, artan yayılı yükün bitiş mesafesi oranına göre seçilen farklı rijitlik parametresi değerleri için yarı değme mesafesi değişimi gösterilmiştir. Şekil 2'de ise bunların değişimleri grafik olarak verilmektedir. Buna göre yarı değme uzunluğunun a_2/h oranının artması ile arttığı görülmektedir. Ayrıca rijitlik parametresi (β) değeri

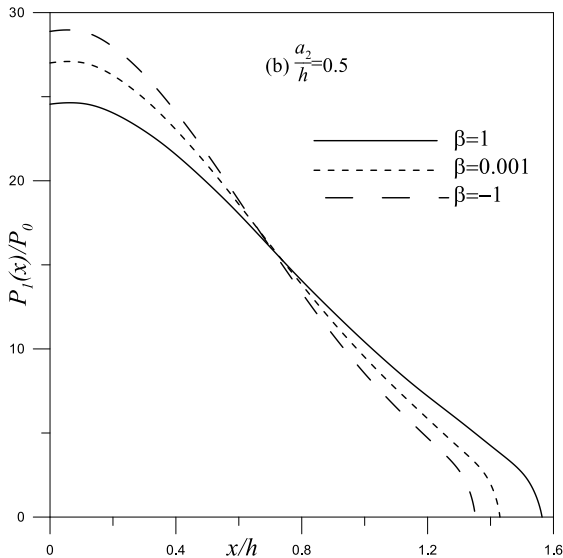
arttıkça yarı değme mesafesi uzunluğunun arttığı görülmektedir.

Tablo 1. Değme uzunluğunun a_2/h değeri ile değişimi ($a_1/h = 0.05$, $\kappa_1/\kappa_2 = 1$)

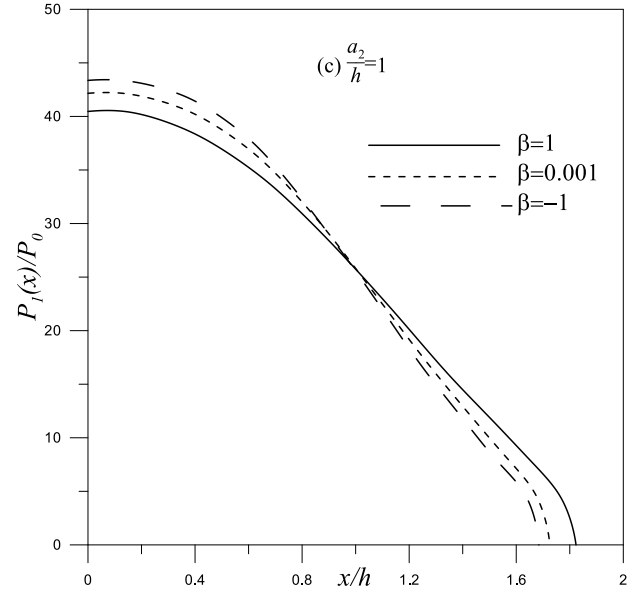
$\frac{a_2}{h}$ ↓	$\beta \rightarrow$	-1	0.001	1
		b/h		
0.10		1.2385	1.3357	1.4883
0.50		1.3671	1.4460	1.5815
1.00		1.7036	1.7449	1.8439
2.00		2.6035	2.6216	2.6774



Şekil 2. Değme uzunluğunun a_2/h değeri ile değişimi ($\kappa_1/\kappa_2 = 1$)

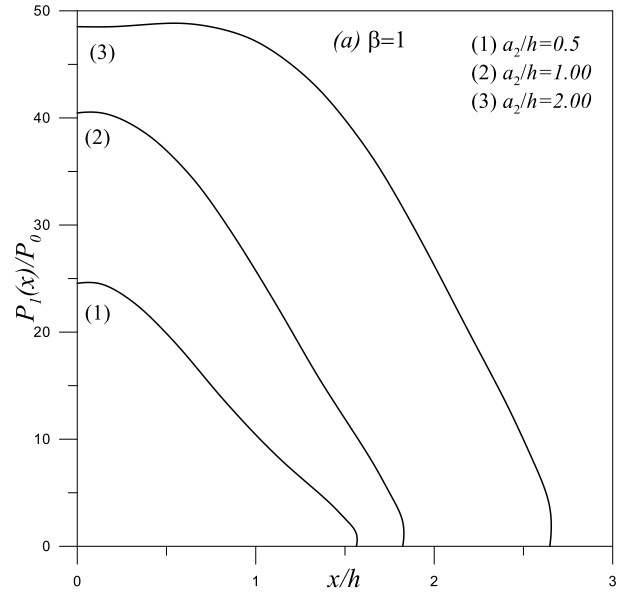


Şekil 3. Çeşitli a_2/h değerleri için değme gerilme yayılışı ($a_2/h = 0.5$, $a_1/h = 0.05$, $\kappa_1/\kappa_2 = 1$)

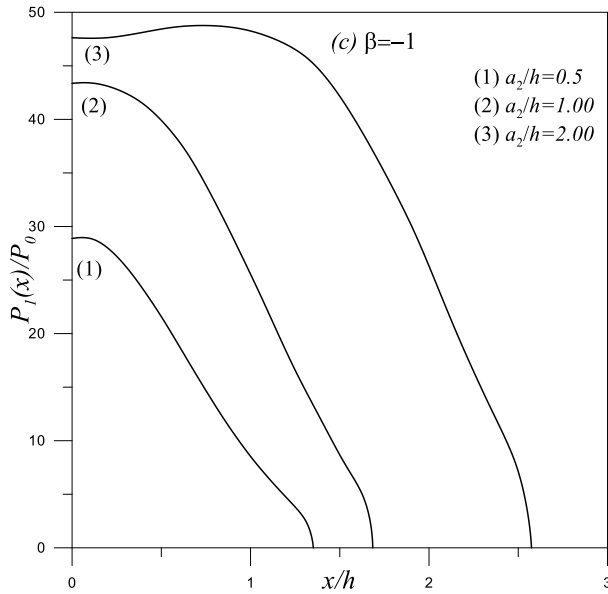


Şekil 4. Çeşitli a_2/h değerleri için değme gerilme yayılışı ($a_2/h = 1$, $a_1/h = 0.05$, $\kappa_1/\kappa_2 = 1$)

Şekil 3 ve Şekil 4 de değme gerilme yayılışlarının, yayılı yükün bitiş mesafesinin tabaka yükselliğine oranı (a_2/h) değerinin 0.5 ve 1 olması durumlarında rijitlik parametresi (β) ile değişimleri gösterilmiştir. Grafiklerden de görüleceği gibi rijitlik parametresi (β) değeri azaldıkça değme gerilmeleri artmaktadır.



Şekil 5. Çeşitli a_2/h değerleri için değme gerilme yayılışı ($a_1/h = 0.05$, $\kappa_1/\kappa_2 = 1$)



Şekil 6. Çeşitli a_2/h değerleri için değme gerilme yayılışı ($a_1/h = 0.05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$)

Şekil 5 ve Şekil 6'da ise bazı sabit rijitlik parametresi değerleri ($\beta = 1$ ve $\beta = -1$) için, (a_2/h) oranı arttıkça tabaka ve yarım düzlem arasındaki boyutsuz değme gerilmelerinin arttığı daha net şekilde görülmektedir.

6. Sonuç

Bu çalışmada, üstten yayılı yük ile yüklenmiş, elastik yarım düzleme oturan FD tabakanın sürtünmesiz değme problemi incelenmiştir. Yapılan çözümde, FD tabakanın kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Söz konusu problemin incelenmesinde, bilinmeyen değme uzunlukları ve değme gerilmeleri elastisite teorisine göre analitik olarak hesaplanmıştır. Rijitlik parametresi, değme mesafesi ve değme gerilme yayılışı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Değme uzunluğu (b/h) ve değme gerilme yayılışı $(P_1(x)/(P_0))$; β ve a_2/h gibi çeşitli malzeme özellikleri ve yükleme durumları için incelenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- $\beta > 0$ olması durumunda FD tabakanın rijitliği alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru artmaktadır. $\beta < 0$ olması halinde ise tam tersi bir durum söz konusudur. Rijitlik parametresi β değeri arttıkça, değme uzunluğu artmaktadır ve yük daha geniş alanlara yayıldığı için değme gerilmeleri azalmaktadır.
- Yük artırıldığında değme uzunluğunun da büyüdüğü görülmektedir. Değme gerilmeleri ise yüke bağlı boyutsuz büyüklükler olarak tanımlandığından yük büyüdükçe bu oranlar küçülmektedir. Bu oranların küçülmesi değme gerilmelerinin küçüldüğü anlamına gelmemektedir. Tam tersi yük büyüdükçe değme yüzeyi ve değme gerilmeleri büyümektedir.

Conflict of Interest / Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

No conflict of interest was declared by the authors.

Kaynaklar

- Abanoz, M., Yaylacı, M., Birinci, A., 2019. Contact problems between a functionally graded layer and a rigid support. *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, 2 (1), 25-35.
- Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E., Yaylacı, M., 2016. A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes. *Acta Mechanica*, 227, 1753-1766.
- Adıyaman, G., Öner, E., Birinci, A., 2017. Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer resting on a rigid foundation. *Acta Mechanica*, 228, 303-317.
- Avcar, M., Mohammed, WKM., (2017). Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin kirişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5,(3), 573-580.
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi. Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 128s.
- Çömez, İ., El-Borgi, S., Kahya, V., Erdöl, R., 2016. Receding contact problem for two layer functionally graded media indented by a rigid punch. *Acta Mechanica*, 227, 2493-2504.
- Çömez, İ., El-Borgi, S., 2017. Contact problem of a graded layer supported by two rigid punches. *Archives of Mechanics*, 11, 1-11.
- Çömez, İ., Güler, M.A., 2017. The contact problem of a rigid punch sliding over a functionally graded bilayer, *Acta Mechanica*, 228, 2237-2249.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R., Keer L., 2006. A receding contact problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 658-674.
- El-Borgi, S., Usman, S., Güler, M.A., 2014. A frictional receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 51, 4462-4476.

- Erdoğan, F., Gupta, G.D., 1972. On the numerical solution of singular integral equations. Quarterly Journal Of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdogan, F., Gupta, G.D., Cook, T.S., 1973. Numerical solution of singular integral equations, in methods of analysis and solution of crack problems, Noordhoff, Groningen.
- Ke, L., Wang, Y., 2006. Two-Dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. International Journal of Solids and Structures, 43, 5779-5798.
- Koizumi, M., 1993. Functionally gradient materials the concept of FGM, Ceramic Transactions, 34, 3-10.
- Krenk, S., 1975. On quadrate formulas for singular integral-equations of 1st and 2nd kind. Quarterly of Applied Mathematics, 33, (3), 225-232.
- Turan, M., Adiyaman, G., Kahya, V., Birinci, A., 2016. Axisymmetric analysis of a functionally graded layer resting on elastic substrate. Structural Engineering and Mechanics, 58, 423-442.
- Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota I., Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials, Japan, 1990.

Ek 1.

$$\begin{aligned}
A_1 &= (\bar{p}(e^{hm_2}(C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4) + e^{hm_3}(C_2D_3D_4 + C_4D_2D_3) + \\
&e^{hm_4}(C_3D_2D_4 + C_2D_3D_4)) + F(e^{h(n_2+n_3)}(C_3D_2D_4 - C_2D_3D_4) + \\
&e^{h(n_2+n_4)}(C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3) + e^{h(n_3+n_4)}(C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4))) / \Delta \\
A_2 &= (\bar{p}(e^{hm_1}(C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3) + e^{hm_3}(C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4) + \\
&e^{hm_4}(C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)) + F(e^{h(n_1+n_3)}(-C_3D_1D_4 + C_1D_3D_4) + \\
&e^{h(n_1+n_4)}(-C_1D_3D_4 + C_4D_1D_3) + e^{h(n_3+n_4)}(-C_4D_1D_3 + C_3D_1D_4))) / \Delta \\
A_3 &= (\bar{p}(e^{hm_1}(-C_2D_1D_4 + C_4D_1D_2) + e^{hm_2}(C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2) + \\
&e^{hm_4}(C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)) + F(e^{h(n_1+n_2)}(-C_1D_2D_4 + C_2D_1D_4) + \\
&e^{h(n_1+n_4)}(C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2) + e^{h(n_2+n_4)}(-C_2D_1D_4 + C_4D_1D_4))) / \Delta \\
A_4 &= (\bar{p}(e^{hm_1}(C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2) + e^{hm_2}(-C_1D_2D_3 + C_3D_1D_2) + \\
&e^{hm_3}(C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)) + F(e^{h(n_1+n_2)}(C_1D_2D_3 - C_2D_1D_4) + \\
&e^{h(n_1+n_3)}(-C_1D_2D_3 + C_3D_1D_2) + e^{h(n_2+n_3)}(C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2))) / \Delta \\
B_1 &= -P_2(\xi) \frac{(\kappa_2 - 1)}{2\xi}
\end{aligned}$$

$$B_2 = -P_2(\xi)$$