G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 16(2):253-266, 2003
ISSN 1303-9709
G.U. Journal of Science 16(2):253-266, 2003

YENİLEME SÜREÇLERİNDE ORTALAMA DEĞER VE VARYANS FONKSİYONLARININ SAYISAL HESABI

Halil AYDOĞDU
*Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06100, Tandoğan, Ankara, TÜRKİYE, aydogdu@*science.ankara.edu.tr

ÖZET

Yenileme süreci ile ilgili uygulamalarda çoğunlukla sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çalışmada, Xie'nin RS yöntemi (1), alışılmış ve durağan yenileme süreçlerine ait varyans fonksiyonlarının ve gecikmeli yenileme sürecinin hem ortalama değer hem de varyans fonksiyonunun sayısal olarak hesaplanmasına uyarlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yenileme süreci, yenileme fonksiyonu, varyans fonksiyonu.

NUMERICAL COMPUTATION OF THE MEAN VALUE AND VARIANCE FUNCTIONS IN RENEWAL PROCESSES

ABSTRACT

Application of renewal process most commonly requires the knowledge of the mean value function and the variance function. In this study, Xie's RS method (1) is adapted to the computation of the variance function for the both ordinary and stationary renewal processes. Furthermore, this adaptation procedure is carried on to the evaluation of the both mean value function and variance function for the delayed renewal process.

Key Words: Renewal process, renewal function, variance function.

1.GİRİŞ

$\{X_n, n=1,2,...\}$ pozitif değerli, bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu rasgele değişkenler bir olayın (yenilemenin) ardışık gerçeklenişleri arasında geçen zaman sürelerini temsil etsinler. $S_0=0$, $S_n = X_1+...+X_n, n\geq 1$ ve t anına kadar yapılan yenilemelerin sayısı $N(t)=\text{maks}\{n: S_n \leq t\}$ rasgele değişkeni olmak üzere $\{N(t), t\geq 0\}$ stokastik sürecine alışılmış anlamda bir yenileme süreci denir. $X_2, X_3, ...$ rasgele değişkenleri aynı F dağılım fonksiyonuna sahip iken X_1 rasgele değişkeni F den farklı bir F_1 dağılım fonksiyonuna sahip ise $\{X_n, n=1,2,...\}$ rasgele değişkenler dizisinin tarif ettiği sürece gecikmeli yenileme süreci denir. Bir gecikmeli yenileme sürecinde X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_1(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-F(y))dy$ ise bu sürece durağan yenileme süreci adı verilir. Burada μ, F dağılımının ortalamasıdır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ alışılmış bir yenileme süreci olmak üzere $t \geq 0$ için $M(t) = E(N(t))$ ve $V(t) = E(N(t) - M(t))^2$ ile tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonu (yenileme fonksiyonu) ve varyans fonksiyonu denir. Ayrıca F dağılım fonksiyonu f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iken $m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$ ile tanımlanan m fonksiyonu yenileme yoğunluğu olarak adlandırılır. $\{N_m(t), t \geq 0\}$ ve $\{N_e(t), t \geq 0\}$ süreçleri sırasıyla bir gecikmeli ve bir durağan yenileme süreci göstermek üzere bu iki sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları $t \geq 0$ için $M_m(t) = E(N_m(t))$, $V_m(t) = E(N_m(t) - M_m(t))^2$ ve $M_e(t) = E(N_e(t))$, $V_e(t) = E(N_e(t) - M_e(t))^2$ ile tanımlanır. M yenileme fonksiyonu için,

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), t \geq 0 \quad , \qquad [1]$$

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x), t \geq 0 \quad , \qquad [2]$$

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx, t \geq 0 \quad , \qquad [3]$$

$$M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x), t \geq 0 \quad , \qquad [4]$$

$$M_{LS}(t) = \frac{F_{LS}(t)}{1-F_{LS}(t)}, t > 0 \qquad [5]$$

yazılabilir (2,3). Burada F^{n*}, F'nin kendi kendisiyle olan n-kez Stieltjes konvolüsyonu ve M_{LS} ve F_{LS} fonksiyonları sırasıyla M ve F fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümleridir. m yenileme yoğunluğu,

$$m(t) = f(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx, t \geq 0 \qquad [6]$$

integral denklemini sağlar [2]. V, M_m, V_m, M_e ve V_e fonksiyonları için,

$$V(t) = M(t)(1-M(t)) + 2\int_0^t M(t-x)dM(x), t \geq 0 \quad , \qquad [7]$$

$$V(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)), t \geq 0 \quad , \qquad [8]$$

$$M_m(t) = F_1(t) + \int_0^t F(t-x)dM_m(x), t \geq 0 \quad , \qquad [9]$$

$$V_m(t) = M_m(t)(1-M_m(t)) + 2\int_0^t M_m(t-x)dM(x), t \geq 0 \quad , \qquad [10]$$

$$M_e(t) = \frac{t}{\mu}, t \geq 0 \qquad [11]$$

ve

$$V_e(t) = \frac{t}{\mu}(1-\frac{t}{\mu}) + \frac{2}{\mu}\int_0^t M(x)dx, t \geq 0 \qquad [12]$$

yazılabilir (2,4).

Yenileme süreçleri ile ilgili uygulamalarda çoğunlukla ortalama değer ve varyans fonksiyonlarına gerek duyulmaktadır. Üstel, hiper üstel, iki parametreli üstel, şekil parametresi doğal sayı olan gamma(Erlang) gibi dağılımlara dayalı yenileme süreçlerinde ortalama değer ve varyans fonksiyonları için analitik ifadeler mevcut olmasına rağmen uygulamada karşılaşılan şekil parametresi doğal sayı olmayan gamma, Weibull, lognormal gibi birçok dağılım için bu fonksiyonların kapalı form ifadesi yoktur. Böylece sayısal yöntemlerin gerekliliği ortaya çıkar. Bu çalışmada ilk olarak literatürde önerilen bazı sayısal yöntemler açıklanmış, daha sonra M yenileme fonksiyonunu [4] integral denkleminden sayısal olarak hesaplayabilen Xie'nin RS yöntemi (1) ele alınmış ve V varyans fonksiyonunun [7] denkleminden sayısal olarak hesaplanmasına uyarlanmıştır. Ayrıca, benzer olarak V_e, M_m ve V_m fonksiyonlarının sırasıyla [12], [9] ve [10] ifadelerinden sayısal olarak elde edilmesi üzerinde durulmuştur.

2. M VE V FONKSİYONLARI İÇİN BAZI SAYISAL YÖNTEMLER

$\{N(t), t \geq 0\}$ alışılmış yenileme sürecinde yenilemeler arası geçen zaman sürelerinin dağılım fonksiyonu F olsun. F dağılım fonksiyonu bilindiğinde, M ve V fonksiyonları bazı özel durumlar dışında analitik olarak elde edilemezler. Bu durumda bu fonksiyonların sayısal olarak hesaplanmaları gerekmektedir. Bu bölümde M ve V fonksiyonlarının sayısal hesabı için literatürde önerilen bazı sayısal yöntemler gözden geçirilecektir.

Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümleri yenileme süreçlerinin teorik olarak incelenmesinde değerli bir araçtır ve onların ters dönüşümlerinin alınması için literatürde çeşitli algoritmalar vardır (5,6). Üstel, hiper üstel ve şekil parametresi doğal sayı olan gamma dağılımı için [5] ifadesi analitik olarak elde edilebilir ve bu ifadenin ters dönüşümü de analitik olarak bulunabilir (7). Fakat uygulamada karşılaşılan birçok dağılım (Weibull, lognormal, ters Gauss gibi) için [5] ifadesi analitik olarak elde edilemez. Analitik ifadeler olmaksızın sayısal olarak ters dönüşümü hesaplamak son derece zor olduğundan Laplace dönüşümleri sayısal hesaplamada sınırlı olarak kullanılır.

Kuvvet Serileri

Bir alternatif yaklaşım kuvvet serisine açılımdır. Özellikle F ölçek parametresi 1 ve şekil parametresi $\alpha > 0$ olan bir Weibull dağılım fonksiyonu, yani $F(x) = 1 - e^{-x^\alpha}, x \geq 0$ olmak üzere Smith ve Leadbetter (8) göstermiştir ki her $t \geq 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha}$ kuvvet serisi mutlak yakınsaktır ve

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha}, t \geq 0 \qquad [13]$$

olur. Burada $\gamma_n = \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}$ olmak üzere,

$$A_n = \gamma_n - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j A_{n-j}, n = 1,2,...$$

dır. [13]'te verilen kuvvet serisi açılımı yardımıyla M(t) sayısal olarak hesaplanabilir. t'nin küçük değerleri için herbir hesaplamada serinin yalnızca ilk dört teriminin kullanılmasının yeterli olduğu bulunmuştur (8). F, α şekil parametreli ve ρ ölçek parametreli bir Weibull dağılım fonksiyonu ise [13]'teki kuvvet serisi açılımında t yerine t/ρ alınmasıyla elde edilen kuvvet serisinden M(t) sayısal olarak hesaplanabilir.
[13]'teki kuvvet serisi her $t \geq 0$ için mutlak yakınsak olduğundan m(t) ve $\int_0^t M(x)dx$ fonksiyonları için sırasıyla,

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{\Gamma(k\alpha)} t^{k\alpha-1}$$

ve

$$\int_0^t M(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{(k\alpha+1)\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha+1} \quad [14]$$

bulunur. m(t) ve $\int_0^t M(x)dx$ sırasıyla yukarıdaki kuvvet serilerinin kullanılmasıyla sayısal olarak hesaplanabilir. Ayrıca White'ın verdiği bir lemma (9) yardımıyla,

$$\int_0^t M(t-x)dM(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha}, t \geq 0 \quad [15]$$

elde edilir. Burada $B_k = \sum_{r=1}^{k-1} A_r A_{k-r}$ biçimindedir. Böylece V varyans fonksiyonu için,

$$V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha} \right] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2B_k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha}, t \geq 0 \quad [16]$$

ifadesine ulaşılır (10). White, (13) ve (15)'te verilen serileri kullanarak t=0.00(0.05)2.45, α=0.5(0.5)3(1)4 ve t_α<2.45, α=5,7,10 olmak üzere t=0.00(0.05)t_α için altı ondalıklı M(t) ve $\sqrt{V(t)}$ değerlerini hesaplamıştır. N(t)'nin daha büyük momentler ve kümülantlarının nasıl hesaplanacağını göstermiş ve aynı zamanda $F^{n*}(t)$'nin hesaplanması için formül sunmuştur (9).

Yenileme süreçlerinde çeşitli fonksiyonlar için verilen serilerin yakınsaklık hızları tayin edilememiştir ve t'nin küçük değerleri için($t \leq 2.45$) hesaplamalar yapılmıştır. t'nin büyük değerleri için yaklaşımların doğruluğu üzerine birşey söylenememiştir. Sayısal işlemlerin karmaşıklığı ve belli önemli dağılımlar için seri açılımların mevcut olmaması bu yaklaşımın uygulanabilirliğini sınırlamaktadır.

Kübik Spline Yöntemi

Yenileme teorisinin uygulanmasına ciddi bir engel uygulamada ortaya çıkan birçok dağılım için $F^{n*}, n > 1$ konvolüsyonunun kapalı formunun mevcut olmamasıdır. Cleroux ve McConalogue (11) f olasılık yoğunluk fonksiyonundan ardışık olarak $F^{n*}, n \geq 1$ ve aynı zamanda $F^{n*} * G^{r*}, n, r \geq 1$ konvolüsyonunun hesaplanması için genel amaçlı bir algoritma vermişlerdir. Bu algoritma bir $[0, T]$ sonlu aralığında F^{n*}'ın bir kübik spline yaklaşımına dayalıdır ve f olasılık yoğunluk fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve analitik olmasını ister, çünkü bir fonksiyonun kübik yaklaşımı fonksiyonun Taylor serisine açılamadığı yerde yetersizdir. Bu yöntem M ve V için sırasıyla [1] ve [8] ifadelerinin gözönüne alınmasıyla M(t) ve V(t)'nin sayısal olarak hesaplanmasını mümkün kılar. Ayrıca bu yöntem yardımıyla yenileme teorisinde ortaya çıkan diğer bazı fonksiyonlar da sayısal olarak hesaplanabilir (12).

Cleroux - McConalogue'nın algoritmasının en önemli kısıtlaması tüm olasılık yoğunluk fonksiyonlarının $[0,\infty)$ aralığında sınırlı olmamasıdır. Bu koşul birçok dağılım için sağlanmasına rağmen şekil parametresi $\alpha<1$ olan gamma ve Weibull dağılım için sağlanmaz. Bu iki dağılım uygulamada karşılaşılan en önemli DFR dağılım örnekleri oluşturduğundan bu sınırlama yöntem için bir engeldir. Aynı derecede açıkca yukarıdaki kadar olmasa bile olasılık yoğunluk fonksiyonu ve her mertebeden türevi orijin civarında sıfır ise kübik spline algoritması doğruluğu azalmış yaklaşımlar üretir. Ters Gauss ve lognormal dağılım için böyle bir durum sözkonusudur.

McConalogue (13), orijin civarında "iyi davranışlı" olmayan olasılık yoğunluk fonksiyonlu dağılımlarla ilgili olarak yarı-analitik sayısal integrasyon teknikler yardımıyla Cleroux ve McConalogue tarafından verilen kübik spline algoritmasını genişletmiştir. Genişletilmiş algoritma yukarıda bahsedilen bazı kısıtlamaları kaldırır. Bu algoritma orijin civarında F'nin türevi F''nün sınırsız olmasına izin verir, fakat $n \geq 2$ için F^{n*}'ın türevinin sınırlı olmasını ister. Genişletilmiş algoritmada $n \geq 2$ için F^{n*}, (0,T) aralığında bir spline gösterime sahip iken F orijine yakın yerlerde bir spline gösterime sahip değildir. Bu yöntem şekil parametresi $\alpha \geq 1/2$ için Weibull ve gamma dağılımının her ikisinin konvolüsyonuna izin verir. Ayrıca, olasılık yoğunluk fonksiyonu orijinde sınırlı olan bir dağılıma uygulanırsa orijin civarında yaklaşımın doğruluğunu artırır, bu suretle lognormal ve ters Gauss dağılımlarına uygulandığı zaman çok daha güvenilir sonuçlar elde edilir. Baxter ve diğerleri (14), genişletilmiş kübik spline algoritmasını kullanarak uygulamada çoğunlukla ortaya çıkan beş dağılım (gamma, Weibull, lognormal, ters Gauss ve kesilmiş normal) için ölçek parametresi 1 olmak üzere her bir dağılımın geniş bir değişiminde t=0.05(0.05)20 için M(t), V(t) ve $\int_0^t M(x)dx$ fonksiyonlarının tablolarını oluşturmuşlardır.

Kübik spline algoritması verilen herhangi F dağılım fonksiyonu için $F^{n*}(t)$'nin hesabını yapan en iyi yöntem değildir. Örneğin, t küçük iken Weibull dağılımı için kuvvet serisi ile yaklaşımda bulunmak çok daha uygun olabilir. Benzer olarak $F(t;\alpha)$, α şekil parametresi ile gamma dağılım fonksiyonu ise $F^{n*}(t;\alpha)=F(t;n\alpha)$ olup tam olmayan gamma fonksiyonunun sayısal olarak elde edilmesini sağlayan bir algoritma yardımıyla hesaplanabilir (15).

Doğrudan Çözüm

M(t) yenileme fonksiyonu [2], [3] ya da [4] integral denkleminden sayısal olarak elde edilebilir. Literatürde bu integral denklemlerin sayısal çözümleri ile ilgili bir takım sayısal yöntemler öne sürülmüştür. Örneğin Deligönül ve Bilgan (16), [3] integral denkleminin ve Xie (1), [4] integral dekleminin sayısal çözümü ile ilgilenmiştir. Diğer taraftan Soland (17), [6] integral denkleminin sayısal çözümü ile m(t) yenileme yoğunluk fonksiyonunun hesaplanmasını savunmuş ve karşılık gelen M(t), V(t) ve $V_e(t)$ fonksiyonlarının sayısal integrasyon ile sayısal olarak hesaplanması üzerinde durmuştur (17). Şekil parametresi α=2(0.25)4(1)6 olan dağılımlar için gamma durumunda t=0.01(0.01)2 ve Weibull durumunda t=0.01(0.01)4 zamanları için M(t), V(t) ve $V_e(t)$ fonksiyonlarının sayısal olarak değerlerini elde eder. Soland aynı zamanda üç fonksiyon için asimptotik ifadeler ve asimptotik formülün yüzdelik hatası belirlenmiş bir değerden küçük kalacak biçimde t'ye eşit ya da t'den büyük tüm zamanlar için en küçük t zamanını gösteren çizelgeler vermiştir. Herbir durumda ölçek parametresi dağılımın ortalaması 1 olacak şekilde seçilmiştir. Bu seçim yöntem için bir kısıtlama olarak görünebilir, fakat bu gerçek bir kısıtlama değildir, çünkü dağılım ortalaması 1 olacak şekilde kolayca yeniden ölçeklendirilebilir. Soland'ın yöntemi etkili olmasına rağmen uygulaması sınırlıdır. Özellikle f' nin sıfır noktasındaki sonsuz türevine bağlı olarak $\alpha<2$ için sonuçlar yeterince doğru değildir.

[2] ve [4] integral denklemlerinin sayısal çözümü daha kolay görünmesine rağmen yukarıda görüldüğü gibi [1], [3] ve [6] denklemlerinin çözümleri ile ilgilenilmiştir. Bunun temel nedeni $\int f(t-s)g(s)ds$ tipindeki konvolüsyon integrallerinin hesaplanması yöntemlerinin sayısal analizde ilgi uyandırıcılığıdır. [3] denklemi ikinci çeşit bir Volterra integral denklemidir. Bu tür denklemlerin çözümü için bir hayli sayısal yöntemler mevcuttur (18).

3. RS YÖNTEMİ

Xie (1), M(t) yenileme fonksiyonunun [4] integral denkleminden sayısal olarak çözümü için RS olarak adlandırılan bir yöntem vermiştir. RS yöntemi kolay olarak programlanabilmesi, hemen hemen tüm durumlarda basitliği ve yakınsaklığı ile iyi sonuçlar verir; diğer bilinen yöntemler ile karşılaştırıldığında uygulanabilirliği daha fazladır. Bu yöntem özellikle f olasılık yoğunluk fonksiyonu singüler noktalara sahip iken faydalıdır. Bu bölümde, M (t) yenileme fonksiyonunun sayısal hesabı için verilen RS yöntemi üzerinde durulacak ve bu yöntem $V(t)$, $V_e(t)$, $M_m(t)$ ve $V_m(t)$ fonksiyonlarının sayısal olarak hesaplanmasına uyarlanacaktır.

3.1. M(t)'nin Sayısal Hesabı

Riemann-Stieltjes integralin tanımının ışığı altında, $\int_a^b g(x)dh(x)$ integrali, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\Delta=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ olmak üzere,

$$\int_a^b g(x)dh(x) \approx \sum_{i=1}^{n} g((x_i+x_{i-1})/2)(h(x_i)-h(x_{i-1})) \qquad [17]$$

şeklinde yazılabilir. Riemann-Stieltjes integralin sayısal hesaplanması için kullanılabilecek bu formülde parçalanmanın normu küçüldükçe yaklaşımın daha iyi olacağı açıktır.

Şimdi [4] denklemini, yani

$$M(t)=F(t)+\int_0^t F(t-x)dM(x),\, t\geq 0$$

integral denklemini gözönüne alalım. t verilmiş bir değer ve $\{t_0,t_1,...,t_n\}$ $0=t_0<t_1<...<t_n=t$ koşulunu sağlayan bir parçalanma olsun. Bu durumda,

$$M(t_i)=F(t_i)+\int_0^{t_i} F(t_i-x)dM(x)$$

olup [17] ifadesinin kullanılmasıyla,

$$M(t_i)\approx F(t_i)+\sum_{j=1}^{i} F(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M(t_j)-M(t_{j-1}))$$

bulunur. Böylece $T_i=\sum_{j=1}^{i-1} F(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M(t_j)-M(t_{j-1}))$ alındığında ardışık olarak, $\tilde{M}(t_0)=0$ olmak üzere,

$$\tilde{M}(t_i)=\frac{F(t_i)+T_i-F(t_i-(t_i+t_{i-1})/2)\tilde{M}(t_{i-1})}{1-F(t_i-(t_i+t_{i-1})/2)},\, i=1,2,...,n \qquad [18]$$

ile yaklaşık olarak hesaplanabilir (1).

F dağılım fonksiyonu yerine f olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, yani F'nin kapalı bir formda ifadesi yok ise F dağılım fonksiyonu,

$$F(t_i) = F(t_{i-1}) + f((t_i + t_{i-1})/2)\frac{t}{n}, i = 1,2,...,n$$

formülü ile kolaylıkla hesaplanabilir.

[2] ve [4] denklemleri teorik olarak denktirler. Literatürde en yaygın olanı [2] denklemi olmasına rağmen RS yöntemi [4] denkleminin çözümüne kısıtlanmıştır. Eşit olmayan adım uzunlukları kullanılırsa [4] denklemi ardışık çözüm için daha basit görünür. Aynı zamanda [2] yerine [4]'ün kullanılmasının temel avantajı F(t)'nin büyük t'ler için hemen hemen sabit olmasıdır ve böylece $F(t_i) - F(t_{i-1})$ deki yuvarlatma hatası nispeten büyük olacaktır.

3.2. V(t)'nin Sayısal Hesabı

V(t) varyans fonksiyonu için [7]'de verilen

$$V(t) = M(t) - M^2(t) + 2\int_0^t M(t-x)dM(x), t \geq 0$$

ifadesini gözönüne alalım. t verilmiş bir değer ve $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ koşulunu sağlayan bir parçalanma olsun. [17]'den,

$$\int_0^{t_i} M(t_i - x)dM(x) \approx \sum_{j=1}^{i} M(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(M(t_j) - M(t_{j-1}))$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$V(t_i) \approx M(t_i)(1 - M(t_i)) + 2\sum_{j=1}^{i} M(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(M(t_j) - M(t_{j-1})), i = 1,2,...,n$$

bulunur. Böylece $V(t_i)$,

$$\tilde{V}(t_i) = \tilde{M}(t_i)(1 - \tilde{M}(t_i)) + 2\sum_{j=1}^{i} \tilde{M}(t_i - (t_j + t_{j-1})/2)(\tilde{M}(t_j) - \tilde{M}(t_{j-1})), i = 1,2,...,n \qquad [19]$$

ile yaklaşık hesaplanabilir.

M'nin [18]'den sayısal olarak elde edilmesi için $[0,t]$ aralığının yukarıdaki $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ parçalanması kullanılırsa [19]'dan V'nin hesabı için i=1,2,…,n olmak üzere M nin t_i noktaları dışında (t_{i-1}, t_i) alt aralıklarındaki bazı noktalarda da değerlerine gerek duyulur. Böylece [18] ve [19]'dan sırasıyla M ve V'nin hesabı için $[0,t]$ aralığının aynı parçalanması kullanılamaz. V'nin hesabı için $0 = t'_0 < t'_1 < ... < t'_m = t$ koşulunu sağlayan $\{t'_0, t'_1, ..., t'_m\}$ parçalanması kullanılırken (18)'den M'nin hesabı için i=1,2,…,m olmak üzere j=1,2,…,i için $M(t'_{j-1})$, $M(t'_j)$ ve $M(t'_i - (t'_j + t'_{j-1})/2)$ nin hesaplanmasını temin edecek [0,t] aralığının bir parçalanmasının kullanılması gerekir. M'nin hesabı için eşit uzunluklu alt aralıklar, yani $t_i = i\frac{t}{n}, i = 0,1,...,n$ kullanılmak üzere V'nin hesabı için $t'_i = 2it_1$, $i = 0,1,...,n/2$ noktalarına dayalı parçalanma kullanıldığında [19] ifadesindeki $\tilde{M}(t'_{j-1})$, $\tilde{M}(t'_j)$ ve $\tilde{M}(t'_i - (t'_j + t'_{j-1})/2)$ değerleri [18] ifadesinden kolaylıkla elde edilebilir. $t_0 = 0$, m=n/2 olmak üzere $\Delta_1 = \{t_0, t_1, 2t_1, ..., nt_1\}$ ve $\Delta_2 = \{t_0, 2t_1, 4t_1, ..., 2mt_1\}$ sırasıyla [18]'den M'nin ve [19]'dan V'nin hesaplanmasında kullanılan [0,t] aralığının parçalanmaları olsun. $F((i+0.5)t/n)$ yerine $F(i)$, $\tilde{M}(t_i)$ yerine $M(i)$, $F(t_i)$ yerine $G(i)$ ve $\tilde{V}(t_i)$ yerine $V(i)$ alınırsa [18] ve [19]'dan sırasıyla,

$$M(i)=\frac{G(i)+\sum_{j=1}^{i-1}F(i-j)(M(j)-M(j-1))-F(0)M(i-1)}{1-F(0)},i=1,2,\ldots,n \qquad [20]$$

ve

$$V(i)=M(2i)(1-M(2i))+2\sum_{j=1}^{i}M(2(i-j)+1)(M(2j)-M(2(j-1))),i=1,2,\ldots,m \qquad [21]$$

bulunur. M ve V'nin bilgisayarda sayısal hesabı için sırasıyla [20] ve [21] ifadelerinin kullanılması yapılacak olan bilgisayar programını hem basitleştirir hem de kolaylaştırır.

3.3. $V_e(t)$'nin Sayısal Hesabı

Durağan bir yenileme sürecin $V_e(t)$ varyans fonksiyonu için [12]'de verilen

$$V_e(t)=\frac{t}{\mu}-\frac{t^2}{\mu^2}+\frac{2}{\mu}\int_0^t M(x)dx,t\geq 0$$

ifadesini gözönüne alalım. t verilmiş bir değer ve $\{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$ $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=t$ koşulunu sağlayan bir parçalanma olsun. Riemann integralin tanımının ışığı altında,

$$\int_0^{t_i}M(x)dx\approx\sum_{j=1}^{i}M((t_j+t_{j-1})/2)(t_j-t_{j-1})$$

yazılabilir. Böylece $V_e(t_i)$,

$$\tilde{V}_e(t_i)=\frac{t_i}{\mu}-\frac{t_i^2}{\mu^2}+\frac{2}{\mu}\sum_{j=1}^{i}\tilde{M}((t_j+t_{j-1})/2)(t_j-t_{j-1}),i=1,2,\ldots,m \qquad [22]$$

ile yaklaşık hesaplanabilir.

[18]'den M'nin ve [22]'den V_e'nin hesaplanmasında kullanılacak $[0,t]$ aralığının parçalanmaları sırasıyla bir önceki kesimde verilen $\Delta_1=\{t_0,t_1,2t_1,\ldots,nt_1\}$ ve $\Delta_2=\{t_0,2t_1,4t_1,\ldots,2mt_1\}$ olmak üzere $\tilde{M}(t_i)$ yerine M(i) ve $\tilde{V}_e(t_i)$ yerine $V_e(i)$ alınırsa,

$$V_e(i)=\frac{t_i}{\mu}(1-\frac{t_i}{\mu})+\frac{4t_i}{\mu}\sum_{j=1}^{i}M(2j-1),i=1,2,\ldots,m \qquad [23]$$

bulunur.

3.4. $M_m(t)$ ve $V_m(t)$ 'nin Sayısal Hesabı

Gecikmeli bir yenileme sürecinin ortalama değer ve varyans fonksiyonu için sırasıyla [9] ve [10]'da verilen

$$M_m(t)=F_1(t)+\int_0^t F(t-x)dM_m(x),t\geq 0$$

ve

$$V_m(t)=M_m(t)(1-M_m(t))+2\int_0^t M_m(t-x)dM(x),t\geq 0$$

ifadelerini gözönüne alalım. t verilmiş bir değer ve $\{t_0,t_1,...,t_n\}$ $0=t_0<t_1<...<t_n=t$ şartını sağlayan bir parçalanma olsun. Bu durumda [17] ifadesinin kullanılmasıyla,

$$M_m(t_i)\approx F_1(t_i)+\sum_{j=1}^{i}F(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M_m(t_j)-M_m(t_{j-1}))$$

bulunur. Böylece $U_i=\sum_{j=1}^{i-1}F(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M_m(t_j)-M_m(t_{j-1}))$ alındığında $M_m(t_i)$ ardışık olarak $\tilde{M}_m(t_0)=0$ olmak üzere,

$$\tilde{M}_m(t_i)=\frac{F_1(t_i)+U_i-F(t_i-(t_i+t_{i-1})/2)\tilde{M}_m(t_{i-1})}{1-F(t_i-(t_i+t_{i-1})/2)},i=1,2,...,n \qquad [24]$$

ile yaklaşık hesaplanabilir.

t verilmiş bir değer ve $\{t_0,t_1,...,t_m\}$ $0=t_0<t_1<...<t_m=t$ koşulunu sağlayan bir parçalanma olsun. [17]'den,

$$\int_0^{t_i}M_m(t_i-x)dM(x)\approx\sum_{j=1}^{i}M_m(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M(t_j)-M(t_{j-1})),i=1,2,...,m$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$V_m(t_i)\approx M_m(t_i)(1-M_m(t_i))+2\sum_{j=1}^{i}M_m(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(M(t_j)-M(t_{j-1}))$$

bulunur. Böylece $V_m(t_i)$,

$$\tilde{V}_m(t_i)=\tilde{M}_m(t_i)(1-\tilde{M}_m(t_i))+2\sum_{j=1}^{i}\tilde{M}_m(t_i-(t_j+t_{j-1})/2)(\tilde{M}(t_j)-\tilde{M}(t_{j-1})),i=1,2,...,m \qquad [25]$$

ile yaklaşık hesaplanabilir.

[18]'den M'nin ve [24]'ten M_m'nin hesaplanmasında kullanılacak $[0,t]$ aralığının parçalanması t_1 eşit adım uzunluklu $\Delta_1=\{t_0,t_1,2t_1,...,nt_1\}$ olmak üzere [25]'ten V_m'nin hesaplanmasında kullanılacak $[0,t]$ aralığının parçalanması $2t_1$ eşit adım uzunluklu $\Delta_2=\{t_0,2t_1,4t_1,...,2mt_1\}$ olsun. Burada $t_0=0$ ve m=n/2 dir. $F((i+0.5)t/n)$ yerine $F(i)$, $\tilde{M}_m(t_i)$ yerine $M_m(i)$, $F_1(t_i)$ yerine $F_1(i)$, $\tilde{M}(t_i)$ yerine $M(i)$ ve $\tilde{V}_m(t_i)$ yerine $V_m(i)$ alınırsa [24] ve [25]'ten sırasıyla,

$$M_m(i)=\frac{F_1(i)+\sum_{j=1}^{i}F(i-j)(M_m(j)-M_m(j-1))-F(0)M_m(i-1)}{1-F(0)},i=1,2,...,n \qquad [26]$$

ve

$$V_m(i)=M_m(2i)(1-M_m(2i))+2\sum_{j=1}^{i}M_m(2(i-j)+1)(M(2j)-M(2(j-1))),i=1,2,...,m \qquad [27]$$

elde edilir.

4. ÖRNEKLER

Bu bölümde M(t), V(t), $V_e(t)$, $M_m(t)$ ve $V_m(t)$ 'nin sayısal hesabı için sırasıyla [18], [19], [22], [24] ve [25]'te verilen formüllerin işlerliğini görmek amacıyla bazı örnekler verilmektedir.

(i) F, $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ parametreleri ile gamma dağılım fonksiyonu, yani $F(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}, x \geq 0$ olsun. Bu dağılımla ilgili yenileme sürecinin yenileme ve varyans fonksiyonu,

$$M(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}, t \geq 0$$

ve

$$V(t) = \frac{1}{16} + \frac{t}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{16}e^{-4t}, t \geq 0$$

olur (7). Bu durumda $\int_0^t M(x)dx = \frac{1}{8} - \frac{t}{4} + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}e^{-2t}$ bulunur. Böylece yukarıdaki F dağılım fonksiyonuna dayalı durağan yenileme sürecinin varyans fonksiyonu için,

$$V_e(t) = \frac{1}{8} + \frac{t}{4} - \frac{1}{8}e^{-2t}, t \geq 0$$

analitik ifadesi elde edilir. Uygulama için,

$$\Delta_1^1{:}0.00(0.01)8.00, \Delta_2^1{:}0.00(0.02)8.00 (n = 800, m = 400, \|\Delta_1^1\| = 0.01, \|\Delta_2^1\| = 0.02)$$

$$\Delta_1^2{:}0.00(0.05)8.00, \Delta_2^2{:}0.00(0.10)8.00 (n = 160, m = 80, \|\Delta_1^2\| = 0.05, \|\Delta_2^2\| = 0.10)$$

$$\Delta_1^3{:}0.00(0.10)8.00, \Delta_2^3{:}0.00(0.20)8.00 (n = 80, m = 40, \|\Delta_1^3\| = 0.10, \|\Delta_2^3\| = 0.20)$$

eşit aralıklı parçalanmaları alınarak [20], [21] ve [23] formülleri yardımıyla Basic derleyicisinde yazılan bir bilgisayar programı ile sırasıyla $\widetilde{M}(t_i)$, i= 1,2,…,n , $\widetilde{V}(t_i)$ ve $\widetilde{V}_e(t_i)$, i=1,2,…,m değerleri hesaplandı. Bu değerlerin bir özeti ve M(t), V(t) ve $V_e(t)$ için yukarıdaki analitik ifadelerden elde edilen gerçek değerler ile Çizelge 1, Çizelge 2 ve Çizelge 3 oluşturuldu. Bu üç tablodan görüldüğü gibi, parçalanmaların normu küçüldükçe $\tilde{}(t_i)$, $\widetilde{V}(t_i)$ ve $\widetilde{V}_e(t_i)$ değerleri gerçek $M(t_i), V(t_i)$ ve $V_e(t_i)$ değerlerine daha yakın çıkmaktadır. $\tilde{}(t_i)$'nin hesabı için 1/100, $\widetilde{V}(t_i)$ ve $\widetilde{V}_e(t_i)$'nin hesabı için 2/100 adım uzunluğu gerçekten yeterince iyi görünmektedir. $\widetilde{M}$'nın hesabı için 1/10, $\widetilde{V}$ ve $\widetilde{V}_e$'nin hesabı için 2/10 adım uzunlukları bile $\mp\%1$ dahilinde bir göreli hata ile pratik kullanım için yeterince iyidir.

(ii) F, $\alpha = 3$ ve $\beta = 1$ parametreleri ile Weibull dağılım fonksiyonu, yani $F(x) = 1 - e^{-x^3}, x \geq 0$ olsun. Daha önceden de söylendiği gibi, bu dağılıma dayalı yenileme sürecinin yenileme ve varyans fonksiyonu analitik olarak mevcut değildir. Aynı zamanda bu dağılıma dayalı durağan yenileme sürecin varyans fonksiyonu için de analitik bir ifade yoktur. $\Delta_1{:}0.00(0.01)1.2$, $\Delta_2{:}0.00(0.02)1.2$ ($n = 120, m = 60$, $\|\Delta_1\| = 0.01, \|\Delta_2\| = 0.02$) eşit aralıklı parçalanmaları alınarak, [20], [21] ve [23] formülleri yardımıyla Basic derleyicisinde yazılan bir bilgisayar programı ile sırasıyla $\widetilde{M}(t_i), i = 1,2,...,n$, $\widetilde{V}(t_i)$ ve $\widetilde{V}_e(t_i), i = 1,2,...,m$ değerleri hesaplandı. Bu değerlerin bir özeti Çizelge 4'te verildi. Bu çizelgede aynı zamanda [13], [16] ve [14]'teki seriler yardımıyla elde edilen $M(t)$, V(t) ve $V_e(t)$'nin yaklaşık değerleri sırasıyla $M'(t)$, $V'(t)$ ve $V'_e(t)$

sütunlarında, ayrıca Baxter ve diğerleri (14) tarafından genelleştirilmiş kübik spline algoritması ile elde edilen değerler de sırasıyla $M''(t)$, $V''(t)$ ve $V''_e(t)$ sütunlarında sunulmaktadır. $M'(t)$, $V'(t)$ ve $V'_e(t)$ değerleri [13], [16] ve [14]' teki serilerin kullanılmasıyla Basic derleyicisinde yazılan bir bilgisayar programı ile serilerin ilk on teriminin hesaplanmasıyla elde edilmiştir. $M''(t)$, $V''(t)$ ve $V''_e(t)$ değerleri de Baxter ve diğerlerinin (14) makalesinden alınmıştır. Seri açılımların kullanılmasıyla elde edilen $'(t)$, $V'(t)$ ve $V'_e(t)$ değerleri hemen hemen doğru değerler olarak kabul edilebilir. Çizelge 4'ten görüldüğü gibi, $\tilde{M}(t)$,$\tilde{V}(t)$ ve $\tilde{V}_e(t)$ değerleri sırasıyla $'(t)$ $V'(t)$ ve $V'_e(t)$ değerlerine hemen hemen eşit çıkmıştır.

(iii) F_1 ve F sırasıyla $\alpha = 2, \beta = 1.25$ ve $\alpha = 2, \beta = 1$ parametreli gamma dağılım fonksiyonları olsun. M_m için ve M fonksiyonlarına bağlı bir ifade,

$$M_m(t) = F_1(t) + \int_0^t M(t-x)dF_1(x), t \geq 0$$

olur (2). Bu durumda $F_1(t) = 1 - e^{-t/1.25} - \frac{t}{1.25} e^{-t/1.25}, t \geq 0$ ve $M(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2t}, t \geq 0$ olduğu gözönüne alınarak, yukarıda verilen F_1 ve F dağılım fonksiyonlarına dayalı gecikmeli yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonu,

$$M_m(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{9} e^{-2t} + \frac{7}{18} e^{-8t/10} + \frac{1}{30} t e^{-8t/10}, t \geq 0 \qquad [28]$$

olarak bulunur. Burada,

$$\int_0^t M_m(t-x)dM(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{31}{32} - \frac{3}{4} t + \frac{t^2}{4} - \left(\frac{7}{54} + \frac{t}{9}\right)e^{-2t} - \left(\frac{725}{864} + \frac{5}{72} t\right)e^{-8t/10}\right), t \geq 0$$

olduğu açıktır. Böylece, [10]'dan bu gecikmeli yenileme sürecin varyans fonksiyonu için,

$$V_m(t) = \frac{7}{32} + \frac{t}{4} - \left(\frac{53}{864} + \frac{141}{360} t + \frac{1}{30} t^2\right)e^{-8t/10} - \left(\frac{49}{324} + \frac{7}{270} t + \frac{t^2}{900}\right)e^{-8t/5} + \left(\frac{5}{34} - \frac{2}{9} t\right)e^{-2t}$$

$$-\left(\frac{7}{81} + \frac{t}{135}\right)e^{-14t/5} - \frac{1}{81} e^{-4t}, t \geq 0 \qquad [29]$$

analitik ifadesi elde edilir. Uygulama için,

$$\Delta_1^1{:}0.00(0.01)8.00, \Delta_2^1{:}0.00(0.02)8.00 (n = 800, m = 400, \|\Delta_1^1\| = 0.01, \|\Delta_2^1\| = 0.02)$$

$$\Delta_1^2{:}0.00(0.05)8.00, \Delta_2^2{:}0.00(0.10)8.00 (n = 160, m = 80, \|\Delta_1^2\| = 0.05, \|\Delta_2^2\| = 0.10)$$

$$\Delta_1^3{:}0.00(0.10)8.00, \Delta_2^3{:}0.00(0.20)8.00 (n = 80, m = 40, \|\Delta_1^3\| = 0.10, \|\Delta_2^3\| = 0.20)$$

eşit aralıklı parçalanmaları alınarak, [26] ve [27] formülleri yardımıyla Basic derleyicisinde yazılan bir bilgisayar programı ile sırasıyla $\tilde{M}_m(t_i), i = 1,2,...,n$ ve $\tilde{V}_m(t_i), i = 1,2,...,m$ değerleri hesaplandı. Bu değerlerin bir özeti ile Çizelge 5 oluşturuldu. Bu tablo aynı zamanda sırasıyla [28] ve [29] ifadelerinden elde edilen gerçek $M_m(t)$ ve $V_m(t)$ değerlerini de içerir.

Çizelge 5'ten görüldüğü gibi, parçalanmaların normu küçüldükçe $\tilde{M}_m(t_i)$ ve $\tilde{V}_m(t_i)$ değerleri gerçek $M_m(t_i)$ ve $V_m(t_i)$ değerlerine daha yakın çıkmaktadır. $\tilde{M}_m(t_i)$'nin hesaplanmasında kullanılan 1/100, 1/20 ve 1/10 adım uzunlukları için sırasıyla hemen hemen tüm $\tilde{M}_m(t_i)$ değerlerin hatasının mutlak değeri 0.000001 civarında veya daha küçük, 0.00002 civarında veya daha küçük ve 0.0001 civarında veya daha küçüktür. $\tilde{M}_m(t_i)$'nin hesabı için 1/100, 1/20 ve 1/10 adım uzunlukları kullanılırken $\tilde{V}_m(t_i)$'nin hesabı için sırasıyla 1/50, 1/10, 1/5 adım uzunluklarının kullanılması durumunda hemen hemen tüm $\tilde{V}_m(t_i)$ değerlerin hatasının mutlak değeri sırasıyla 0.00001 civarında veya daha küçük, 0.0002 civarında veya daha küçük ve 0.001 civarında veya daha küçüktür. Böylece $\tilde{M}_m$ ve $\tilde{V}_m$'nin hesabı için sırasıyla 1/100 ve 1/50 adım uzunluğu yeterince iyidir. $\tilde{}_m$'nin hesabı için 1/10 ve $\tilde{V}_m$'nin hesabı için 2/10 adım uzunlukları bile pratik kullanım için yeterince iyi olarak düşünülebilir.

Bu çalışmada, yenileme süreçlerinin ortalama değer ve varyans fonksiyonlarının sayısal hesabı için ele alınan RS yöntemi diğer yöntemlere göre daha basit ve kolay programlanabilirdir. Hemen hemen tüm durumlarda iyi sonuçlar vermektedir. Bundan dolayı uygulanabilirliği daha fazladır.

Çizelge 1. $\alpha = 2,\beta = 1$ parametreli gamma dağılımlı yenileme sürecinde $\tilde{M}(t)$ değerleri

t	M(t)	$\tilde{M}(t)(\Delta_1^1)$	$\tilde{M}(t)(\Delta_1^2)$	$\tilde{M}(t)(\Delta_1^3)$
0.2	0,017580	0,017580	0,017582	0,017586
0.4	0,062332	0,062332	0,062337	0,062352
0.6	0,125299	0,125299	0,125307	0,125334
0.8	0,200474	0,200475	0,200486	0,200524
1.0	0,283834	0,283834	0,283849	0,283896
2.0	0,754579	0,754580	0,754603	0,754674
3.0	1,250620	1,250621	1,250645	1,250722
4.0	1,750084	1,750084	1,750110	1,750188
5.0	2,250012	2,250013	2,250037	2,250116
8.0	3,750000	3,749999	3,750027	3,750104

Çizelge 2. $\alpha = 2,\beta = 1$ parametreli gamma dağılımlı yenileme sürecinde $\tilde{V}(t)$ değerleri

t	V(t)	$\tilde{V}(t)(\Delta_2^1)$	$\tilde{V}(t)(\Delta_2^2)$	$\tilde{V}(t)(\Delta_2^3)$
0.2	0,017385	0,017385	0,017399	0,017442
0.4	0,060016	0,060018	0,060060	0,060193
0.6	0,116472	0,116475	0,116550	0,116783
0.8	0,179194	0,179198	0,179303	0,179630
1.0	0,243688	0,243693	0,243824	0,244231
2.0	0,544163	0,544172	0,544376	0,545012
3.0	0,808782	0,808791	0,809028	0,809767
4.0	1,061829	1,061841	1,062102	1,062922
5.0	1,312387	1,312396	1,312687	1,313584
8.0	2,062500	2,062520	2,062873	2,064014

Çizelge 3. $\alpha = 2, \beta = 1$ parametreli gamma dağılımlı durağan yenileme surecinde $\tilde{V}_e(t)$ değerleri

t	$V_e(t)$	$\tilde{V}_e(t)(\Delta_2^1)$	$\tilde{V}_e(t)(\Delta_2^2)$	$\tilde{V}_e(t)(\Delta_2^3)$
0.2	0,091210	0,091207	0,091142	0,090937
0.4	0,168834	0,168829	0,168720	0,168380
0.6	0,237351	0,237345	0,237207	0,236780
0.8	0,299763	0,299756	0,299601	0,299118
1.0	0,358083	0,358076	0,357910	0,357394
2.0	0,622711	0,622703	0,622534	0,622006
3.0	0,874690	0,874684	0,874535	0,874072
4.0	1,124958	1,124952	1,124828	1,124442
5.0	1,374994	1,374989	1,374890	1,374583
8.0	2,125000	1,124998	2,124974	2,124903

Çizelge 4. $\alpha = 3,\ \beta = 1$ parametreli Weibull dağılım fonksiyonu için $\tilde{M}(t)$, $M'(t)$, $M''(t)$, $\tilde{V}(t)$, $V'(t)$, $V''(t)$, $\tilde{V}_e(t)$, $V_e'(t)$ ve $V_e''(t)$ değerleri

t	$\tilde{M}(t)$	$M'(t)$	$M''(t)$	$\tilde{V}(t)$	$V'(t)$	$V''(t)$	$\tilde{V}_e(t)$	$V_e'(t)$	$V_e''(t)$
0.1	0,001000	0,001000	0,0010	0,000999	0,000999	0,0010	0,099499	0,099500	0,102
0.2	0,007971	0,007971	0,0080	0,007914	0,007914	0,0080	0,174697	0,174701	0,176
0.3	0,026675	0,026675	0,0267	0,026036	0,026036	0,0261	0,227583	0,227593	0,230
0.4	0,062197	0,062197	0,0622	0,058734	0,058732	0,0588	0,261374	0,261391	0,263
0.5	0,118263	0,118263	0,1183	0,105801	0,105798	0,1058	0,280288	0,280313	0,282
0.6	0,196488	0,196487	0,1965	0,162343	0,162337	0,1624	0,289152	0,289185	0,290
0.7	0,295812	0,295811	0,2959	0,219261	0,219250	0,2193	0,292865	0,292905	0,295
0.8	0,412406	0,412404	0,4125	0,265892	0,265876	0,2659	0,295774	0,295819	0,297
0.9	0,540244	0,540242	0.5403	0,294090	0,294067	0,2941	0,301103	0,301151	0,303
1.0	0,672333	0,672329	0,6724	0,301800	0,301770	0,3018	0,310592	0,310639	0,311
1.1	0,802296	0,802291	0,8023	0,294044	0,294008	0,2941	0,324452	0,324496	0,326
1.2	0,925816	0,925801	0,9259	0,280591	0,280558	0,2806	0,341673	0,341712	0,342

Çizelge 5. F_1 ve F sırasıyla $\alpha = 2,\ \beta = 1.25$ ve $\alpha = 2,\ \beta = 1$ parametreli gamma dağılım fonksiyonu iken $\tilde{M}_m(t)$ ve $\tilde{V}_m(t)$ değerleri

t	$M_m(t)$	$\tilde{M}_m(t)(\Delta_1^1)$	$\tilde{M}_m(t)(\Delta_1^2)$	$\tilde{M}_m(t)(\Delta_1^3)$	$V_m(t)$	$\tilde{V}_m(t)(\Delta_2^1)$	$\tilde{V}_m(t)(\Delta_2^2)$	$\tilde{V}_m(t)(\Delta_2^3)$
0.2	0,011550	0,011550	0,011551	0,011554	0,011491	0,011491	0,011500	0,011528
0.4	0,041999	0,041999	0,042002	0,042012	0,041271	0,041272	0,041301	0,041390
0.6	0,086480	0,086480	0,086486	0,086504	0,083611	0,083613	0,083666	0,083828
0.8	0,141552	0,141553	0,141561	0,141588	0,134391	0,134394	0,134470	0,134706
1.0	0,204754	0,204754	0,204765	0,204800	0,190755	0,190759	0,190856	0,191159
2.0	0,594010	0,594011	0,594030	0,594089	0,506011	0,506018	0,506191	0,506730
3.0	1,044627	1,044628	1,044650	1,044719	0,825962	0,825970	0,826186	0,826858
4.0	1,521325	1,521325	1,521349	1,521423	1,129927	1,129938	1,130185	1,130953
5.0	2,010180	2,010180	2,010206	2,010282	1,416345	1,416361	1,416630	1,417485
8.0	3,501088	3,501085	3,501115	3,501193	2,209895	2,209942	2,210259	2,211360

KAYNAKLAR

1. Xie, M., "On the solution of renewal-type integral equations." ***Comm. Statist. Simula.,*** 18(1): 281-293 (1989).
2. Karlin, S. and Taylor, H. M., A First Course in Stochastic Processes. Second edition. ***Academic Press***., New York, (1975).
3. Smith, W. L., "Renewal theory and its ramifications." ***J. Roy. Statist. Soc. B.***, 20, 243-302 (1958).
4. Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R., Probability and Random Processes. ***Oxford University Press Inc.***, New

York (1992).

5. Crump, K. S., "Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation." ***J. Assoc. Comp. Machinery,*** 23: 89-96 (1976).
6. Grundy, R. E., "Laplace transform inversion using two-point rational approximants." ***J. Inst. Maths. Applics***., 20: 299-306 (1977).
7. Aydoğdu, H. and Öztürk, F., " Some analytical expressions for the variance function in renewal processes.", H***acettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering***, Series B, 28: 77-88 (1999).
8. Smith, W. L. and Leadbetter, M. R., "On the renewal function for the Weibull distribution." ***Technometrics*** 5: 393-396 (1963).
9. Lomnicki, Z. A., "A note on the Weibull renewal process." ***Biometrika 53***, 375-381 (1966).
10. Aydoğdu, H. and Öztürk, F., "Gamma ve Weibull dağılımlı yenileme süreçleri üzerine bir çalışma.", Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, ***Fen Bilimleri Serisi (Matematik)***, Sayı.4, 49-58 (1998).
11. Cleroux, R. and McConalogue, D. J., "A numerical algorithm for recursively-defined convolution integrals involving distribution functions." ***Management Sci.,*** 22: 1138-1146 (1976).
12. Baxter, L. A., "Some remarks on numerical convolution." ***Comm. Statist. B***, 10: 281-288 (1981).
13. McConalogue, D. J., "Numerical treatment of convolution integrals involving distributions with densities having singularities at the origin." ***Comm. Statist. B***, 10: 265-280 (1981).
14. Baxter, L. A., Scheuer, E. M., McConalogue, D.J. and Blischke, W.R., "On the tabulation of the renewal function." ***Technometrics***, 24: 151-158 (1982).
15. Bhattacharjee, G. P., "The incomplete gamma integral (Algorithm AS 32)." ***Applied Statistics,*** 19: 285-287 (1970).
16. Deligönül, Z. S. and Bilgen, S., "Solution of the Volterra equation of renewal theory with the galerkin technique using cubic splines." ***J. Statist. Comput. Simul.,*** 20: 37-45 (1984).
17. Soland, R. M., "Availability of renewal functions for gamma and Weibull distributions with increasing hazard rate." ***Operations Res.,*** 17: 536-543 (1969).
18. Baker, C. T. H., The Numerical treatment of integral equations. ***Clarendon Press***, Oxford (1977).

Geliş Tarihi:16.08.2002 *Kabul Tarihi: 31.01.2003*