G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
18(3): 381-390 (2005) *18(3):381-390 (2005)*

CSSES-MODULES and CSSES-RINGS

Abdurzak LEGHWEL, Abdullah HARMANCI
Hacettepe University, Department of Mathematics, 06532, Beytepe Campus, Ankara, Turkey.
E-mail: abdurzak@hacettepe.edu.tr, harmanci@hacettepe.edu.tr

ABSTRACT

We study the structure of semiperfect, CS-Modules with essential socle. We call the module M CSSES-module if M is semiperfect, CS-module with essential socle. We will call the ring R right CSSES-ring if the right R-module R_R is CSSES-module. In this note among others we prove that [i] If R is right CF and left GIN-ring, then R is QF-ring if and only if R is right CS-ring if and only R is CSSES-ring. [ii] Every left Kasch right CF-ring is right CSSES-ring. [iii] If R is left Kasch and right IN-ring with equal left and right socles, then R is CSSES-ring.

Key Words**:** CSSES-module and ring, QF-ring, Kasch ring, CEP-ring, semiperfect module and ring, CF-ring.

CSSES-MODÜL ve CSSES-HALKALARI

ÖZET

Bu çalışmada has desteğee sahip yarıtam CS-modüllerin yapısını araştıracağız. Eğer M modülü has desteğe sahip yarıtam CS-modülse M modülüne CSSES-modül denir. Sağ R-modül R_R CSSES-modül ise R halkasına sağ CSSES-halkası denir. Bu çalışmada, diğer ispatladıklarımız yanında, aşağıdakilari de ispalayacağız: [i] Eğer R halkası sağ CF ise ve sol GIN-halka ise, o zaman R bir QF-halkadır ancak ve ancak R bir sağ CS-halkadır ancak ve ancak R bir sağ CSSES- halkadır. [ii] Her sol Kasch ve sağ CF-halka sağ CSSES-halkadır. [iii] Eğer R sağ ve sol destekleri eşit sol Kasch sağ IN-halka ise , o zaman R CSSES-halkadır.

Anahtar Kelimeler: : CSSES-modül ve halka, QF-halka, Kasch halka, CEP-halka, yarıtam modül ve halka, CF-halka.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada halkalar birimli, modüller de birimsel sağ modül kabul edilecektir. M bir modül ve R bir halka olsun.Bir modulün herhangi bir alt kümesi X ise r(X) (ya da l(X)) ile X in R deki sağ (ya da sol) sıfırlayanını göstereceğiz. M bir R-modül, Soc(M) ile M nin desteğni ve M* ile de Hom_R (M,R) yi göstereceğiz. Bir R halkası için, Soc(R_R), Soc($_R$R), Z(R_R), Z($_R$R) ve J(R)=J ile R nin sağ desteğini, sol desteğini, sağ tekil idealini, sol tekil idealini ve Jacobson köklüsünü göstereceğiz.

$N \leq_{max} M$ ($N \leq_{has} M$, N<<M ve $N \leq_d M$) ile N M nin büyük (=maksimal) alt modülünü (has alt modülünü, atık alt modülünü ve dik tolanan alt modülününü) ğöstereceektir. Eğer Z(M)=M (ya da Z(M)=0) ise, M ye *tekil* (ya *da tekil olmayan*) modül denir. N bir M modülünün alt modülü olsun. Eğer M nin her hangi bir öz K alt modülü için N+K, M den farklı oluyorsa N ye M de *atık* alt modül denir.Bir R-modül M injektif kabuğunda atık ise M ye *atık modül denir*.

Bir R-modül M, R halkasının kopyalarının dik toplananları içine gömülebilirse M ye *burulmasız* denir. T, R nin bir sağ ideali ise kolayca ispatlanabilir ki, R/T burulmasız sağ R-modüldür ancak ve ancak rl(T)=T dir. Böylece bir devirli sağ R-modül M=mR burulmasızdır

1. INTRODUCTION

Throughout the paper all rings have unity and all modules are unitray. The right (resp. left) annihilator of a subset X of a module is denoted by r(X) (resp. l(X)). If M is an R-module, we write Soc(M) and M^* =Hom_R (M,R), for the socle and the dual of M. If R is a ring, we denote by Soc(R_R), Soc($_R$R), Z(R_R), Z($_R$R) and J(R)=J, for the right socle, the left socle, the right singular ideal, the left singular ideal and the Jacobson radical of R, respectively. The notations

$N \leq_{max} M$, $N \leq_{ess} M$, N<<M and $N \leq_d M$ mean that N is maximal (essential, small, and direct summand) submodule of M, respectively. If Z(M)=M (or Z(M)=0), then M is called s*ingular* (or *non-singular*) module. Let N be any submodule of the module M. N is said to be *small* in M if N+K ≠ M for any proper submodule K of M. An R-module M is said to be *small module* if it is small in its injective hull, and M is said to be a *non-small module* if it is not a small module.

A right R-module M is called *torsionless* if M is embedded in a direct product of copies of R (if and only if M is embedded in a free right R-module). For any right ideal T of R, R/T is torsionless as a right R-module if and only if rl(T)=T. Hence A cyclic right R-module M=mR is ancak ve ancak herhengi bir sağ ideal T için sağ R modül olarak R/T burulmasızdır. Ayrıca R *sağ yanüretendir* ancak ve ancak her sağ R-modül burulmasızdır.

R halkası *sağ mininjektif* dir ancak ve ancak herhangi bir sağ basit T ideali için her R-dönüşümü $\gamma : T \to R_R$ nin $R_R \to R_R$ genişlemesi vardır. R halkası *sağ basit injektif* dir ancak ve ancak herhangi bir sağ basit T ideali için her R-dönüşümü $\gamma : T \to R_R$ nin R_R den???ok R_R ye bir genişlemesi vardır. R halkası *sağ temel injektif* (ya da *sağ P-injektif*) dir ancak ve ancak herhangi bir sağ temel T ideali için her R-dönüşümü $T \to R_R$ nın $R_R \to R_R$ genişlemesi vardır. R nin her vefalı M modülü Mod-R topluluğunu üretirse R ye *sağ PF-halka* denir. R halkası PF-halkadır ancak ve ancak R sağ yanüreteçdir ve sağ kendi-injektifdir ancak ve ancak R yarı tam, sağ kendi-injektif ve sağ desteği has sağ idealdir. R yarı tam, sağ mininjektif ve sağ desteği has sağ ideal, her yerel $e^2 = e \in R$ ve $K \subseteq Re$ olan her basit sağ K ideali için lr(K)=K sağlanırsa R halkası na *sağ min-PF halka* denir. Her sonlu üreteçli vefalı modül Mod-R yi üretirse R ye *sağ FPF-halka* denir.

GPF-halka ise yarı tam, sağ P-injektif ve sağ desteği has olan halkadır. Her sonlu modülü bir serbest modül içine gömülebilen halkaya *sağ FGF-halka* denir. Bir R halkası sağ FGF-halkadır ancak ve ancak her sonlu üreteçli modül bir projektif modül içine gömülebilir. Bir R halkası *sağ CF-halkadır* ancak ve ancak her devirli sağ R-modül bir serbset modül içine gömülebilir. R *sağ CEP-halkadır* ancak ve ancak her devirli sağ R-modül has olarak bir projektif modül içine gömülebilir. Her sağ FGF-halka sağ CF-halkadır. Tersi doğru değildir (bakınız, [13, Örnek 2.5 ve 7.3]). Her sağ CEP-halka bir sağ CF-halkadır, ve her sağ CEP-halka sağ artindir (bakınız, [16, Sonuç 3.3]) ve böylece her CEP halka yarı tamdır. M nin herhangi bir N alt modülü has olarak bir dik toplanan içinde kapsanırsa M ye *CS-modül*, C_1 ya da *genişleyen* modül denir. Her injektif modül bir CS-modüldür. Kendisi üzerinde sağ modül olarak sağ CS-modül olan bir halkaya *sağ CS-halka* denir. Eğer bir M modülü nün bir dik toplananına izomorf olan her alt modülü dik toplanan ise M ye C_2 modül denir. M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ olan $M_1 \leq_d M$ and $M_2 \leq_d M$ dik toplanan alt modülleri için $M_1 \oplus M_2$ de dik toplanan olursa M ye C_3 modül denir. M CS ve (C_2) yi sağlarsa *sürekli*, CS ve (C_3) yi sağlarsa *yarı-sürekli* modül denir. M keyfi ve P projektif modüller olsun. çekirdeği atık olacak şekilde bir p: $P \to M$ örten dönüşü mü varsa P ye M nin projektif örtüsü denir. M *yarı tam* modüldür ancak ve ancak M nin her M/N bölüm modülünün projektif örtüsü vardır. M nin her N alt modülü için $A \leq N$, $M=A \oplus B$ ve $N \cap B << B$ olacak şekilde A ve B varsa M ye *yükselen modül*, B ye de N nin *tamlayanı* denir. [10] dan , M bir projektif modül ise, M yarı tamdır ancak ve ancak M yükselendir. M de bir X alt modülü alalım $X \cap Y=0$ özelliğine göre maksimal olan Y ye X in M deki bir *tümleyeni* denir.

TANIM M bir modül olsun. Eğer M yarı tam, CS ve M nin desteği has ise M ye CSSES-modül diyeceğiz. Sağ modül olarak CSSES olan bir halkaya sağ CSSES-halka diyeceğiz. Yarı basit modüller CSSES dir, projektif

torsionless if and only if R/T is torsionless as a right R-module for any right ideal T of R. R is *right cogenerator* if and only if every right R-module is torsionless.

Recall that a ring R is *right mininjective* if and only if every R-homomorphism $\gamma : T \to R_R$ can be extended to $R_R \to R_R$ for every simple right ideal T of R. A ring R is called *right simple injective* if for the same R-homomorphism γ with $\gamma(T)$ simple extends to R. A ring R is called *right principle injective* (or *right P-injective*) if for the same R-homomorphism γ with T principal right ideal extends to R. R is *right PF* if every faithful right R-module M generates the category Mod-R of all right R-modules (if and only if it is right cogenerator and right self-injective if and only if it is semiperfect, right self-injective and right socle is ssential right ideal). Accordingly, we call a ring R a *right min-PF ring* if R is a semiperfect, right mininjective ring in which $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$ and lr(K) = K whenever $e^2 = e \in R$ is local and $K \subseteq Re$ is a simple left ideal. A ring R is *right FPF* if every finitely generated faithful right R-module M generates the category Mod-R of all right R-modules.

A ring R is *right GPF* if it is semiperfect, right P-injective and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. R is *right FGF-ring* if every finitely generated right R-module can be embedded in a free right R-module. R is right FGF-ring if and only if every finitely generated module embeds in a projective module, More on this can be found in [13]. A ring R is *right CF-ring* if every cyclic right R-module embeds in a free right R-module. R is called *right CEP-ring* if every cyclic right R-module is essentially embeddable in a projective right R-module. Every right FGF-ring is right CF-ring. The converse is not true, (See, [13, Example 2.5 and 7.3]). Every right CEP-ring is right CF-ring, and every right CEP-ring is right artinian by [16, Corollary 3.3] and hence semiperfect. The module M is called *CS-module* if for any submodule of M is essential in a direct summand of M. CS-module is also said to be C_1 or extending module in the context. Every injective module is CS-module. A ring R is called *right CS-ring* if the right R-module R_R is CS-module. A module M is said to satisfy C_2 condition if every submodule that is isomorphic to a direct summand of M is itself a direct summand, and is said to satisfy C_3 condition if for any $M_1 \leq_d M$ and $M_2 \leq_d M$ with $M_1 \cap M_2 = 0$, then $M_1 \oplus M_2 \leq_d M$. A module M is called *continuous* if it is CS and (C_2); M is called *quasi-continuous* if it is CS and (C_3). Let M be any module. If there exists an epimorphism p : $P \to M$ such that P is projective and Ker(p)<< P, then it is said that P is a projective cover of M. Let M be a module. M is said to be *semiperfect* if any homomorphic image of M has a projective cover. The module M is called *lifting module* if for any submodule N of M there exists a submodule A of N such that $M=A \oplus B$. B is also said *supplement* of N in M. By [10], for any projective module M, M is semiperfect if and only if M is lifting module. A submodule X of M is a *complement* if it is maximal with respect to $X \cap Y=0$, for some submodule Y. We call M düzgün modüller CSSES dir, Kendi üzerinde modül olarak görülen her tamlık bölgesi CSSES dir, Kendi üzerinde modül olarak görülen her yarı-Frobenuis halkalar CSSES dir.

2. CSSES-HALKA ve MODÜLLERİ

Bu bölümde CSSES-modül ve halkalar kavramlarını tanımlayacak ve bu türlerin genel özelliklerini belirleyeceğiz. Bazı örnekler vererek çok iyi bilinen diğer modül ve halka sınıfları ile kıyaslayacağız. önce bu çalışmada kullanacağımız iyi bilinen sonuçları sıralayalım. Bir M projektif modülü yarı tamdır ancak ve ancak M nin her alt modülünün tamlayanı M de vardır (bakınız, örneğin [10, Sonuç 4.43]) M bir projektif modül olsun. M yarı tamdır ancak ve ancak [i] Rad [M] << M [ii] M/Rad[M] yarı basitdir [iii] M/Rad[M] nin dik toplananları M ye yükselir (bakınız, [10, Teorem 4.44]).

R bir halka olsun. Eğer her R-modülün (ya da her basit R-modülün) projektif örtüsü varsa R ye *tam* (ya da *yarı tam*) *halka* denir. [20] de R yarı tamdır ancak ve ancak R yükselen halka ve bir projektif M modülü yarı tamdır ancak ve ancak yükselendir, ayrıca M projektif modülü yükselendir ancak ve ancak M nın herhangi bir N alt modülü için M/N modülünün projektif örtüsünün var olacağı ispatlanmıştır. Bu bölümde yükselen modüllerin bir tür genellemelerini inceleyeceğiz. Bir M modülünün N alt modülü için M de bir X alt modülü var ve N ile M/X izomorf ise N ye M nin *M-devirli alt modülü* denir. Bir R-modül N alalım. M nin her M-devirli alt modülünden N ye olan dönüşüm M ye yükselirse N ye *M-devirli injektif modül* denir. N M-devirli injektifdir ancak ve ancak M nin herhangi bir s dönüşümü için s(M) den N ye tanımlı her dönüşümü M den N ye genişler. Eğer M M-devirli injektifse M ye *yarı-injektif* denir. Bir N modülü R-devirli injektif ise N ye *devirli injektif* denir. R sol tam halka ise, R yarı tamdır ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dır.

Bir M modülünün her basit alt modülü bir dik toplananda has alt modül ise M ye *bas-CS* denir. Bir R halkası sağ modül olarak kendi üzerinde *sağ bas-CS* modül ise R ye *sağ bas-CS-halka* denir. Her basit modül R nin bir basit sağ idealine izomorf ise R ye *sağ Kasch halka* denir. R bir sağ Kasch halkadır ancak ve ancak R nin her büyük sağ ideali I için I = rl(I) dır ancak ve ancak her sağ ideal T için $l(T) \neq 0$ dır.

Tanım 2.1 R halkası sol ve sağ artin, sol ve sağ kendi-injektif ise R ye *yarı-Frobenius* (ya da *QF-halka* denir).

Her yarı basit artin halka QF dir. R bir temel ideal bölgesi a R nin tersinir olmayan sıfırdan farklı bir elemanı ise R/Ra QF dir. QF-halkalar detaylı olarak icelenmiş ve değişik yönlerden belirlenmeleri yapılmıştır(bakınız, [1, 7, 9, 13, 14]).

Sonuç 2.1 Her sağ QF-halka sağ CSSES-halkadır.

Kanıt R bir QF-halka olsun. R sağ artin olduğundan, R yarı tam halkadır ve sağ desteği R nin has sağ idealidir. R sağ kendi-injektif olduğundan sağ CS-halkadır. Böylece R

CSSES-module if M is a CS, semiperfect module with essential socle. CSSES-modules generalizes semisimple modules, projective uniform modules, any domain considered as a module over itself, quasi-Frobenius rings considered as a module over themselves. We call the ring R *right CSSES-ring* if the right R-module R_R is CSSES-module over R.

2. CSSES-MODULES and CSSES-RINGS

In this section we introduce CSSES-modules and produce some examples in order to compare CSSES-modules with other well known module classes. We record some well known results that we use extensively in this work. A projective module M is semiperfect if and only if M is discrete if and only if every submodule of M has a supplement (See namely, [10, Corollary 4.43]).

A projective module is semiperfect if and only if [i] Rad [M] <<M [ii] M/Rad[M] is semisimple and [iii] Decompositions of M/Rad[M] lift to decompositions of M (See namely, [10, Theorem 4.44]).

R is called *perfect* (or *semiperfect*) if every R-module (or simple R-module) has a projective cover. It is proved in [20] a ring R is semiperfect if and only if R is lifting, and that a projective module M is lifting if and only if for any submodule N of M, M/N has a projective cover. In this section we study lifting modules with some of their generalizations.

A submodule N of M is called *M-cyclic* if it is isomorphic to M/X for some submodule X of M. A right R-module N is called *M-principally injective* if every R-homomorphism from an M-cyclic submodule of M to N can be extended to M. Equivalently, for any endomorphism s of M, every homomorphism from s(M) to N can be extended to a homomorphism from M to N. M is *semi-injective* if it is M-principally injective. N is called *principally injective* if it is R-principally injective. Let R be a left perfect ring, then R is semiperfect and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$.

A right R-module M is *min-CS* if every simple submodule of M is essential in a direct summand of M. A ring R is *right min-CS* if the right R-module R_R is min-CS module. R is called *right Kasch* if every simple right R-module is isomorphic to a right ideal of R. It is known that A ring R is right Kasch if and only if for every maximal right ideal I of R, I=rl(I) if and only if for every right ideal I of R $l(I) \neq 0$.

Definition 2.1 A ring R is called *quasi-Frobenius* (or *QF-ring*) if it is left and right artinian and left and right self-injective, equivalently, R is right artinian and right self-injective.

Every semisimple artinian ring, the rings R/aR, where a is a nonzero, nonunit in a principal ideal domain R are QF-rings. Quasi-Frobenius rings are extensively studied and characterized in terms of different structures in module theory and rings (See namely,[1,7,9,13,14]).

Corollary 2.1 Every right QF-ring is right CSSES-ring.

Proof Let R be a QF-ring. Since R is right artinian, it is

CSSES-halka olur. □

QF-halka olmayan, Kasch halka olmayan fakat CSSES-halka olan bir örneğe bakalım.

Örnek 2.3 F bir cisim ve R halkası F bileşenli üst üçgen matrisler halkası $\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$, M de sağ R-modül R_R olsun. O zaman

(1) M CSSES-modüldür.
(2) M mininjektif modül değildir.
(3) R min-PF halka değildir.
(4) R QF-halka değildir.
(5) R sağ Kasch halka değildir.
(6) R sağ basit injektif halka değildir.

Kanıt (1). $Soc(M) = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \leq_{has} M$ dir. [10, Örnek 2.9] dan, M CS-modüldür, [20, Örnek 4.3] den, R sağ tamdır. Böylece M yarı tam modül ve bir CSSES-modül olur.

(2) ve (3). Eğer $I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in F \right\}$ ve $I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid b \in F \right\}$ ise o zaman I_1 and I_2 R nin basit sağ idealleridir. $f : I_1 \to I_2 \leq M$ ve $f\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ile tanımlı f dönüşümü bir $g : R \to M$ ye genişlemiş olsun. Bu halde bir $x \in F$ için $g\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacağını görmek kolaydır. O zaman $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$g\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xa \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Böylece a = 0 olur. Bu bir çelişkidir. Bu da R nin sağ min-PF halka ve mininjektif olmaması demektir.Böylece (2) ve (3) ün ispatı biter.

(4). R_R nin injektif kabuğu F bileşenli 2×2 matrisler halkası olduğundan R kendi sağ injektif dolayısıyla QF-halka olamaz.

(5). $I = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ sağ idealini alalım. l(I)=0 olduğu kolayca görülür. Böylece R sağ Kasch halka değildir.

(6). [12, Önerme 1] de, her yarı tam, sağ desteği has olan sağ basit injektif halkanın sağ Kasch halka olduğu ispatlanmıştır. (5) den, R sağ Kasch değildir. Böylece R

semiperfect ring with $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. Since R is right self-injective, it is right CS-ring. Hence R is right CSSES-ring. □

We prove in Example 2.3, among others, there are CSSES-rings but neither QF nor right Kasch.

Example 2.3 Let F be any field and R the ring $\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ of upper triangle matrices over F, and M the right R-module R_R. Then

(1) M is CSSES-module.
(2) M is not mininjective.
(3) R is not right min-PF ring.
(4) R is not QF-ring.
(5) R is not right Kasch ring.
(6) R is not right simple injective ring.

Proof (1). For $Soc(M) = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix} \leq_{ess} M$. By [10, Example 2.9], M is CS-module, and by [20, Example 4.3], R is right perfect. Therefore M is semiperfect module and hence a CSSES-module.

(2). If $I_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in F \right\}$ and $I_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid b \in F \right\}$. Then I_1 and I_2 are simple right ideals of R. Assume that the homomorphism $f : I_1 \to I_2 \leq M$ defined by $f\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ extends to a g from R to M. It is easy to see $g\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ for some $x \in F$. Then $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$g\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xa \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence a = 0. A contradiction. Thus R is not right min-PF ring and hence is not mininjective and (3) follows.

(4). The injective hull of R_R is the ring of 2×2 matrices over the field F. Hence R is not right self-injective ring and so is not QF-ring.

(5). Let I denote the right ideal $I = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$. It is easy to check that l(I)=0 . Hence R can not be a right Kasch ring.

(6). In [12, Proposition 1], it is proved that every

sağ basit injektif halka olamaz. □
Önteorem 2.4 de verilen sonuçların çoğu iyi bilinir. Bütünlüğü sağlamak açısından tümünün ispatını burada yapacağız.

Önteorem 2.4 R bir CSSES-halkası olsun. O zaman

(1) Eğer $Soc(R_R) \leq_{has} {}_RR$ ise, R sağ Kaschdır.

(2) R sağ (ya da sol) Kaschdır ancak ve ancak her yerel $e^2=e$ için $Soc((Re)_R)\neq 0$ (ya da $Soc(_R(eR))\neq 0$ dir).

(3) Eğer $Soc(_RR) \leq_{has} {}_RR$ ise, R sağ Kaschdır.

(4) R sol Kaschdır ancak ve ancak $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$ dir.

Kanıt (1). [13, Önteorem 1.48] den kolayca görülür.

(2). Gereklilik: $e \in R$ nin bir yerel kareş elemanı olsun. O zaman eR/eJ basit sağ R-modüldür. e yerel ve R sağ Kasch olduğundan, eR/eJ, R nin bir minimal sağ idealine izomorftur, buradan $(eR/eJ)^* \neq 0$ olur. $(eR/eJ)^* \cong l(J)e = Soc(R_R)e = Soc((Re)_R)$ olduğu için, $Soc((Re)\_R) \neq 0$ buluruz.

Yeterlilik: Her yerel kareş eleman için $Soc((Re)_R) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. V bir basit R-modül olsun. R yarı tam olduğu için bir yerel kareş elemanı ve V den eR/eJ ye bir h izomorfizması vardır. Diğer taraftan $r(J) = Soc(_RR)$ $l(J) = Soc(R_R)$ ve $(eR/eJ)^* \cong l(J)e= Soc(R_R)e = Soc((Re)_R)$ olduğundan, kabul $Soc((Re)_R) \neq 0$ yi verir. f, $(eR/eJ)^*$ nin sıfrdan farklı bir elemanı ise, o zaman f h da V den R ye 1-1 olur. Böyelece R sağ Kasch olur.

(3). Kabuldan her yerel $e^2 = e$ için $Soc(_R(Re))= (Re)\cap Soc(_RR) \neq 0$ olur. (2) den R sağ Kasch buluruz.

(4). R sol Kasch olsun. I de bir basit sağ ideal olsun. R sağ CS olduğu için, bir e kareş var ki I eR de has olarak kapsanır. O zaman eR bir yerel modül olur ve e de yerel kareş olur. (2) den, $Soc(_R(eR)) \neq 0$. $Soc(_R(eR))$, eR de sıfırdan farklı olduğundan, $I \cap Soc(_R(eR)) \neq 0$, böylece $I \leq Soc(_R(eR))$ bulunur. Yani $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$ olur. Tersine gelince, $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$ olsun. O zaman $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ olur. [13, Önteorem 1.48] dan, R sol Kasch buluruz. □

Herhangi bir cisim üzerindeki üst üçgen matris halkası kendi üzerinde CSSES-modül olduğunu örnek 2.3 de görmüştük. Eğer bu örnekteki cisim, cisim olmayan bir halka ile yer değiştirirse örnek doğru olmayabilir.

Örnek 2.5 $Z_4 = Z/4Z$ halkası üzerinde $R = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ halkasını ele alalım. O zaman

(1) R sağ artindir.

(2) R yarı tam ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dir.

semiperfect, right simple injective ring having right socle essential is right Kasch. By (5), R is not right Kasch and hence R is not right simple injective ring.
□

We first prove Lemma 2.4, most of which is very likely known, but whose proof we include for the sake of completeness.

Lemma 2.4 Let R be a CSSES-ring. Then

(1) If $Soc(R_R) \leq_{ess} {}_RR$, then R is right Kasch.

(2) R is right (or left) Kasch if and only if $Soc((Re)_R) \neq 0$ (or $Soc(_R(eR)) \neq 0$ for each local idempotent e.

(3) If $Soc(_RR) \leq_{ess} {}_RR$, then R is right Kasch.

(4) R is left Kasch if and only if $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$.

Proof (1). Clear from [13, Lemma 1.48].

(2). Necessity: Let e be a local idempotent in R. Then eR/eJ is simple right R-module. Since e is local idempotent and R is right Kasch, eR/eJ is isomorphic to a minimal right ideal of R, and therefore $(eR/eJ)^* \neq 0$. Since $(eR/eJ)^* \cong l(J)e= Soc(R_R)e = Soc((Re)_R)$, $Soc((Re)_R) \neq 0$. Sufficiency: Suppose that $Soc((Re)_R) \neq 0$ for each local idempotent e. Let V be a simple right R-module. Since R is semiperfect, there exists a local idempotent e and an isomorphism h from V to eR/eJ, and also $r(J)= Soc(_RR)$ and $l(J)=Soc(R_R)$. Since $(eR/eJ)^* \cong l(J)e = Soc(R_R)e = Soc((Re)_R)$, by assumption $Soc((Re)_R) \neq 0$. Let f be a nonzero element in $(eR/eJ)^*$, then f h is an embedding of V into R. It follows that R is right Kasch.

(3). By hypothesis $Soc(_R(Re))= Re\cap Soc(_RR) \neq 0$ for each local idempotent e. By (2), R is right Kasch.

(4). Suppose that R is left Kasch. let I be a simple right ideal in R. Since R is right CS, there exists an idempotent e in R such that I is essentially contained in eR. Then eR is local module and therefore e is local idempotent. By (2), $Soc(_R(eR)) \neq 0$. Since $Soc(_R(eR)$ is a nonzero right ideal in eR, $I \cap Soc(_R(eR)) \neq 0$, and so $I \leq Soc(_R(eR))$. Thus $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$. Conversely suppose that $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$. Then $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$. By [13, Lemma 1.48], R is left Kasch. □

The ring of upper triangular matrices over any field is always right CSSES-module over itself as it is seen in Example 2.3. This is not the case when the field is replaced by some rings.

Example 2.5 Let R denote the ring $R = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ of upper triangular matrices over the ring $Z_4 = Z/4Z$. Then

(1) R is a right artinian.

(3) R sağ bas-CS dir.

(4) R sağ CS değildir.

(5) R sağ CSSES-halka değildir.

Kanıt Bilinen matris işlemlerine gore $R = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ bir halkadır. R sonlu olduğundan, artindir ve böylece yarı tamdır. $U = \begin{bmatrix} 0 & 2Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2Z_4 \end{bmatrix}$ sağ ideallerini alalım. $U \leq_{has} \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $V \leq_{has} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece $Soc(R_R) = U \oplus V$ ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dir ve R bir sağ bas-CS-halka olur. R nin sağ CS-halka olmadığını görelim.

Eğer $I = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \right\}$ ve $K = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise o zaman $I \cap K = 0$ ve I, R de $I \cap K = 0$ ye göre bir büyük sağ idealdir. Yani I, R de bir tamlayandır. I kareş eleman bulundurmadığı için I, R nin dik toplananı olamaz. Böylece R sağ CSSES-halka olamaz. □

Her CF-halkanın sağ artin olup olmadığı CF-sorusu olarak bilinir. Pardo G. and Asensio G in [15] de, R bir sağ CS, sağ CF-halka ise, R nin sağ artin olduğunu görmüşlerdir. Sonra [16] da her sağ CF-halkanın sağ artin olduğunu ispatlamışlardır. Eğer R bir sağ CF-halka ise, her T sağ ideali için, R/T bir serbest modül içine gömülebilir, yani R/T burulmasızdır ve böylece T = rl(T) olur. R nin her I ve K sağ idealleri için $l(I \cap K)=l(I)+l(K)$ oluyorsa R ye *sağ Ikeda Nakayama* (kısaca *IN*) *halka* denir. Eğer $l(I\cap K)=l(I)+l(K)$ şartı her I sağ temel ideali ve her K sağ ideali için gerçekleşirse R ye *sağ Genel Ikeda Nakayama* (kısaca *GIN*) *halka* denir.

Teorem 2.6 R bir sol Kasch sağ CF-halka olsun. O zaman

(1) R sağ Kaschdır.

(2) R sol P-injektifdir.

(3) R sağ yarı-süreklidir.

(4) R sağ süreklidir.

(5) R sağ artin ve sağ noetherdir.

(6) R yarıyerel, $Z(R_R) = J$, $l(Soc(R_R)) = l(Soc(_RR)) = J$.

(7) R sağ CSSES-halkadır.

Kanıt (1) ve (2). T, R nin bir sağ ideali olsun. R sağ CF olduğu için R/T devirli sağ R-modülü, bir sağ serbest R-modül F= $\oplus R$ içine bir σ ile gömülebilir. $\sigma(1+T) = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ olsun. O zaman T= r $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ olur ve buradan rl(T)= rlr$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ = r $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ = T elde edilir. Böylece R nin her sağ T

(2) R is semiperfect with $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$.

(3) R is right min-CS.

(4) R is not right CS.

(5) R is not right CSSES-ring.

Proof Let R denote the ring $R = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$ with usual matrix operations. Since R is finite, it is right artinian, and so semiperfect. It is easy to check that $Soc(R_R) = U \oplus V$, where $U = \begin{bmatrix} 0 & 2Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_{ess} \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2Z_4 \end{bmatrix} \leq_{ess} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_4 \end{bmatrix}$, and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. It follows that R is right min-CS ring. Next we prove that R is not right CS.

For if $I = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \right\}$ and $K = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Then $I \cap K = 0$ and $I \leq_{max} R$ as a right ideal with respect to $I \cap K = 0$. Hence I is a complement in R. Since I does not have any nonzero idempotents, I can not be a direct summand of R. Hence R is not right CS-ring. Thus R is not right CSSES-ring. □

The CF-conjecture is whether or not every right CF-ring is right artinian. Pardo G. and Asensio G in [15] proved that, if R is right CS, right CF-ring, then R is right artinian. But they proved later in [16] that every right CF-ring is right artinian. If R is right CF-ring, then for every right ideal T, R/T is cyclic right R-module and so it is embedded in a free module and then R/T is torsionless and therefore T = rl(T). R is called *right Ikeda Nakayama* (*IN* for short) *ring* if $l(I \cap K) = l(I) + l(K)$ for each pair of right ideals I and K of R. R is called *right Generalized Ikeda Nakayama* (*GIN* for short) *ring* if $l(I \cap K) = l(I) + l(K)$ for each pair of right ideals I and K of R with I principal.

Theorem 2.6 Let R be a left Kasch, right CF-ring. Then

(1) R is right Kasch.

(2) R is left P-injective.

(3) R is right quasi-continuous.

(4) R is right continuous.

(5) R is right artinian and so right noetherian.

(6) R is semilocal with $Z(R_R) = J$ and $l(Soc(R_R))=l(Soc(_RR))=J$.

(7) R is right CSSES-ring.

Proof Let T be a right ideal in R. Since R/T is cyclic right R-module and R is right CF, it is embedded in a free right R-module $\oplus R$ by a map σ. Let $\sigma(1+T) = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$. Then T= r $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$. Hence rl(T) =

idaeli için T= rl(T) bulunur. Buradan R sağ dual, sağ Kasch ve sol P-injectif olur, (1) ve (2) sağlanır.

(3). I ve K, R nin $I \cap K = 0$ olacak şekilde iki sağ ideali ise $0 = I \cap K = (rl(I)) \cap (rl(K)) = r(l(I)+l(K))$ olur. R sol Kasch olduğu için, R nin her öz sol N ideali için r(N) ≠ 0 sağlanır. Böylece 0 = r(l(I)+l(K)) dan R = l(I)+l(K) buluruz. [13, Teorem 6.31] den, R sağ yarı-sürekli olur.

(4). (3) den, R sağ CS-halkadır. Kabuldan ve [13, Teorem 4.10] den, R yarı tam, sağ yarı-sürekli ve $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ olur. Böylece R sağ süreklidir.

(5). R sol P-injektif ve sol Kasch olduğu için, [13, Önerme 5.19] den, $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dır. [13, Teorem 4.10] ve (4) ün ispatından, R yarı tam sağ sürekli ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dır. [13, Önteorem 4.11] den, R sağ sonlu yanüreteçlidir. Ayrıca R CF-halka olduğu için her devirli R-modül sonlu yan üreteçlidir. Böylece R nin her örten görüntüsü sonlu yanüreteçli olur. [13, Önteorem 1.52] den , R sağ artin ve sağ noether olur.

(6). $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ ve $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ dan $Soc(R_R) \leq_{has} Soc(_RR)$ buluruz. [13, Önteorem 8.1] den, R yarıyerel olur (yani, R/J yarı basit artin halka) ve $Z(R_R) = J$ ve $l(Soc(R_R)) = l(Soc(_RR)) = J$ bulunur.

(7). (5) den, R sağ artindir. Böylece R yarıtamdır. Ayrıca R CS ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ olduğu için, R sağ CSSES-halka olacaktır. □

Sonuç 2.7 Her sağ CEP-halka sağ CSSES-halkadır.

Kanıt R bir CEP-halka olsun. O zaman R sağ CF-halkadır. Böylece R Teorem 2.6 dan sağ Kasch ve sol P-injektifdir. R CEP olduğu için, [16] dan sağ artindir. R sağ CF olduğundan, her sağ ideali bir sağ sıfırlayandır. [13, Teorem 8.9, (4) ⇒ (8)] dan R sol Kasch ve sağ CF dir. Böylece Teorem 2.6 dan R sağ CSSES-halkadır. □

Önteorem 2.8 [13, Önerme 6.35] R sol Kasch, sağ IN-halka ise R yarı tamdır, sağ sürekli halka ve $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ dır.

Sonuç 2.9 R sol Kasch, sağ IN-halka ise $Soc(R_R) \leq_{has} Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ dır.

Kanıt R sol Kasch, sağ IN-halka olsun. önteorem 2.8 den, $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ olur. I, R nin sıfırdan farklı basit bir sağ ideali olsun. $Soc(_RR) \cap I \neq 0$, $I = Soc(_RR) \cap I \leq Soc(_RR)$ ve böylece $Soc(R_R) \leq_{has} Soc(_RR)$ olur. □

Teorem 2.10 R bir sol Kasch, sağ IN-halka ve $Soc(R_R) = Soc(_RR)$ ise R CSSES-halkadır.

$rlr(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = r(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = T$. Hence for all right ideals T of R, T = rl(T). It follows that R is right dual, and therefore right Kasch and left P-injective. So (1) and (2) hold.

(3). Let I and K be right ideals of R such that $I \cap K = 0$. Then $0 = I \cap K = (rl(I)) \cap (rl(K)) = r(l(I)+l(K))$. Since R is left Kasch, for each proper left ideal N of R, $r(N) \neq 0$. Hence $0 = r(l(I)+l(K))$ implies $R = l(I)+l(K)$. By [13, Theorem 6.31], R is right quasi-continuous.

(4). By (3), R is right CS. By hypothesis and [13, Theorem 4.10], R is semiperfect, right continuous ring with $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$. Hence R is right continuous.

(5). Since R is left P-injective and left Kasch, by [13, Proposition 5.19], $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. By [13, Theorem 4.10] and the proof of (4), R is semiperfect, right continuous and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. By [13, Lemma 4.11], R is right finitely cogenerated. Thus every cyclic right R-module is finitely cogenerated, since R is right CF-ring. Hence every homomorphic image of R is finitely cogenerated. By using [13, Lemma 1.52], R is right artinian, and so R is right noetherian.

(6). Both $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$ and $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$ imply $Soc(R_R) \leq_{ess} Soc(_RR)$. By [13, Lemma 8.1], R is semilocal (i.e. R/J is semisimple artinian) with $Z(R_R) = J$ and $l(Soc(R_R)) = l(Soc(_RR)) = J$.

(7). By (5), R is right artinian. Hence R is semiperfect. Since it is right CS and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$, R is right CSSES-ring.

Corollary 2.7 Every right CEP-ring is right CSSES-ring.

Proof Let R be a CEP-ring. Then R is right CF-ring. It follows that R is right Kasch and left P-injective by Theorem 2.6. Since it is CEP, it is right artinian by [16]. Since it is right CF, every right ideal is an annihilator. By [13, Theorem 8.9, (4) ⇒ (8)], R is left Kasch and right CF. Hence R is right CSSES-ring by Theorem 2.6. □

Lemma 2.8 [13, Proposition 6.35] Let R be a left Kasch, right IN-ring. Then R is semiperfect, right continuous ring with $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$.

Corollary 2.9 Let R be a left Kasch, right IN-ring. Then $Soc(R_R) \leq_{ess} Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$.

Proof Let R be a left Kasch, right IN-ring. By Lemma 2.8, $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$. Let I be any nonzero minimal right ideal in $Soc(R_R)$. Then $Soc(_RR) \cap I \neq 0$ and so I =

Kanıt Önteorem 2.8 Sonuç 2.9 dan, R yarı tam, sağ CS-halka ve $Soc(R_R) \leq Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ dır. $Soc(R_R) = Soc(_RR)$ dan, $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ olacağından R sağ CSSES-halka buluruz. □

[13, Teorem 3.2(2)] de yarı tam halkaların sağ Kasch olmaları için yeter ve gerekli koşul her yerel $e^2 = e$ için $Soc(R_R)e \neq 0$ olması dır. Bunu kullanarak [13, Teorem1.48] nin değişik bir ispatını burada vereceğiz.

Teorem 2.11 R bir yarı tam halka olsun. O zaman

(a) $Soc(R_R) \leq_{has} {_RR}$ ise, R sağ Kaschdır.

(b) $Soc(_RR) \leq_{has} R_R$ ise, R sol Kaschdır.

Kanıt (a). R bir yarı tam halka ve $Soc(R_R) \leq_{has} {_RR}$ olsun. [13, Teorem 3.2(2)] ye göre, her yerel $e^2 = e$ için $Soc(R_R)e \neq 0$ olduğunu görmek yetecektir. Aksini kabul edelim ve bir $e^2 = e$ yerel kareş için $Soc(R_R)e=0$ olsun. O zaman $Soc(R_R) \leq l(e)$ olur ve kabuldan $l(e) \leq_{has} {_RR}$ dır. $l(e) = R(1-e)$ and $l(e) \cap Re=0$ dan $Re=0$ and so $e=0$ olur. Bu bir çelişkidir ve (a) nın ispatı biter.

(b). Sağ sol görülerek (a) nın ispatı gibi yapılır. □

Her sağ IN-halkanın sağ yarı-sürekli olduğu çok iyi bilinmektedir (bakınız, [13, Teorem 6.32]). Fakat IN-halkalarının (C_2) şartını sağlamaları gerekmeyebilir. Örneğin R tam sayılar halkası olmak üzere 2R ile R izomorf olmalarına rağmen 2R, R nin dik toplananı değildir.

Örnek 2.12 Sağ IN-halka olmayan sol ve sağ artin, sol ve sağ CS-halka mevcuttur.

Kanıt Örnek 2.3 deki R halkasını göz önüne alalım. Bu halka sol ve sağ artin, sol ve sağ CS-halkadır. Örnek 2.3 de gördüğümüz gibi R CSSES-halkadır. [2] de olduğu gibi R nin sağ IN-halka olmadığını görelim. $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alalım. $xR \cap yR = 0$, $l(xR) = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $l(yR) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in F \right\}$ oldukları kolayca gerçeklenebilir. Böylece $l(x) + l(y) \subseteq \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq R = l(0) = l(xR \cap yR)$ olur. Bu da R nin sağ IN-halka olmaması demektir. □

Teorem 2.13 R bir sağ CF ve sol GIN-halka ise, aşağıdakiler denktir:

$Soc(_RR) \cap I \leq Soc(_RR)$. Hence $Soc(R_R) \leq_{ess} Soc(_RR)$. □

Theorem 2.10 Let R be a left Kasch, right IN-ring with $Soc(R_R) = Soc(_RR)$. Then R is right CSSES-ring.

Proof By lemma 2.8 and corollary 2.9, R is semiperfect, right CS-ring with $Soc(R_R) \leq Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$. By hypothesis $Soc(R_R) = Soc(_RR)$, we have $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. Thus R is right CSSES-ring. □

[13, Theorem 3.2(2)] gives a characterization of semiperfect rings to be right Kasch and says a necessary and sufficient condition for a semiperfect ring to be right Kasch is $Soc(R_R)e \neq 0$ for each local idempotent $e \in R$. We use this fact to give a different proof to the well known result Theorem (See namely, [13, Theorem 1.48]).

Theorem 2.11 Let R be a semiperfect ring, then

(a) If $Soc(R_R) \leq_{ess} {_RR}$, then R right Kasch.

(b) If $Soc(_RR) \leq_{ess} R_R$, then R is left Kasch.

Proof (a). Let R be a semiperfect ring with $Soc(R_R) \leq_{ess} {_RR}$. By [13, Theorem 3.2(2)], it is enough to prove $Soc(R_R)e \neq 0$ for each local idempotent $e \in R$. Assume otherwise and let e be a nonzero local idempotent such that $Soc(R_R)e=0$. Then $Soc(R_R) \leq l(e)$, and by hypothesis, $l(e) \leq_{ess} {_RR}$. Since $l(e) = R(1-e)$ and $l(e) \cap Re=0$. Hence $Re=0$ and so $e=0$. This contradiction completes the proof of (a).

(b). It is proved similarly by symmetry.

As it is well known every right IN-ring is right quasi-continuous (See, [13, Theorem 6.32]). However, IN-rings need not satisfy (C_2) condition. For example, if $R=\mathbb{Z}$, where $\mathbb{Z}$ is the integers.

Example 2.12 There exists a left and right artinian, left and right CS-ring which is not a right IN-ring.

Proof Let R be as in Example 2.3. Then it is well known in the context that R is left and right artinian, left and right CS-ring. In Example 2.3 we have showed that R is right CSSES-ring. Now we prove (as in [2]) that R is not a right IN-ring. Indeed, let $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Then $xR \cap yR = 0$ and $l(xR) = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $l(yR) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in F \right\}$.

$l(x) + l(y) \subseteq \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq R$. Thus R is not a right IN-ring.

Theorem 2.13 If R is right CF and left GIN, then the

(1) R QF-halkadır.
(2) $J \leq Z(R_R)$ dir.
(3) $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$ dir.
(4) R sağ mininjektif halkadır.
(5) R sağ CSSES-halkadır.
(6) R sağ CS-halkadır.

Kanıt [3, Teorem 2.13] den $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ elde edilir. Burada sadece $(1) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (6)$ yi ispatlayacağız. (1) geçerli olsun. Kabuldan R QF olduğu için R sol ve sağ artin, sol ve sağ kendi-injektifdir. R sağ artin olduğundan R yarı tamdır ve $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dir. R sağ kendi-injektif olduğundan, R sağ CS dir. Böylece R sağ CSSES-halka olur ve (5) gerçeklenir.

$(5) \Rightarrow (6)$. Ispatı açıktır.

$(5) \Rightarrow (1)$. R yarı tam, [3, Önteorem 2.11 ve Sonuç 2.12] den $l(J) = Soc(R_R) \leq_{has} {}_RR$ buluruz. $Soc(R_R) \leq_{has} R_R$ dan da, $Soc(_RR) \leq Soc(R_R)$ olur. R sağ CS ve sağ CF olduğu için, [13, Teorem 8.9 $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7)$] den $Soc(_RR) \leq_{has} Soc(R_R)$ ve buradan $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$, böylece $Soc(R_R) = Soc(_RR)$ olur. [3, Teorem 2.13 $(3) \Rightarrow (1)$] den , R bir QF-halkadır.

$(6) \Rightarrow (1)$. R sağ CF sol GIN-halka olsun. R sağ CS ise [13, Teorem 8.9 $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7)$] den, $Soc(_RR) \leq_{has} Soc(R_R)$ ve böylece $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$ elde edilir. [3,Teorem 2.13 $(3) \Rightarrow (1)$] den, R QF-halka olur. □

following are equivalent:

(1) R is QF-ring.
(2) $J \leq Z(R_R)$.
(3) $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$.
(4) R is right mininjective ring.
(5) R is right CSSES-ring.
(6) R is right CS-ring.

Proof $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$. Clear by [3, Theorem 2.13]. We prove here $(1) \Rightarrow (5)$. Assume that (1) holds. By assumption R is QF and so R is left and right artinian, left and right self-injective. Since R is right artinian, it is semiperfect and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$. Since R is right self-injective, it is right CS. Thus R is right CSSES-ring and so (5) holds.$(5) \Rightarrow (6)$. Clear. $(5) \Rightarrow (1)$. $l(J) = Soc(R_R) \leq_{ess} {}_RR$ by [3, Lemma 2.11 and Corollary 2.12]. Since R is semiperfect and $Soc(R_R) \leq_{ess} R_R$, and so $Soc(_RR) \leq Soc(R_R)$. Since R is right CS and right CF, by [13, Theorem 8.9 $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7)$] $Soc(_RR) \leq_{ess} Soc(R_R)$. Hence $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$. By [3, Theorem 2.13 $(3) \Rightarrow (1)$], R is QF-ring.

$(6) \Rightarrow (1)$. Let R be a right CF and left GIN-ring. Assume that R is right CS. By [13, Theorem 8.9 $(5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7)$], $Soc(_RR) \leq_{ess} Soc(R_R)$. It follows easily that $Soc(R_R) \leq Soc(_RR)$. By [3, Theorem 2.13 $(3) \Rightarrow (1)$], R is QF-ring. □

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Anderson F. W. and Fuller K. R., *Rings and Categories of Modules*, ***Springer-Verlag*** , New York, (1974).

2. Camillo V., Nicholson W. K. and Yousif M. F., "Ikeda-Nakayama Rings", ***J.Algebra***, 226, 001-1010, (2000).

3. Chen J., Ding N. and Yousif M. F., "On a Generalization of injective Rings", ***Comm, Algebra*** , 31(10), 5105-5116, (2003).

4. Chen J. and Ding N., "General Principally Injective Rings", ***Comm. Algebra***, 27(5), 2097-2116, (1999).

5. Goodearl K. R., *Ring Theory : Nonsingular Rings and Modules*, **Monographs on Pure and Applied Mathematics** Vol. 33., Dekker, New York, (1976).

6. Hajarnavis C. R. and Northon N. C., "On Dual Rings and Their Modules", ***J.Algebra*** 93, 253-266, (1985).

7. Ikeda M. and Nakayama T., "On Some Characteristic Properties of Quasi-Frobenius and Regular Rings", ***Proc. Am. Math. Soc***. 5, 15-19, (1954).

8. Jain S. K. and Lopez-Permouth S. R., "Rings Whose Cyclics are Essentially Embeddable in Projectives", ***J. Algebra***. 128, 257-269, (1990).

9. John B., "Annihilator Conditions in Noetherian Rings", ***J. Algebra*** 49, 222-224, (1977).

10. Mohamed S. H. and Müller B. J., *Continuous and Discrete Modules*, L.M.S. Lecture Notes Vol. 147. ***Cambridge University Press***, Cambridge, UK, (1990).

11. Nam S. B., Kim N. K. and Kim J. Y., "On Simple Singular GP-injective Modules", ***Comm. Algebra***, 27(5), 1683-1693, (1999).

12. Nicholson W. K. and Yousif M. F., "On Perfect Simple-injective Rings", ***Proc. Am. Math. Soc.***,125, 979-985, (1997).

13. Nicholson W. K. and Yousif M. F., *Quasi-Frobenius Rings*, ***Cambridge University Press***, Cambridge Tracts in Mathematics. 158, (2003).

14. Osofsky B., "a Generalization of Quasi-Frobenius Rings", ***J. Algebra*** ,4, 373-387, (1966).

15. Pardo J. L. G. and Asensio P. A. G., "Rings with Finite Essential Socle", ***Proc. Am. Math. Soc.*** ,125, 971-977, (1997).

16. Pardo J.L.G. and Asensio P.A.G., "Essential Embedding of Cyclic Modules in Projetives", ***Trans. Am. Math. Soc.*** , 349, 4343-4353, (1997).

17. Wisbauer R., *Foundations of Module and Ring Theory*, ***Gordon and Breach***: Readiding, MA, (1991).

18. Wisbauer R. ,Yousif M. F. and Zhou Y., "Ikeda-Nakayama Modules", ***Beitraege zur Algebra und Geometrie*** , 43(1), 111-119, (2002).

19. Yousif M. F and Zhou Y.,"Semiregular, Semiperfect and Perfect Rings Relative to an Ideal", ***Rocky M. Jour. Math.***, 32(4), (2002).

20. Zhou Y.,"Generalizations of Perfect, Semiperfect, and Semiregular Rings", ***Algebra Colloquium***, 7:3, 305-318, (2000).

Received/ Geliş Tarihi: 24.09.2003 Accepted/Kabul Tarihi: 10.11.2004