GÜFBED/*GUSTIJ* (2020) 10 (1): 134-139 **Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**
DOI: 10.17714/gumusfenbil.598468 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Newtonyen Olmayan Lebesgue Ölçüsü

Non-Newtonian Lebesgue Measure

Oğuz OĞUR*[1,a], Sezgin DEMİR[2,b]

[1]*Giresun Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, 28200, Giresun*
[2]*Giresun Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 28200, Giresun*

• Geliş tarihi / *Received*: 30.07.2019 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 08.10.2019 • Kabul tarihi / *Accepted*: 23.10.2019

Öz

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan sınırlı kümelerin iç ve dış ölçü kavramları verildi. Ayrıca, Newtonyen olmayan kümelerin Lebesgue anlamında ölçüsü tanımlanarak ilgili temel teoremler verildi.

Anahtar kelimeler: Newtonyen Olmayan Dış Ölçü, Newtonyen Olmayan İç Ölçü, Newtonyen Olmayan Ölçü

Abstract

In this paper, definitions of the inner and outer measure of non-Newtonian bounded sets are given. Also, Lebesgue measure of non-Newtonian sets is defined and related theorems are given.

***Keywords**: Non-Newtonian Outer Measure, Non-Newtonian Inner Measure, Non-Newtonian Measure*

*[a] Oğuz OĞUR; oguz.ogur@giresun.edu.tr, Tel: (0454) 310 10 00, orcid.org/0000-0002-3206-5330
[b]orcid.org/0000-0003-1036-1363

1. Giriş

Newtonyen olmayan kalkülüs 1967-1970 yılları arasında Michael Grossman ve Robert Katz tarafından oluşturulmuştur. Önce klasik kalkülüsü daha sonra sırasıyla Geometrik, Harmonik ve Kuadratik kalkülüsü oluşturmuşlardır (Grossman ve Katz, 1972).

Matematik ve mühendislik uygulama alanlarının yanında ekonomi ve olasılık teorisinde de kullanılmıştır. Son yıllarda Newtonyen olmayan kalkülüs birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bunlardan bazıları; Çakmak ve Başar Newtonyen olmayan dizi uzayları (Çakmak ve Başar, 2012), Bashirov ve Rıza çarpımsal kompleks kalkülüs (Bashirov ve Rıza, 2011), Florak ve Assen Biomedikal görüntü analizi (Florak ve Assen, 2012), Duyar ve Oğur Newtonyen olmayan reel sayıların topolojisi (Duyar ve Oğur, 2017), Duyar ve Sağır Newtonyen olmayan açık kümelerin Lebesgue ölçüsü (Duyar ve Sağır, 2017) üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmada (Duyar ve Sağır, 2017) ve (Oğur ve Demir, 2019) çalışmalarından faydalanarak, Newtonyen olmayan iç ölçü, dış ölçü ve Lebesgue ölçüsü tanımlarının yanında ilgili temel teoremler verildi.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $A \subset \mathbb{R}$ olan birebir fonksiyona üreteç denir. Görüntü kümesi A olan bir γ üreteci düşünülsün. $\forall p,q \in A$ için verilen işlemler ve sıralama bağıntısıyla birlikte

$\gamma-$toplam

$$p \dot{+} q = \gamma\left\{\gamma^{-1}(p)+\gamma^{-1}(q)\right\}$$

$\gamma-$çıkarma

$$p \dot{-} q = \gamma\left\{\gamma^{-1}(p)-\gamma^{-1}(q)\right\}$$

$\gamma-$çarpma

$$p \dot{\times} q = \gamma\left\{\gamma^{-1}(p)\times\gamma^{-1}(q)\right\}$$

$\gamma-$bölme $\quad (q \neq \dot{0})$

$$p \dot{/} q = \gamma\left\{\gamma^{-1}(p)/\gamma^{-1}(q)\right\}$$

$\gamma-$sıralama

$$p \dot{\leq} q \Leftrightarrow \gamma^{-1}(p) \leq \gamma^{-1}(q) \tag{1}$$

$\alpha-$aritmetik olarak ifade edilir. $\mathbb{R}(N)=\{\gamma(p): p \in \mathbb{R}\}$ kümesine Newtonyen olmayan reel sayı kümesi denir (Grossman ve Katz, 1967).

Tanım 2.2. $\mathbb{R}(\mathbb{N})$' deki $(p,q)_N$ $\gamma-$ açık aralığının ölçüsü

$$m_N(p,q)_N = \gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(p),\gamma^{-1}(q)\right)\right) \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır (Duyar ve Sağır, 2017).

Tanım 2.3. $\mathbb{R}(\mathbb{N})$' deki boştan farklı bir F $\gamma-$ açık kümesinin Newtonyen olmayan ölçüsü, bileşen aralıklarının Newtonyen olmayan ölçülerinin toplamıdır: yani

$$m_N(F) = {}_N\sum_k m_N(\delta_k) \tag{3}$$

Burada $\delta_k = (p_k,q_k)_N$ ile tanımlıdır (Duyar ve Sağır, 2017).

Tanım 2.4. $\mathbb{R}(N)$'de boştan farklı $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$kapalı F kümesinin ölçüsü

$$m_N F = \gamma\left\{m\left(\gamma^{-1}(A),\gamma^{-1}(B)\right) - m\left(\gamma^{-1}\left(C_S^F\right)\right)\right\} \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S=[A,B]_N$, F kümesini içeren en küçük $\gamma-$ kapalı aralık ve $C_S^F = S - F$ $\gamma-$ açıktır (Oğur ve Demir, 2019).

3. Araştırma bulguları

Tanım 3.1. Boştan farklı $\gamma-$ sınırlı bir E kümesinin Newtonyen olmayan dış ölçüsü, E kümesini içeren tüm tüm $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$ açık kümelerin ölçülerinin en büyük alt sınırıdır; yani

$$m^*_N E = {}^{\gamma}\inf_{E \subset G}\{m_N G\} \tag{5}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2. Boştan farklı, $\gamma-$ sınırlı bir E kümesinin Newtonyen olmayan iç ölçüsü, E kümesinin içerdiği tüm $\gamma-$ kapalı kümelerin ölçülerinin en küçük üst sınırıdır. Yani

$$m_{*N} E = {}^{\gamma}\sup_{F \subset E}\{m_N F\} \tag{6}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.3. *G*, $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$ açık küme ise,

$$m^*_N G = m_{*_N} G = m_N G \tag{7}$$

sağlanır.

İspat. *E*, *G* kümesini içeren bir $\gamma-$ açık küme ve *F*, *G* kümesinin $\gamma-$ kapalı bir alt kümesi olsun.

Böylece

$$m^{*}{}_{N}G = {}^{\gamma}\inf_{G\subset E}\{m_N E\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\{m_N E\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(E)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} m\left(\gamma^{-1}(E)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$= m_N G$$

ve

$$m_{*N}G = {}^{\gamma}\sup_{F\subset G}\{m_N F\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\{m_N F\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(G)} m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)$$
$$= m_N G$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. *F* $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$ kapalı küme ise,

$$m^{*}{}_{N}F = m_{*N}F = m_N F \tag{8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. *E, F* $\gamma-$ kapalı kümesini içeren $\gamma-$ açık bir küme, *G* kümesi de *F* kümesinin $\gamma-$ kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$m^{*}{}_{N}F = {}^{\gamma}\inf_{F\subset E}\{m_N E\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\{m_N F\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\left(\alpha\left(m\left(\gamma^{-1}(E)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} m\left(\gamma^{-1}(E)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right\}$$
$$= m_N F$$

olur. Benzer şekilde

$$m_{*N}F = {}^{\gamma}\sup_{G\subset F}\{m_N G\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(F)} \gamma^{-1}\{m_N G\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(F)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(F)} m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right)$$
$$= m_N F$$

bulunur.

Teorem 3.5. Her $\gamma-$ sınırlı *E* kümesi için

$$m_{*N}E \mathrel{\dot{\leq}} m^{*}{}_{N}E \tag{9}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. *G, E* kümesini içeren $\gamma-$ açık küme, *F* kümesi de *E* kümesinin $\gamma-$ kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$m_{*N}E = {}^{\gamma}\sup_{F\subset E}\{m_N F\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\{m_N F\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)} m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right\}$$
$$\dot{\leq} \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}$$
$$= \gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\{m_N G\}\right\}$$
$$= {}^{\gamma}\inf_{E\subset G}\{m_N G\}$$
$$= m^{*}{}_{N}E \qquad \text{elde edilir.}$$

Teorem 3.6. *A* ve *B* $\gamma-$ sınırlı kümeler olsun. $A \subset B$ ise

$$m_{*N}\,A \mathrel{\dot{\leq}} m_{*N}\,B \ \text{ ve } \ m^{*}{}_{N}A \mathrel{\dot{\leq}} m^{*}{}_{N}B \tag{10}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. *E, A* kümesini içeren $\gamma-$ açık küme ve *G* kümesi de *A* kümesinin $\gamma-$ kapalı bir alt kümesi olsun. Böylece

$$m_{*N}A = {}^{\gamma}\sup_{G\subset A}\{m_N G\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(A)} \gamma^{-1}\{m_N G\}\right\}$$
$$= \gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(A)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(A)} m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$\dot{\leq}\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(L)\subset\gamma^{-1}(B)} m\left(\gamma^{-1}(L)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(L)\subset\gamma^{-1}(B)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(L)\right)\right)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(L)\subset\gamma^{-1}(B)} \gamma^{-1}\{m_N L\}\right\}$$
$$= {}^{\gamma}\sup_{L\subset B}\{m_N L\}$$
$$= m_{*N} B$$

elde edilir. Diğer eşitsizlikte benzer şekilde elde edilebilir.

Teorem 3.7. $\gamma-$ sınırlı bir E kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz E_k kümelerinin birleşimi, yani $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, olsun. Bu durumda

$$m^*_N E \,\dot{\leq}_N \sum_{k=1}^{\infty} m^*_N E_k \tag{11}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. ${}_N\sum_{k=1}^{\infty} m^*_N E_k$ $\gamma-$ ıraksak ise ispat açıktır. Bu serinin $\gamma-$ yakınsak olduğunu kabul edelim. G, E kümesini içeren $\gamma-$ açık küme ve G_k kümeleri de E_k kümelerini içeren $\gamma-$ açık kümeler olsun. Buradan $m^*_N E = {}^{\gamma}\inf_{E\subset G}\{m_N G\}$

$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\{m_N G\}\right\}$$
$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)} m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$\dot{\leq}\gamma\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\inf_{\gamma^{-1}(E_k)\subset\gamma^{-1}(G_k)} m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(\inf_{\gamma^{-1}(E_k)\subset\gamma^{-1}(G_k)} m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)\right\}$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\gamma\left(\inf_{\gamma^{-1}(E_k)\subset\gamma^{-1}(G_k)}\left(m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\gamma\left(\inf_{\gamma^{-1}(E_k)\subset\gamma^{-1}(G_k)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\gamma}\inf_{E_k\subset G_k}\left(m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty} m^*_N E_k$$

elde edilir.

Teorem 3.8. $\gamma-$ sınırlı bir E kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıdaki ikişer ikişer ayrık E_k kümelerinin birleşimi yani

$$E=\bigcup_k E_k \qquad (E_k\cap E_{k'}=\varnothing \quad k\neq k')$$

olsun. Bu durumda

$$m_{*N}E \,\dot{\geq}_N \sum_{k=1}^{\infty} m_{*N}E_k \tag{12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $G=\bigcup_k G_k$, E kümesinde kapsanan bir $\gamma-$ kapalı küme ve G_k kümeleri de E_k kümelerinin $\gamma-$ kapalı altkümeleri olsunlar. Buradan

$$m_{*N}E = {}^{\gamma}\sup_{G\subset E}\{m_N G\}$$
$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\{m_N G\}\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(G)\subset\gamma^{-1}(E)} m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}$$
$$\dot{\geq}\gamma\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\gamma^{-1}(G_k)\subset\gamma^{-1}(E_k)} m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right\}$$
$$=\gamma\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(\sup_{\gamma^{-1}(G_k)\subset\gamma^{-1}(E_k)} m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)\right\}$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\gamma\left(\sup_{\gamma^{-1}(G_k)\subset\gamma^{-1}(E_k)} m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\gamma\left(\sup_{\gamma^{-1}(G_k)\subset\gamma^{-1}(E_k)} \gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\left({}^{\gamma}\sup_{G_k\subset E_k}\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G_k)\right)\right)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty}\left({}^{\gamma}\sup_{G_k\subset E_k} m_N(G_k)\right)$$
$$=_N \sum_{k=1}^{\infty} m_{*N}E_k$$

elde edilir.

Teorem 3.9. $\gamma-$sınırlı bir E kümesi verilsin. Eğer Δ, E kümesini içeren $\gamma-$açık bir aralık ise,

$$m^*_N E \dot{+} m_{*N}\left[C^E_\Delta\right] = m_N\Delta \tag{13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. *G, E* kümesini içeren $\gamma-$ açık küme ve *K* da C_{Δ}^{E} kümesinin $\gamma-$ kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$m^{*}{}_{N}E \dot{+} m_{*N}\left[C_{\Delta}^{E}\right]$$

$$=\gamma\left\{\gamma^{-1}\left(m^{*}{}_{N}E\right)+\gamma^{-1}\left(m_{*N}\left[C_{\Delta}^{E}\right]\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\gamma^{-1}\left({}^{\gamma}\inf_{E\subset G}\left(m_{N}G\right)\right)+\gamma^{-1}\left({}^{\gamma}\sup_{K\subset C_{\Delta}^{E}}\left(m_{N}K\right)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\gamma^{-1}\left(\gamma\left(\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}\gamma^{-1}\left(m_{N}G\right)\right)\right)+\gamma^{-1}\left(\gamma\left(\sup_{\gamma^{-1}(K)\subset\gamma^{-1}\left(C_{\Delta}^{E}\right)}\gamma^{-1}\left(m_{N}K\right)\right)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}\gamma^{-1}\left(m_{N}G\right)+\sup_{\gamma^{-1}(K)\subset\gamma^{-1}\left(C_{\Delta}^{E}\right)}\gamma^{-1}\left(m_{N}K\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)+\sup_{\gamma^{-1}(K)\subset\gamma^{-1}\left(C_{\Delta}^{E}\right)}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(K)\right)\right)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}m\left(\gamma^{-1}(G)\right)+\sup_{\gamma^{-1}(K)\subset\gamma^{-1}\left(C_{\Delta}^{E}\right)}m\left(\gamma^{-1}(K)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{m^{*}\left(\gamma^{-1}(E)\right)+m_{*}\left(\gamma^{-1}\left(C_{\Delta}^{E}\right)\right)\right\}$$

$$=\gamma\left\{m\left(\gamma^{-1}(\Delta)\right)\right\}$$

$$=m_{N}\Delta\ .$$

elde edilir.

Tanım 3.10. $\gamma-$ sınırlı bir *E* kümesinin Newtonyen olmayan iç ve dış ölçüleri eşit ise, *E* kümesine Newtonyen olmayan Lebesgue ölçülebilir küme ya da kısaca $\gamma-$ ölçülebilir küme denir.

G, E kümesini içeren α-açık küme ve *F* kümesi de *E* kümesinin α-kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda $m^{*}{}_{N}E={}^{\gamma}\inf_{E\subset G}\{m_{N}G\}$

ve $m_{*N}E={}^{\gamma}\sup_{F\subset E}\{m_{N}F\}$

olur ve $m_{*N}E=m^{*}{}_{N}E$ olduğundan

$$m_{*N}E=m^{*}{}_{N}E$$

$${}^{\gamma}\inf_{E\subset G}\{m_{N}G\}={}^{\gamma}\sup_{F\subset E}\{m_{N}F\}$$

$$\Rightarrow\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right)\right)\right\}=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)}\gamma^{-1}\left(\gamma\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}=\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)}m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\gamma^{-1}\left(\gamma\left\{\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}m\left(\gamma^{-1}(G)\right)\right\}\right)=\gamma^{-1}\left(\gamma\left\{\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)}m\left(\gamma^{-1}(F)\right)\right\}\right)$$

$$\Rightarrow\inf_{\gamma^{-1}(E)\subset\gamma^{-1}(G)}m\left(\gamma^{-1}(G)\right)=\sup_{\gamma^{-1}(F)\subset\gamma^{-1}(E)}m\left(\gamma^{-1}(F)\right)$$

$$\Rightarrow m^{*}\left(\gamma^{-1}(E)\right)=m_{*}\left(\gamma^{-1}(E)\right)$$

yazılır. Bu tanıma göre *E* kümesi $\gamma-$ ölçülebilir küme ise $\gamma^{-1}(E)$, $\mathbb{R}$ de ölçülebilirdir.

Teorem 3.11. $\gamma-$ sınırlı**,** $\gamma-$ açık kümeler $\gamma-$ ölçülebilirdir.

İspat. *F* $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$ açık küme olsun. Bu durumda Teorem 2.3 gereğince $m^{*}{}_{N}F=m_{*N}F$ olur. Bu durumda *F* kümesi $\gamma-$ ölçülebilirdir.

Teorem 3.12. Her $\gamma-$ sınırlı**,** $\gamma-$ kapalı küme $\gamma-$ölçülebilirdir.

İspat. *G* $\gamma-$ sınırlı, $\gamma-$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda Teorem 2.4 gereğince $m^{*}{}_{N}G=m_{*N}G$ yazılır. Dolayısıyla *G* kümesi $\gamma-$ ölçülebilir bir kümedir.

Teorem 3.13. $\gamma-$ sınırlı bir *E* kümesi verilsin. Eğer E kümesi ikişer ikişer ayrık $\gamma-$ ölçülebilir E_k kümelerin sonlu ya da sayılabilir sonsuz kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa E, $\gamma-$ ölçülebilirdir ve

$$m_{N}E={}_{N}\sum_{k}m_{N}E_{k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $E_{k}\cap E_{k'}=\varnothing$ $\quad k\neq k'$, olmak üzere $E=\bigcup_{k}E_{k}$ şeklinde yazılsın. Bu durumda

$$m^{*}{}_{N}E\ \dot{\leq}_{N}\sum_{k}m^{*}{}_{N}E_{k}\quad\text{ve}\quad m_{*N}E\ \dot{\geq}_{N}\sum_{k}m_{*N}E_{k}$$

yazılır. *E* , $\gamma-$ sınırlı bir küme olduğundan $m_{*N}E\ \dot{\leq}\ m^{*}{}_{N}E$ dir.

E_k kümeleri α- ölçülebilir kümeler olduğundan

$${}_{N}\sum_{k}m_{N}E_{k}=\sum_{k}m_{*N}E_{k}\ \dot{\leq}\ m_{*N}E\ \dot{\leq}\ m^{*}{}_{Na}E\ \dot{\leq}_{N}\sum_{k}m^{*}{}_{N}E_{k}={}_{N}\sum_{k}m_{N}E_{k}$$

yazılır. Dolayısıyla $m_{*N}E=m^{*}{}_{N}E$ dır. Bu durumda E kümesi $\gamma-$ölçülebilirdir ve

$$m_{N}E={}_{N}\sum_{k}m_{N}E_{k}$$

elde edilir.

Teorem 3.14. Sonlu sayıda $\gamma -$ ölçülebilir kümenin birleşimi yine $\gamma -$ ölçülebilirdir.

İspat: E_k kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir kümeler olmak üzere $\mathrm{E} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$ olsun. E_k kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir olduğundan $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_k)$ kümeleri $\mathbb{R}$ de ölçülebilirdir. Bu durumda $\bigcup_{k=1}^{n} \gamma^{-1}(\mathrm{E}_k)$ kümeleri de ölçülebilirdir. Buradan $\bigcup_{k=1}^{n} \gamma^{-1}(\mathrm{E}_k) = \gamma^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k\right) = \gamma^{-1}(\mathrm{E})$ yazılır. Böylece $\gamma^{-1}(\mathrm{E})$ ölçülebilirdir. Bu ise E kümesinin $\gamma -$ ölçülebilir küme olduğunu gösterir.

Teorem 3.15. Sonlu sayıda $\gamma -$ ölçülebilir kümenin kesişimi yine $\gamma -$ ölçülebilir kümedir.

İspat. E_k kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir kümeler olmak üzere $\mathrm{E} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$ olsun. E_k kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir olduğundan $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_k)$ kümeleri ölçülebilirdir. Dolayısıyla $\bigcap_{k=1}^{n} \gamma^{-1}(\mathrm{E}_k)$ kümesi de ölçülebilirdir. Ayrıca $\bigcap_{k=1}^{n} \gamma^{-1}(\mathrm{E}_k) = \gamma^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k\right) = \gamma^{-1}(\mathrm{E})$ yazılabileceğinden $\gamma^{-1}(\mathrm{E})$ ölçülebilirdir. Dolayısıyla E kümesi $\gamma -$ ölçülebilir kümedir.

Teorem 3.16. İki $\gamma -$ ölçülebilir kümenin farkları da $\gamma -$ ölçülebilir bir kümedir.

İspat. E_1 ve E_2 kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir kümeler olmak üzere $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \setminus \mathrm{E}_2$ olsun. E_1 ve E_2 kümeleri $\gamma -$ ölçülebilir olduğundan $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_1)$ ve $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_2)$ kümeleri de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_1) \setminus \gamma^{-1}(\mathrm{E}_2)$ kümesi de ölçülebilirdir. Böylece $\gamma^{-1}(\mathrm{E}_1) \setminus \gamma^{-1}(\mathrm{E}_2) = \gamma^{-1}(\mathrm{E}_1 \setminus \mathrm{E}_2) = \gamma^{-1}(\mathrm{E})$ olduğundan $\gamma^{-1}(\mathrm{E})$ ölçülebilir bir kümedir. Buradan E kümesi $\gamma -$ ölçülebilirdir.

Teorem 3.17. E_1 ve E_2 $\gamma -$ölçülebilir kümeler olsun. Eğer $E_2 \subset E_1$ ve $E = E_1 \setminus E_2$ ise $m_{\mathrm{N}} E = m_{\mathrm{N}} E_1 \dot{-} m_{\mathrm{N}} E_2$ sağlanır.

İspat.: E_1 ve E_2 $\gamma -$ ölçülebilir olduğundan Teorem 2.16 gereğince $E_1 \setminus E_2$ de $\gamma -$ ölçülebilirdir. $E = E_1 \setminus E_2$ olduğundan $E_1 = E \cup E_2$ yazılır. Teorem 2.13 gereğince

$m_{\mathrm{N}} E_1 = m_{\mathrm{N}} E \dot{+} m_{\mathrm{N}} E_2$ olur.

Kaynaklar

Bashirov, A.E. ve Rıza, M., 2011. On complex multiplicative differentiation. TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 1(1), 75-85.

Çakmak, A. F. ve Başar F., 2012. Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. Journal of Inequalities and Applications, 228, 1-12.

Duyar, C. ve Oğur, O., 2017. A note on topology of non-Newtonian real numbers. Journal of Mathematics, 13(6), 11-14.

Duyar, C., Sağır, B. ve Oğur, O., 2015. Some basic topological properties on non-Newtonian real line. British Journal of Mathematics and Computer Science, 9(4), 300-307.

Duyar, C. ve Sağır, B., 2017. Non-Newtonian comment of Lebesgue measure in real numbers. Journal of Mathematics, Article ID 6507013, 1-4.

Erdoğan, M., 2016. Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Florak, L. ve Assen, H. V., 2012. Multiplicative calculus in biomedical image analysis. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 42(1), 64-75.

Grossman, M. ve Katz, R., 1972. Non-Newtonian calculus, 1st ed. Press, Piagen Cove Massuchusets.

Kadak, U., 2015. Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Natanson, I. P., 1964. Theory of function of a real variable, vol 1, Frederick Ungar Publishing Co., New York, NY, USA.

Oğur, O. ve Demir, S., 2019. On non-Newtonian measure for α-closed sets. New Trends in Mathematical Sciences, 7(2), 202-207.