Öneri C.6 S.22
Haziran 2004 ss.323-335

# ATAMA PROBLEMLERİNDE KARDİNALİTE SORUNU

*Mustafa M. ÖZKAN*

*Uludağ Üniversitesi, İ. İ. B. F., Ekonometri Bölümü, Dr.*

***CARDINALITY PROBLEM IN ASSIGNMENT PROBLEMS***

***Abstract: The aim of this paper is to examine cardinality problem in assignment problems and to develop alternative formulations which can solve this problem. In addition to introduction and conclusion, the article is composed of five parts. In the first three parts, alternative formulations which can solve cardinality in two dimensional assignment problems are developed by examining the basic assumptions of assignment problems in critical manner. In the fourth part, even if there is a cardinality problem in three dimensional assignment problems, an assignment model which yields optimal solutions is proposed. In that part, in order to guarantee a feasible solution, how three dimensional assignment problem can be solved by goal programming method, is also explained. In the fifth part, a three dimensional assignment problem is solved by models which developed in previous parts.***

***Keywords: Assignment Problem, Cardinality, Multi Objective Programming, Goal Programming***

***ATAMA PROBLEMLERİNDE KARDİNALİTE SORUNU***

***Özet: Bu makalenin amacı atama problemlerindeki kardinalite sorununu incelemek ve bu sorunu giderecek alternatif formülasyonlar geliştirmektir. Bu amaç doğrultusunda yazılan makale, giriş ve sonuç dışında temel olarak beş bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölümde atama problemlerinin temel varsayımları eleştirisel bir açıdan ele alınarak, iki boyutlu atama problemlerinde kardinalite sorununun görmezden gelinmesini sağlayan alternatif formülasyonlar geliştirilmiştir. Dördüncü bölümde, üç boyutlu atama problemlerinde kardinalite sorununa rağmen optimal çözümler veren bir atama modeli önerilmiştir. Bu bölümde, uygun bir çözümü garantilemek için üç boyutlu atama problemlerinin hedef programlama yöntemiyle nasıl çözümlenebileceği de açıklanmıştır. Beşinci bölümde, önceki bölümlerde geliştirilen modeller ile üç boyutlu bir atama problemi çözümlenmiştir.***

***Anahtar Kelimeler: Atama Problemi, Kardinalite, Çok Amaçlı Programlama, Hedef Programlama***

## I. GİRİŞ

Atama problemlerinde farklı kaynakların değişik görevlere etkin bir şekilde dağıtılması hedeflenir. Ulaştırma problemlerinin özel bir durumu olan atama problemlerinde kaynakların görevlere bire bir dağıtılması bir zorunluluktur. Kaynaklar personel, görevler de personel tarafından yapılması gereken işler olarak tanımlanırsa, atama modelinin yapısı gereği, bir personel bir işte görevlendirilebilir ve bir iş sadece bir personel tarafından yürütülebilir. Bu durum, atama modelinde kaynak sayısının görev sayısına eşit olmasını veya kukla değişkenler yardımıyla söz konusu eşitliğin sağlanmasını gerektirir.

Macar yöntemi, ulaştırma algoritması, 0-1 tamsayılı doğrusal programlama yöntemi ve hedef programlama yöntemi ile çözülebilen geleneksel iki boyutlu atama problemlerinde,

Kaynakların (personelin) görevlere (işlere) bire bir olarak dağıtılabileceği,

İşlerin kendi arasında etkileşimsiz olduğu,

Personelin işlere dağıtımı esnasında doğrusal olan tek bir performans ölçüm kriterinin (amaç fonksiyonunun) temel olarak alınacağı,

Personel ve/veya işlere ilişkin sübjektif isteklerin dikkate alınmayacağı,

Hangi personelin hangi işte çalıştırılması gerektiğine tek bir dönem için karar verileceği,

varsayımlarının geçerli olduğu düşünülür. *Personel sayısının iş sayısına eşit olduğunun* kabul edildiği (**a**) varsayımı, bir personelin k döneminde sadece bir işe atanabileceği ve bir işin de tek bir personel tarafından yürütülebileceği anlamına gelir. Bununla birlikte, personel sayısının iş sayısına eşit olduğu atama problemleri ile gerçek hayatta nadiren karşılaşılır. Personel sayısının iş sayısından farklı olması, kukla değişkenler (personel veya iş) yardımıyla söz konusu eşitliğin oluşturulmasını gerektirir. Atama problemlerinin diğer bir temel varsayımı olan (**b**)'de ise, personel tarafından yapılması gereken farklı işler arasında bir öncelik sıralaması olmadığı ve bir işin diğer bir işin yapılmasını etkileyemeyeceği ifade edilir (Seshan, 1981: 489). Bununla birlikte, atama problemlerinde diğer işlere göre daha önemli ve öncelikli olan bazı işler de olabilir (Zanakis, 1983: 357-9).

Geleneksel atama problemlerinde kaynakların görevlere dağıtılması esnasında maliyet, süre, gelir ve kar gibi tek bir performans ölçüm kriteri (amaç fonksiyonu) temel olarak alınır. Uygulamaya yönelik geleneksel atama problemlerinde amaç fonksiyonu sayısının tek olması ve bu amaç fonksiyonunun doğrusal olduğunun kabul edilmesi (**c**), uygun olmayan sonuçlar verebilir. Çünkü, maliyetin yanı sıra işin tamamlanma süresi, işin zamanında tamamlanma olasılığı, işin tamamlanması sonucu elde edilen gelir ve işin kalitesi gibi bileşenlerin de personelin işlere atanması sürecinde dikkate alınması istenebilir. Bununla birlikte, söz konusu bileşenler genellikle birbiriyle çelişen bir yapıdadır. Ayrıca, maliyet, süre, kalite ve gelir gibi bileşenlerin farklı birimlerde ölçülmüş olması, bu bileşenlerin tek bir amaç fonksiyonunda bir araya getirilmesini güçleştirir. Böyle bir amaç fonksiyonu oluşturulabilse bile, bu amaç fonksiyonu doğrusal olarak ifade edilemeyebilir (White, 1984; 759). Örneğin, i. personelin j. işi tamamlama süresi ile i. personelin j. işi tamamlama maliyeti birbirinden bağımsız olarak görülemez. Burada, maliyet kadar zamanı da en aza indiren çözümlerin araştırılması gerekir (Geetha ve Vartak, 1989: 97). Ayrıca, işi tamamlamak için gereken zamanın azalması, maliyetin artması sonucunu doğurur. Diğer bir deyişle, maliyet ve zaman katsayıları arasında negatif bir korelasyon beklemek oldukça mantıklıdır (Mazzola ve Neebe, 1986: 561). Bu nedenlerle, çok amaçlı ve/veya doğrusal olmayan amaç fonksiyonlu atama problemleri ile uygulamada sıkça karşılaşılır.[1]

Eğer $c_{ij}$, i. personelin j. işi tamamlama maliyetini, $x_{ij}$ değişkeni j. işin i. personel tarafından yapılıp ($x_{ij} = 1$ ise) yapılmayacağını ($x_{ij} = 0$ ise) gösterirse, atama problemleri 0-1 tamsayılı doğrusal programlama modeli olarak,

$$MinZ = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}$$

*Kısıtlayıcılar*

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i\in I \qquad (1)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j\in J$$

$$x_{ij} = \{1 \text{ veya } 0\} \quad ; \quad i\in I,\ j\in J$$

şeklinde ifade edilebilir (Aboudi ve Nemhauser, 1991: 244). Bu formülasyonda istihdam edilen personel $I$ kümesi ile, yapılması gereken işler $J$ kümesi ile nitelenmiştir. Geleneksel atama problemlerinde (**a**) varsayımı ile $I$ ve $J$ kümelerinde yer alan eleman sayılarının birbirine eşit olduğu veya diğer bir deyişle $I$ ve $J$ kümelerinin kardinalitelerinin birbirine özdeş olduğu [yani, *Card (I) = Card (J)]* kabul edilir.

Eğer i. personelinin j. işi yapması sonucu elde edilen gelir $r_{ij}$ ile gösterilirse, maksimizasyon yönlü bir atama problemi matematiksel olarak aşağıdaki gibi formüle edilebilir (Charnes vd., 1969: 365).

$$MaxZ = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_{ij}x_{ij} \qquad (2)$$

*Kısıtlayıcılar*

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i\in I$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j\in J$$

$$x_{ij} = \{1 \text{ veya } 0\} \quad ; \quad i\in I,\ j\in J$$

## II. PERSONEL SAYISININ İŞ SAYISINDAN DAHA AZ OLDUĞU İKİ BOYUTLU ATAMA PROBLEMLERİ

İstihdam edilen personel sayısının yapılması gereken iş sayısından daha az olduğu atama problemlerinin çözümlenebilmesi için, personel-iş eşitliğini sağlayacak sayıda kukla personelin modele eklenmesi gerekir. Bu durumda, kukla personelin çalışacağı işin tamamlanması, yeni bir personelin istihdam edilmesine veya bir personelin birden fazla işte çalıştırılmasına bağlıdır. Diğer bir deyişle, personel sayısının iş sayısından daha az olduğu atama problemlerinde karar vericinin olası beş karardan birini tercih etmesi gerekir. Bu kararlar, (i) bazı işlerin olmayan personel tarafından yapılıyor gösterilmesi (kukla personel), (ii) bazı işlerin yapılmasından tamamen vazgeçilmesi, (iii) bazı işlerin yapılmasının sonraki dönemlere ertelenmesi, (iv) yeni personel alımı ve (v) bir personelin birden fazla işte çalıştırılmasıdır. Bütün işlerin k döneminde tamamlanması gerekiyorsa, (i), (ii) ve (iii) kararları uygun olmayan kararlardır. Bu durumda verilebilecek en iyi karar yeni personel alımı şeklindedir. Bununla birlikte, finansman sorunları ve bütçe kısıtlayıcısı yüzünden k döneminde yeni personel istihdam edilemeyebilir. Ayrıca, iş için başvuran adaylar arasından işe uygun niteliklerde olan birisi de belirlenemeyebilir. Bir personele birden fazla iş yaptırılamayacağının kabul edildiği bir durumda, bazı işlerin yapılmasından vazgeçilmesi veya işin bir sonraki döneme ertelenmesi gerekecektir. Eğer bir personel birden fazla işte çalıştırılamıyorsa hangi işin yapılmayacağı sorusunun yanıtlanması gerekir. Bu soru aşağıda verilen atama modelini çözerek kolayca yanıtlanabilir.

$$MinZ = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}$$

*Kısıtlayıcılar*

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i\in I$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j\in J_1 \qquad (3)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1 \quad ; \quad j\in J_2$$

$$x_{ij} = \{1 \text{ veya } 0\} \quad ; \quad i\in I,\ j\in J$$

[1] Bu makalede amacımız gereği çok amaçlı ve/veya doğrusal olmayan atama problemlerindeki kardinalite sorunu ile ilgilenmeyeceğiz.

Burada, $I$ kümesi istihdam edilen personeli, $J_1$ kümesi mutlaka yapılması gereken öncelikli işleri gösterir. Eğer işler arasında bir öncelik sıralaması yoksa veya hangi işin tamamlanmasının gerekli olmadığına karar verilemiyorsa, $J_1$'in boş olduğu kabul edilebilir. $J_2$ ise yapılmasından vazgeçilebilinecek işleri gösteren boş olmayan bir kümedir. Ayrıca, işleri niteleyen $J$ kümesinin alt kümeleri olan $J_1$ ve $J_2$ arasında $J_1 \cup J_2 = J$ eşitliği geçerlidir. Bu modelin birinci kısıtlayıcısı bir personelin sadece bir işe atanabileceğini, ikinci kısıtlayıcısı tek bir personelin atanması gereken işleri, üçüncü kısıtlayıcısı ise personel atanmayabilecek, dolayısıyla da yapılmasından vazgeçilebilinecek işleri göstermektedir. İşlerin birbirinden bağımsız olduğu ve bir işin yapılmasının diğer bir işin yapılmasını etkilemeyeceğinin kabul edildiği bu model, bazı işlerin yapılmadığı bir çözümü verir.

Diğer taraftan, yapılması gereken işlerden bazıları diğerlerinden daha kısa sürede tamamlanabilir. Örneğin, bir işin tamamlanması sekiz saat, başka bir işin tamamlanması ise iki saat sürebilir. İki saatlik bir işte çalışan personelin günün geri kalan kısmında aylak bırakılması ekonomik değildir. Dolayısıyla, diğer işlere göre daha az sürede tamamlanabilir nitelikteki işler, tek bir personel tarafından yapılabilir. Ayrıca, eksik istihdam nedeniyle yapılamayan işlerin tamamlanması için bazı personelin fazla mesaiye kalması gerekebilir. Eğer bir personelin birden fazla işte çalışabileceği kabul edilirse, bu durumda hangi personelin birden fazla işte çalıştırılması gerektiğinin belirlenmesi gerekir. Bu ise, aşağıda verilen atama modelinin çözümüyle kolayca yanıtlanabilecek bir sorudur.

$$
\begin{aligned}
& MinZ = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
& \textit{Kısıtlayıcılar} \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i \in I_1 \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1 \quad ; \quad i \in I_2 \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j \in J \\
& x_{ij} = \{1 \ veya \ 0\} \quad ; \quad i \in I, \ j \in J
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Burada, $I_1$ kümesi tek bir işte çalışacak ve/veya fazla mesaiye kalmayacak personeli, boş olmayan $I_2$ kümesi birden fazla işte çalışabilecek ve/veya fazla mesaiye kalacak olan personeli, $J$ kümesi ise yapılması gereken işleri gösterir. Eğer hangi personelin birden fazla işte çalışması ve/veya fazla mesaiye kalması gerektiğine karar verilemiyorsa, $I_1$ boş bir küme olarak kabul edilebilir. Burada, personeli niteleyen $I$ kümesinin alt kümeleri olan $I_1$ ve $I_2$ arasında $I_1 \cup I_2 = I$ eşitliği geçerlidir. Bu modelin birinci kısıtlayıcısı sadece bir işte çalışabilecek personeli, ikinci kısıtlayıcısı birden fazla işte çalışabilecek ve/veya fazla mesaiye kalacak personeli, üçüncü kısıtlayıcısı ise bir işin tek bir personel tarafından yapılabileceğini gösterir. Bu model, bazı personelin birden çok işte çalıştırıldığı bir çözümle sonuçlanır.

## III. İŞ SAYISININ PERSONEL SAYISINDAN DAHA AZ OLDUĞU İKİ BOYUTLU ATAMA PROBLEMLERİ

İstihdam edilen personel sayısının yapılması gereken iş sayısından daha fazla olduğu atama problemlerinin çözümlenebilmesi için, personel-iş eşitliğini sağlayacak sayıda kukla işin modele eklenmesi gerekir. Bu durumda, istihdam edilen personelin tamamının çalıştırılması, yeni bir işin yaratılmasına veya bir personelin birden fazla işte çalıştırılmasına bağlıdır. Diğer bir ifadeyle, istihdam edilen personel sayısının yapılması gereken iş sayısından daha fazla olduğu atama problemlerinde karar vericinin olası beş karardan birini tercih etmesi gerekir. Bunlar, (i) fazla personelin çalışıyor gösterilmesi (kukla iş), (ii) fazla personelin çalışacağı yeni bir işin yaratılması, (iii) fazla personelin işten çıkarılması, (iv) fazla personelin ücretsiz izne gönderilmesi ve (v) bir işte birden çok personelin çalıştırılmasıdır. Bir personelin aslında olmayan bir işte çalışıyor görünmesi verimlilik ve maliyet açısından gerçek hayatta anlaşılabilir ve uygulanabilir olmadığı için, ilk iki kararın ekonomik olmadığı söylenebilir. Çünkü, gerçek hayatta personele göre iş oluşturulmaz, aksine işe uygun niteliklerde personel istihdam edilir. Bu nedenlerle, bir işin sadece bir personel tarafından yapılmasının gerekli olması durumunda verilebilecek en iyi karar, fazla (aylak) personelin işten çıkarılması veya ücretsiz izne gönderilmesi şeklindedir. Bu durumda, hangi personelin işten çıkarılmasının veya ücretsiz izne gönderilmesinin daha uygun olduğu sorusunun yanıtlanması gerekir. Bu sorunun yanıtı, aşağıda verilen atama modelinin çözülmesiyle bulunabilir.

$$
\begin{aligned}
& MinZ = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
& \textit{Kısıtlayıcılar} \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i \in I_3 \\
& \sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \quad ; \quad i \in I_4 \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j \in J \\
& x_{ij} = \{1 \ veya \ 0\} \quad ; \quad i \in I, \ j \in J
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Burada, $I_3$ kümesi işten çıkarılması veya ücretsiz izne gönderilmesi düşünülmeyen personeli, boş olmayan bir küme olan $I_4$ kümesi işten çıkarılabilecek veya ücretsiz izne gönderilebilecek personeli ve $J$ kümesi yapılması gereken işleri gösterir. Eğer işten çıkarılmayacak veya ücretsiz izne gönderilmeyecek personelin kimler olduğuna karar verilemiyorsa, $I_3$'ün boş olduğu kabul edilebilir. Burada, personeli niteleyen $I$ kümesinin alt kümeleri olan $I_3$ ve $I_4$ arasında $I_3 \cup I_4 = I$ eşitliği geçerlidir. Bu modelin birinci kısıtlayıcısı işten çıkarılmayacak personeli, ikinci kısıtlayıcısı işten çıkarılabilecek personeli, üçüncü kısıtlayıcısı ise bir işin tek bir personel tarafından yapılabileceğini gösterir. Bu model, bazı personelin hiçbir işte çalıştırılmadığı bir çözümü verir.

Diğer taraftan, birden fazla personel tarafından yapılması gereken işlerle gerçek hayatta sıkça karşılaşılır. Dolayısıyla, bir işin k döneminde tek bir personel tarafından yapılacağı varsayımı her zaman geçerli değildir. Ayrıca, istihdam edilen personelin tam zamanlı veya yarı zamanlı çalışma düzenlerinde istihdam edilmesi de olasıdır. Bu nedenle, personelin tamamımın tam zamanlı veya yarı zamanlı olduğunun kabul edilmesi gerekmez. Bu durumda, belirli bir işe k dönemi boyunca birden çok yarı zamanlı personelin atanma olasılığının olduğu kolayca anlaşılır. Ayrıca, personel sayısının iş sayısından daha fazla olması, aylak personelin işten çıkarılması, ücretsiz izne gönderilmesi ve aylak personelin yarı zamanlı çalışma düzenine geçirilmesi gibi sonuçları doğurur. Bu gibi durumlarda, yüksek tazminat ödenmesi gerekebileceği veya gelecek dönem üretiminde bir aksama yaşanabileceği endişesiyle personelin işten çıkarılması uygun bulunmayabilir. Bu koşullarda, "hangi işte birden fazla personel çalıştırılması uygundur?" sorusunun yanıtlanması gerekir. Bu soru, aşağıda verilen atama modelinin çözülmesi ile yanıtlanabilir.

$$
\begin{aligned}
&MinZ = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
&\textit{Kısıtlayıcılar} \\
&\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad ; \quad i \in I \\
&\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad ; \quad j \in J_3 \\
&\sum_{i \in I} x_{ij} \geq 1 \quad ; \quad j \in J_4 \\
&x_{ij} = \{1 \ veya \ 0\} \quad ; \quad i \in I, \ j \in J
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Burada, $I$ kümesi istihdam edilen personeli, $J_3$ kümesi tek bir personel tarafından yapılması gereken işleri gösterir. Eğer hangi işin tek bir personel tarafından yapılması gerektiğine karar verilemiyorsa, $J_3$ boş bir küme olarak kabul edilebilir. $J_4$ ise birden fazla personel tarafından yapılabilecek işleri gösteren boş olmayan bir kümedir. Ayrıca, işleri niteleyen $J$ kümesinin alt kümeleri olan $J_3$ ve $J_4$ arasında $J_3 \cup J_4 = J$ eşitliği geçerlidir. Bu modelin birinci kısıtlayıcısı bir personelin sadece bir işe atanabileceğini, ikinci kısıtlayıcısı tek bir personel tarafından yapılabilen işleri, üçüncü kısıtlayıcısı ise birden fazla personel tarafından yapılabilecek işleri göstermektedir. Bu model, bazı işlerde birden çok personelin istihdam edildiği bir çözümü verir.

## IV. GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ BOYUTLU ATAMA PROBLEMLERİ

Şimdi, bazı personelin birden fazla işte çalışabileceği ve bazı işlerin de birden fazla personel tarafından yapılabileceği daha genel bir durumu ele alalım. Burada, her bir işin farklı sayıda personel tarafından yapılması gerektiğini ve bir personelin birkaç işte birden çalıştırılabileceğini düşünelim. Bu durumda, genelleştirilmiş iki boyutlu bir atama problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$
\begin{aligned}
&MinZ = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
&\textit{Kısıtlayıcılar} \\
&\sum_{j \in J} x_{ij} \leq \beta_i \quad ; \quad i \in I_5 \\
&\sum_{j \in J} x_{ij} = \beta_i \quad ; \quad i \in I_6 \\
&\sum_{j \in J} x_{ij} \geq \beta_i \quad ; \quad i \in I_7 \\
&\sum_{i \in I} x_{ij} \leq \alpha_j \quad ; \quad j \in J_5 \\
&\sum_{i \in I} x_{ij} = \alpha_j \quad ; \quad j \in J_6 \\
&\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \alpha_j \quad ; \quad j \in J_7 \\
&x_{ij} = \{1 \ veya \ 0\} \quad ; \quad i \in I, \ j \in J
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Burada, $\beta_i$ değeri i. personelin çalıştırılabileceği iş sayısını gösterir. Yapılması gereken iş sayısı n ile gösterilirse, $\beta_i$ değeri, $\beta_i \leq$ n koşulunu doyuran ve negatif olmayan herhangi bir tamsayı olarak kabul edilir. $I$ kümesinin alt kümeleri olan $I_5$, $I_6$ ve $I_7$ arasında $I_5 \cup I_6 \cup I_7 = I$ eşitliği geçerlidir. Burada, $I_5$ kümesi en fazla $\beta_i$ kadar işte çalıştırılabilen personeli, $I_6$ kümesi $\beta_i$ kadar işte çalıştırılabilen personeli ve $I_7$ kümesi en az $\beta_i$ kadar işte çalıştırılması gereken personeli temsil etmektedir. $\alpha_j$ değeri ise, j. işte çalıştırılacak personel sayısını gösterir. İstihdam edilen personel sayısının m olduğu düşünülürse, $\alpha_j$ değeri $\alpha_j \leq$ m koşulunu doyuran ve negatif olmayan herhangi bir tamsayı olarak kabul edilir. $J$ kümesinin alt kümeleri olan $J_5$, $J_6$ ve $J_7$ arasında $J_5 \cup J_6 \cup J_7 = J$ eşitliği geçerlidir. Burada, $J_5$ kümesi en fazla $\alpha_j$ kadar personel tarafından yapılması gereken işleri, $J_6$ kümesi $\alpha_j$ kadar personel tarafından yapılması gereken işleri, $J_7$ kümesi ise en az $\alpha_j$ kadar personel tarafından yapılması gereken işleri nitelemektedir. Böyle bir model, yapılması gereken işlerde farklı sayıda personelin istihdam edilmesine ve/veya bir personelin birden çok işte çalıştırılmasına olanak sağlar. Bu modelin uygun olmayan bir çözümle sonuçlanması olasıdır. Uygun bir çözümün garantilenmesi için söz konusu modelin tercih öncelikli bir hedef programlama modeli olarak ele alınması da mümkündür. Atama problemlerinin hedef programlama olarak değerlendirilebileceği ilk olarak Charnes vd. (1969: 365-75) tarafından gösterilmiştir. Eşitlik 7'de verilen atama modeli, tercih öncelikli bir hedef programlama modeli olarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$Min\ Z = T_1\left[\begin{array}{l}\left\{\sum_{i\in I_5} p_i + \sum_{i\in I_6}(n_i + p_i) + \sum_{i\in I_7} n_i\right\} \\ + \left\{\sum_{j\in J_5} p_j + \sum_{j\in J_6}(n_j + p_j) + \sum_{j\in J_7} n_j\right\}\end{array}\right] + T_2[p_0]$$

*Kısıtlayıcılar*

$$\begin{array}{ll} \sum_{j\in J} x_{ij} + n_i - p_i = \beta_i & ;\ i\in I_5 \\ \sum_{j\in J} x_{ij} + n_i - p_i = \beta_i & ;\ i\in I_6 \\ \sum_{j\in J} x_{ij} + n_i - p_i = \beta_i & ;\ i\in I_7 \\ \sum_{i\in I} x_{ij} + n_j - p_j = \alpha_j & ;\ j\in J_5 \\ \sum_{i\in I} x_{ij} + n_j - p_j = \alpha_j & ;\ j\in J_6 \\ \sum_{i\in I} x_{ij} + n_j - p_j = \alpha_j & ;\ j\in J_7 \\ \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} - p_0 = 0 & ;\ i\in I \text{ ve } j\in J \\ \left.\begin{array}{ll} n_l \times p_l = 0 & ;\ l = i,j \\ n_l, p_l \geq 0 & ;\ l = i,j,o \\ x_{ij} = \{1 \text{ veya } 0\} & \end{array}\right\} & i\in I \text{ ve } j\in J \end{array} \qquad (8)$$

Burada, $n_l$ ve $p_l$ değişkenleri sırasıyla *l*. hedeften oluşan negatif ve pozitif sapmayı gösterir. Bu modelde, uygun bir çözüm garantilemek için eşitlik 7'de verilen modelin kısıtlayıcıları ilk öncelikli hedef olarak ele alınmıştır. Ayrıca, birinci tercih önceliğinde yer alan alt hedeflerin önceliklerinin aynı olduğu kabul edilmiştir. İkinci tercih önceliği ise, işlerin en az maliyette tamamlanması hedefini nitelemektedir. Burada, sıfır erişim değerli maliyet hedefinden negatif sapma olamayacağı için, amaç fonksiyonunda $n_0$ değişkenine yer verilmemiştir.

Bilindiği üzere, geleneksel atama problemlerinde personele ve/veya işlere ilişkin sübjektif isteklere yer verilmez. Bu varsayım (**d**), belirli bir personelin yapacağı işe önceden karar verilemeyeceği, bir işin yaptırılması düşünülen personelin önceden belirlenemeyeceği ve personelin çalışmak istediği işlere ilişkin tercih yapamayacağı anlamına gelir. Bu durum, personelde bir hoşnutsuzluk yaratabilir. Dolayısıyla, personelin verimli olarak çalışmasını teşvik etmek için, personelin öncelikli olarak çalışmak istediği işleri belirtmesine izin verilebilir. Örneğin, birinci işçi birinci işte çalışmayı, dördüncü işçi ise üçüncü işte çalışmamayı tercih edebilir. Bununla birlikte, işin uzman personel gerektirmesi ve hatalı yapılmasının veya zamanında tamamlanmama maliyetinin çok yüksek olması gibi nedenlerle bir takım personelin bazı işlerde çalıştırılması daha uygun görülebilir. Ayrıca, diğerlerine göre deneyimsiz olan personelin bazı işlerde görevlendirilmemesi de istenebilir. Atama modelindeki bu tür sübjektif istekler, Lee ve Schinederjans (1983: 358) tarafından aşağıda verilen hedef fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

$$x_{ijk} + n_i - p_i = \xi \qquad (9)$$

Burada, sadece 1 ve 0 değerlerini alabilen $\xi$'nın 1 olması ilgili atamanın tercih edildiğini, $\xi$'nın 0 olması ise ilgili atamanın tercih edilmediğini gösterir.

## V. ÜÇ BOYUTLU ATAMA PROBLEMLERİ

İki boyutlu atama problemlerinde, personelin işlere atanmasının sadece bir kez yapılacağı kabul edilir. Diğer bir ifadeyle, bu problemlerde hangi personelin hangi işte çalıştırılması gerektiğine tek bir dönem için karar verildiği varsayımı (**e**) yapılır. Bu bakış açısından, iki boyutlu atama problemlerinde personel tarafından yapılması gereken iş kümesinin değişmeyeceği, personelin aynı kalacağı ve personelin uzmanlaşmasının önemsiz olduğu düşünülür. Bununla birlikte, k döneminde çalışan fakat k+1 döneminde izne ayrılacak olan bir personelin ve/veya k döneminde yapılması gereken fakat, k+1 döneminde yapılması gerekmeyen bir işin de atama sürecinde dikkate alınması gerekir. Ayrıca, maliyet, süre veya gelir katsayıları k ve k+1 dönemlerinde birbirinden farklı olabilir. Böyle bir durumda, personelin işlere atanması işleminin her bir dönem için yeniden yapılması gerektiği düşünülebilir. Fakat bu işlemin dönem sayısına bağlı olarak defalarca tekrarlanması gerekebilir. Dolayısıyla, uygulama problemlerinin iki boyutlu olarak düzenlenmesi çoğu durumda yetersiz kalmaktadır. Bunun yerine, anılan problemlerin çok boyutlu olarak düzenlenmesi daha uygun bir yaklaşımdır.

Şimdi, iki boyutlu atama problemlerine k ile ifade edilen zaman boyutunun eklendiğini düşünelim. Bu durumda, j. işin i. personel tarafından k döneminde yapılıp yapılmayacağı $x_{ijk}$ değişkeni ile ifade edilir. İstihdam edilen personeli *I* kümesi, yapılması gereken işleri *J* kümesi ve işlerin yapılması gereken dönemleri de *K* kümesi ile niteleyelim. Ayrıca, bu kümelerin eleman sayılarını da sırasıyla *Card(I), Card(J)* ve *Card(K)* ile gösterelim. *Card(I)* $\leq$ *Card(J)* $\leq$ *Card(K)* olarak kabul edilirse, üç boyutlu atama problemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Pierskalla, 1968: 422).

$$MinZ = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk}$$

*Kısıtlayıcılar*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} \leq 1 & ;\ k\in K \\ \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} \leq 1 & ;\ j\in J \\ \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1 & ;\ i\in I \\ x_{ijk} = \{1 \text{ veya } 0\} & ;\ i\in I,\ j\in J \text{ ve } k\in K \end{array} \qquad (10)$$

Burada, $c_{ijk}$ i. personelin j. işi k döneminde tamamlama maliyetini, $x_{ijk}$ değişkeni ise, j. işin i. personel tarafından k döneminde yapılıp ($x_{ijk}$ = 1 ise) yapılmayacağını ($x_{ijk}$ = 0 ise) gösterir. Eğer *I*, *J* ve *K* kümelerinin kardinali-te açısından birbirine özdeş olduğu veya diğer bir deyişle bu kümelerdeki eleman sayılarının aynı olduğu düşünülürse, yukarıdaki modelin kısıtlayıcılarının tamamı eşitlik olarak ifade edilebilir (Pierskalla, 1968: 423; Balas ve Saltzman, 1991: 150; Vartak ve Geetha, 1990: 339). Bununla birlikte, uygulama problemlerinde *I*, *J* ve *K* kümelerinin aynı büyüklükte olduğu durumlarla nadiren karşılaşılır.

Üç boyutlu atama problemleri için literatürde uygulama yapılan konuya ilişkin değişik formülasyonlar geliştirilmiştir. Örneğin, *I*, *J* ve *K* kümelerinin kardinalitesinin görmezden gelinebileceği ve kısıtlayıcıların sağ taraf sabitlerinin 1'den farklı olabileceği Frieze (1974: 376-9) ve Frieze ve Yadegar (1981: 989-95) tarafından gösterilmiştir. Diğer taraftan, atama problemlerinin = ve ≤ ilişkisi ile sınırlandırılan kısıtlayıcı koşullarının ≥ ilişkisini de içerebileceği Franz ve Miller (1993: 270) tarafından belirtilmiştir.

Şimdi, yapılması gereken işler için gerekli olan personel sayısının dönemden döneme değiştiğini, işlerin tamamlanması için gereken personel sayısının her bir iş için farklı olduğunu ve personelin farklı sayıda işte çalıştırılabileceğini kabul edelim. Bu durumda, genelleştirilmiş üç boyutlu bir atama problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$
\begin{aligned}
& Min Z = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} \\
& \textit{Kısıtlayıcılar} \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} \le \delta_k \quad ; \quad k\in K_1 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} = \delta_k \quad ; \quad k\in K_2 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} \ge \delta_k \quad ; \quad k\in K_3 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} \le \alpha_j \quad ; \quad j\in J_8 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} = \alpha_j \quad ; \quad j\in J_9 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} \ge \alpha_j \quad ; \quad j\in J_{10} \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} \le \beta_i \quad ; \quad i\in I_8 \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = \beta_i \quad ; \quad i\in I_9 \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} \ge \beta_i \quad ; \quad i\in I_{10} \\
& x_{ijk} = \{1 \; veya \; 0\} \quad ; \quad i\in I,\; j\in J \; ve \; k\in K
\end{aligned} \tag{11}
$$

Bu formülasyonda k. dönemde gerekli olan personel sayısı $\delta_k$ ile, j. işte çalıştırılacak personel sayısı $\alpha_j$ ile, i. personelin çalıştırılabileceği iş sayısı ise $\beta_i$ ile gösterilmiştir. Burada, *K* kümesinin alt kümeleri arasında $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = K$ ilişkisi, *J* kümesinin alt kümeleri arasında $J_8 \cup J_9 \cup J_{10} = J$ ilişkisi ve *I* kümesinin alt kümeleri arasında $I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I$ ilişkisi geçerlidir. Bu modelin de uygun olmayan bir çözümle sonuçlanması olasıdır. Uygun bir çözümü garantilemek için söz konusu atama modeli, tercih öncelikli bir hedef programlama modeli olarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$
\begin{aligned}
& Min\; Z = T_1 \left[ \begin{matrix} \left\{ \sum_{k\in K_1} p_k + \sum_{k\in K_2} (n_k + p_k) + \sum_{k\in K_3} n_k \right\} + \\ \left\{ \sum_{j\in J_8} p_j + \sum_{j\in J_9} (n_j + p_j) + \sum_{j\in J_{10}} n_j \right\} + \\ \left\{ \sum_{i\in I_8} p_i + \sum_{i\in I_9} (n_i + p_i) + \sum_{i\in I_{10}} n_i \right\} \end{matrix} \right] \\
& \quad + T_2 [p_0] \\
& \textit{Kısıtlayıcılar} \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} + n_k - p_k = \delta_k \quad ; \quad k\in K_1 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} + n_k - p_k = \delta_k \quad ; \quad k\in K_2 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} + n_k - p_k = \delta_k \quad ; \quad k\in K_3 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_j - p_j = \alpha_j \quad ; \quad j\in J_8 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_j - p_j = \alpha_j \quad ; \quad j\in J_9 \\
& \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_j - p_j = \alpha_j \quad ; \quad j\in J_{10} \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_i - p_i = \beta_i \quad ; \quad i\in I_8 \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_i - p_i = \beta_i \quad ; \quad i\in I_9 \\
& \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} + n_i - p_i = \beta_i \quad ; \quad i\in I_{10} \\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} - p_0 = 0 \quad ; \quad i\in I \; ; \; j\in J \; ; k\in K \\
& \left. \begin{matrix} n_l \times p_l = 0 \quad ; \quad l = i,j \\ n_l, p_l \ge 0 \quad ; \quad l = i,j,o \end{matrix} \right\} \quad i\in I \; ve \; j\in J \\
& x_{ijk} = \{1 \; veya \; 0\} \quad ; \quad i\in I,\; j\in J \; ve \; k\in K
\end{aligned} \tag{12}
$$

Bu modelde, maliyetin minimum kılınması şeklindeki amaç fonksiyonunun erişim değeri sıfır olarak kabul edilmiştir. Bu sayede, sıfır erişim değerli maliyet hedefinden negatif yönde bir sapma olmayacağı düşünülerek, negatif sapma değişkeninin modelden atılması sağlanmıştır.

## VI. UYGULAMA

Bu kısımda, eşitlik 11 ve 12'deki modellerin uygun çözümler verdiği aşağıda açıklanan örnek bir problem üzerinde gösterilecektir. Bir reklam firması piyasaya yeni çıkan bir ürünün süper marketlerde tanıtımını üstlenmiştir. Firma yapmış olduğu sözleşme gereği, söz konusu tanıtım için beş süper markette reyonlar kiralamış ve söz konusu ürünün tanıtımı için on adet pazarlama elemanı istihdam etmiştir. Firma yöneticisi istihdam ettiği pazarlama elemanlarının hangi ayda ve hangi süper marketlerde görevlendirilmesi gerektiğini belirlemek istemektedir.

Pazarlama elemanlarının, süper marketlerin ve ayların sırasıyla i, j ve k simgeleri ile nitelenmesi halinde, bu problem üç boyutlu bir atama modeli olarak formüle edilebilir. Bu durumda, söz konusu probleme ilişkin karar değişkenleri,

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 \; ; & k.\ ayda\ j.\ süper\ marketteki\ tanıtım \\ & i.\ pazarlama\ elemanı\ tarafından\ yapılırsa \\ 0 \; ; & aksi\ halde \end{cases}$$

$$i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \qquad j = 1,2,3,4,5 \qquad k = 1,2,3$$

olarak tanımlanır. Burada, k=1, k=2 ve k=3 ifadeleri sırasıyla Ocak, Şubat ve Mart aylarını göstermektedir. Reklam firmasının yöneticisi ürün tanıtımında etkinliği sağlamak için süper marketlerin müşteri yoğunluklarını da dikkate almak istemektedir. Bu nedenle, söz konusu ürünün tanıtımı için aşağıda verilen kısıtlayıcı koşulları oluşturulmuştur.

**Kısıtlayıcı Kümesi 1:** Bir pazarlama elemanı Ocak ayında en fazla bir süper markette tanıtım yapabilir.

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij1} \leq 1 \quad \forall i\ için \tag{13}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 2:** Bir pazarlama elemanı Şubat ayında en fazla bir süper markette tanıtım yapabilir.

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij2} \leq 1 \quad \forall i\ için \tag{14}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 3:** Bir pazarlama elemanı Mart ayında en fazla bir süper markette tanıtım yapabilir.

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij3} \leq 1 \quad \forall i\ için \tag{15}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 4:** Bir pazarlama elemanı üç ay boyunca en fazla iki süper markette tanıtım yapabilir.

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq 2 \quad \forall i \tag{16}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 5:** Ocak ayında 1., 2., 3. ve 4. süper markette tek bir pazarlama elemanı tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij1} = 1 \quad j = 1,2,3,4 \tag{17}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 6:** Şubat ayında 1., 2., 3. ve 4. süper markette tek bir pazarlama elemanı tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij2} = 1 \quad j = 1,2,3,4 \tag{18}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 7:** Mart ayında 1., 2., 3. ve 4. süper markette tek bir pazarlama elemanı tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij3} = 1 \quad j = 1,2,3,4 \tag{19}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 8:** Ocak ayında en az iki pazarlama elemanı diğerlerinden daha yoğun olan beşinci süper markette tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij1} \geq 2 \quad j = 5 \tag{20}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 9:** Şubat ayında en az iki pazarlama elemanı beşinci süper markette tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij2} \geq 2 \quad j = 5 \tag{21}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 10:** Mart ayında en az iki pazarlama elemanı beşinci süper markette tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij3} \geq 2 \quad j = 5 \tag{22}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 11:** Reklam firmasının finansman sorunları nedeniyle her bir ayda en fazla sekiz pazarlama elemanı tanıtım yapabilir.

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} x_{ijk} \leq 8 \quad \forall k \tag{23}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 12:** Ürünlerin tanıtım kampanyasının her ay beş süper markette de yapılması gerekmektedir. Bu nedenle, tanıtım kampanyasının yapıldığı Ocak, Şubat ve Mart aylarında bir süper markette toplam olarak en az üç pazarlama elemanı tanıtım yapmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{t=1}^{3} x_{ijk} \geq 3 \quad \forall j \tag{24}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 13:** Pazarlama elemanlarının verimliliğini artırmak, pazarlama elemanları ile müşteriler arasında yaşanabilecek sorunları en aza indirgemek ve farklı pazarlama elemanları ile yeni müşterilere ulaşabilmek için, bir pazarlama elamanı bir süper markette en fazla bir kez tanıtım yapabilir.

$$\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in \{(1,1),(1,2),\ldots,(10,4),(10,5)\} \tag{25}$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 14:** Diğerlerine göre daha yetenekli olduğu düşünülen altıncı veya yedinci pazarlama elemanlarından birisi Ocak ayında beşinci süper markette tanıtım yapmalıdır.

$$x_{6,5,1} + x_{7,5,1} = 1 \qquad (26)$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 15:** Birinci ve ikinci pazarlama elemanları Şubat ayında ikinci süper markette çalışmak istememektedirler.

$$x_{1,2,2} + x_{2,2,2} = 0 \qquad (27)$$

**Kısıtlayıcı Kümesi 16:** Mart ayında beşinci süper markette dördüncü ve onuncu pazarlama elemanlarının ikisi birden tanıtım yapmalıdır.

$$x_{4,5,3} + x_{10,5,3} = 2 \qquad (28)$$

Ocak, Şubat ve Mart ayında tanıtım yapılacak süper marketlerde pazarlama elemanlarının reklam firmasından talep ettikleri saatlik ücretler tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1: Maliyet (10000 TL/saat)**

| | Süper Marketler | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ocak Ayı | | | | | Şubat Ayı | | | | | Mart Ayı | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Pazarlama Elemanı 1 | 234 | 336 | 170 | 169 | 261 | 257 | 370 | 187 | 185 | 287 | 270 | 388 | 187 | 185 | 301 |
| Pazarlama Elemanı 2 | 238 | 355 | 186 | 157 | 250 | 261 | 390 | 205 | 173 | 275 | 275 | 410 | 205 | 173 | 289 |
| Pazarlama Elemanı 3 | 208 | 325 | 158 | 170 | 234 | 229 | 358 | 173 | 187 | 257 | 241 | 358 | 173 | 187 | 270 |
| Pazarlama Elemanı 4 | 218 | 307 | 196 | 167 | 259 | 240 | 337 | 215 | 184 | 285 | 252 | 337 | 215 | 184 | 299 |
| Pazarlama Elemanı 5 | 251 | 314 | 173 | 157 | 265 | 277 | 345 | 190 | 173 | 291 | 277 | 345 | 190 | 173 | 306 |
| Pazarlama Elemanı 6 | 228 | 374 | 189 | 173 | 253 | 251 | 412 | 208 | 190 | 279 | 263 | 432 | 208 | 190 | 293 |
| Pazarlama Elemanı 7 | 254 | 344 | 160 | 158 | 252 | 279 | 378 | 176 | 174 | 277 | 279 | 397 | 176 | 174 | 291 |
| Pazarlama Elemanı 8 | 224 | 328 | 200 | 184 | 235 | 246 | 360 | 220 | 203 | 259 | 259 | 360 | 220 | 203 | 272 |
| Pazarlama Elemanı 9 | 244 | 335 | 149 | 157 | 255 | 268 | 369 | 163 | 173 | 281 | 282 | 369 | 163 | 173 | 295 |
| Pazarlama Elemanı 10 | 226 | 316 | 146 | 158 | 222 | 249 | 348 | 161 | 174 | 244 | 261 | 348 | 161 | 174 | 244 |

Bu durumda, atama problemine ilişkin amaç fonksiyonu, tanıtım kampanyasının yol açtığı maliyetin en küçüklenmesi şeklinde oluşturulabilir. Şöyle ki;

$$Min\,Z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \sum_{k=1}^{3} c_{ijk} x_{ijk} \qquad (29)$$

Pazarlama elemanları $I$ kümesi ile, süper marketler $J$ kümesi ile ve tanıtım yapılacak aylar ise $K$ kümesi ile nitelendiği zaman, bu üç kümenin kardinalitelerinin birbirine eşit olmadığı görülür. Kardinalite sorununu çözmek için atama modeline beş adet kukla süper marketin ve yedi adet kukla ayın eklenmesi olası olmasına rağmen, söz konusu tanıtım kampanyasının anlaşma yapılmayan (kukla) süper marketlerde ne zaman (kukla ay) gerçekleştirileceği sorusu yanıtlanabilir değildir.

Dolayısıyla, atama problemlerinde karşılaşılan kardinalite sorununun her zaman kukla değişkenler yardımıyla çözümlenmesinin uygun olmadığı söylenebilir. Bu durumda, atama problemlerinde kardinalite sorununun görmezden gelinmesi veya kardinalite sorununun varlığına rağmen uygun çözümlerin belirlenmesi gerekir. Böyle bir çözüm ise, eşitlik 11 ve 12'de verilen atama modelleri ile kolayca belirlenir. Buna göre, hangi pazarlama elemanının hangi süper markette ne zaman tanıtım yapmakla görevlendirileceğine ilişkin atama problemi, eşitlik 11 ve 12'deki modellere dayanarak çözümlenebilir. Söz konusu atama probleminin bir hedef programlama modeli olarak düzenlenmesi sonucu ulaşılan tercih öncelikli hedef programlama modeli Ek 1'de verilmiştir. Ek 1'de verilen hedef programlama modelinin LINDO paket programında çözülmesiyle elde edilen optimal çözüm değerleri (sıfırdan farklı olanlar) ise Ek 2'de bir tablo olarak özetlenmiştir. Bu tabloda, söz konusu atama probleminin 0-1 tamsayılı programlama yöntemi ile çözülmesi sonucu ulaşılan çözüm değerlerine de yer verilmiştir. Ek 2'de pazarlama elemanlarının Ocak-Mart döneminde hangi marketlerde tanıtım yapmakla görevlendirildiği, optimal çözüm değerlerinin düzenlenmesi ile oluşturulan ayrı bir tablo olarak verilmiştir.

Ek 2'de verilen çözümler incelendiğinde, 0-1 tamsayılı doğrusal programlama modeli ile tercih öncelikli hedef programlama modelinin amaç fonksiyon değerlerinin birbirine özdeş olduğu görülebilir. Çünkü, her iki yöntem de saatte 42.830.000 TL'lik bir maliyete işaret etmektedir. Söz konusu çözümlerin karar değişkenleri anlamında farklılık göstermesi, birinci tercih önceliğinde çözülen hedef programlama modelinin seçenekli çözümler içermesinden kaynaklanmaktadır.

## VII. SONUÇ

Bu makalede atama problemlerinde sıkça karşılaşılan kardinalite sorununun görmezden gelinmesini sağlayan 0-1 tamsayılı doğrusal programlama modelleri geliştirilmiştir. Bu modeller uygun olmayan bir çözümle sonuçlanabileceği için, söz konusu modellerin hedef programlama modeli olarak düzenlenmesi önerilmiştir. Oluşturulan hedef programlama modelleri tercih öncelikli bir yapıda ifade edilmiş ve çözüm için ardışık programlama yaklaşımı kullanılmıştır. Böylece, bir atama probleminde kardinalite sorununun olup olmadığı ile ilgilenmeksizin, uygun bir çözümün oluşturulması garantilenmiştir. Ayrıca, kardinalite sorununun bulunduğu üç boyutlu bir atama problemi hem 0-1 tamsayılı programlama modeli hem de tercih öncelikli hedef programlama modeliyle çözümlenerek, önerilen modellerin uygun ve optimal çözümler verdiği kanıtlanmıştır.

### EK 1: Hedef Programlama Modeli

$$\text{Minimum } Q = T_1\big[\, p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9+p_{10}+$$
$$p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}+p_{15}+p_{16}+p_{17}+p_{18}+p_{19}+p_{20}+p_{21}+p_{22}+p_{23}+$$
$$p_{24}+p_{25}+p_{26}+p_{27}+p_{28}+p_{29}+p_{30}+p_{31}+p_{32}+p_{33}+p_{34}+p_{35}+p_{36}+$$
$$p_{37}+p_{38}+p_{39}+p_{40}+n_{41}+n_{42}+n_{43}+n_{44}+n_{45}+p_{41}+p_{42}+p_{43}+p_{44}+$$
$$n_{46}+n_{47}+n_{48}+n_{49}+n_{50}+p_{46}+p_{47}+p_{48}+p_{49}+n_{51}+n_{52}+n_{53}+n_{54}+$$
$$n_{55}+p_{51}+p_{52}+p_{53}+p_{54}+p_{56}+p_{57}+p_{58}+n_{59}+n_{60}+n_{61}+n_{62}+n_{63}+$$
$$p_6+p_{65}+p_{66}+p_{67}+p_{68}+p_{69}+p_{70}+p_{71}+p_{72}+ p_{73}+p_{74}+p_{75}+p_{76}+$$
$$p_{77}+p_{78}+p_{79}+p_{80}+p_{81}+p_{82}+p_{83}+p_{84}+p_{85}+p_{86}+p_{87}+p_{88}+p_{89}+$$
$$p_{90}+p_{91}+p_{92}+p_{93}+p_{94}+p_{95}+p_{96}+p_{97}+p_{98}+p_{99}+p_{100}+p_{101}+$$
$$p_{102}+p_{103}+p_{104}+p_{105}+p_{106}+p_{107}+p_{108}+p_{109}+p_{110}+p_{111}+p_{112}+$$
$$p_{113}+n_{114}+n_{115}+n_{116}+p_{114}+p_{115}+p_{116}\,\big] + T_2\big[p_0\big]$$

*Kısıtlayıcılar*

$$x_{1,1,1}+x_{1,2,1}+x_{1,3,1}+x_{1,4,1}+x_{1,5,1}+n_1-p_1=1$$
$$x_{2,1,1}+x_{2,2,1}+x_{2,3,1}+x_{2,4,1}+x_{2,5,1}+n_2-p_2=1$$
$$x_{3,1,1}+x_{3,2,1}+x_{3,3,1}+x_{3,4,1}+x_{3,5,1}+n_3-p_3=1$$
$$x_{4,1,1}+x_{4,2,1}+x_{4,3,1}+x_{4,4,1}+x_{4,5,1}+n_4-p_4=1$$
$$x_{5,1,1}+x_{5,2,1}+x_{5,3,1}+x_{5,4,1}+x_{5,5,1}+n_5-p_5=1$$
$$x_{6,1,1}+x_{6,2,1}+x_{6,3,1}+x_{6,4,1}+x_{6,5,1}+n_6-p_6=1$$
$$x_{7,1,1}+x_{7,2,1}+x_{7,3,1}+x_{7,4,1}+x_{7,5,1}+n_7-p_7=1$$
$$x_{8,1,1}+x_{8,2,1}+x_{8,3,1}+x_{8,4,1}+x_{8,5,1}+n_8-p_8=1$$
$$x_{9,1,1}+x_{9,2,1}+x_{9,3,1}+x_{9,4,1}+x_{9,5,1}+n_9-p_9=1$$
$$x_{10,1,1}+x_{10,2,1}+x_{10,3,1}+x_{10,4,1}+x_{10,5,1}+n_{10}-p_{10}=1 \tag{30}$$
$$x_{1,1,2}+x_{1,2,2}+x_{1,3,2}+x_{1,4,2}+x_{1,5,2}+n_{11}-p_{11}=1$$
$$x_{2,1,2}+x_{2,2,2}+x_{2,3,2}+x_{2,4,2}+x_{2,5,2}+n_{12}-p_{12}=1$$
$$x_{3,1,2}+x_{3,2,2}+x_{3,3,2}+x_{3,4,2}+x_{3,5,2}+n_{13}-p_{13}=1$$
$$x_{4,1,2}+x_{4,2,2}+x_{4,3,2}+x_{4,4,2}+x_{4,5,2}+n_{14}-p_{14}=1$$
$$x_{5,1,2}+x_{5,2,2}+x_{5,3,2}+x_{5,4,2}+x_{5,5,2}+n_{15}-p_{15}=1$$
$$x_{6,1,2}+x_{6,2,2}+x_{6,3,2}+x_{6,4,2}+x_{6,5,2}+n_{16}-p_{16}=1$$
$$x_{7,1,2}+x_{7,2,2}+x_{7,3,2}+x_{7,4,2}+x_{7,5,2}+n_{17}-p_{17}=1$$
$$x_{8,1,2}+x_{8,2,2}+x_{8,3,2}+x_{8,4,2}+x_{8,5,2}+n_{18}-p_{18}=1$$
$$x_{9,1,2}+x_{9,2,2}+x_{9,3,2}+x_{9,4,2}+x_{9,5,2}+n_{19}-p_{19}=1$$
$$x_{10,1,2}+x_{10,2,2}+x_{10,3,2}+x_{10,4,2}+x_{10,5,2}+n_{20}-p_{20}=1$$
$$x_{1,1,3}+x_{1,2,3}+x_{1,3,3}+x_{1,4,3}+x_{1,5,3}+n_{21}-p_{21}=1$$
$$x_{2,1,3}+x_{2,2,3}+x_{2,3,3}+x_{2,4,3}+x_{2,5,3}+n_{22}-p_{22}=1$$
$$x_{3,1,3}+x_{3,2,3}+x_{3,3,3}+x_{3,4,3}+x_{3,5,3}+n_{23}-p_{23}=1$$
$$x_{4,1,3}+x_{4,2,3}+x_{4,3,3}+x_{4,4,3}+x_{4,5,3}+n_{24}-p_{24}=1$$
$$x_{5,1,3}+x_{5,2,3}+x_{5,3,3}+x_{5,4,3}+x_{5,5,3}+n_{25}-p_{25}=1$$
$$x_{6,1,3}+x_{6,2,3}+x_{6,3,3}+x_{6,4,3}+x_{6,5,3}+n_{26}-p_{26}=1$$
$$x_{7,1,3}+x_{7,2,3}+x_{7,3,3}+x_{7,4,3}+x_{7,5,3}+n_{27}-p_{27}=1$$
$$x_{8,1,3}+x_{8,2,3}+x_{8,3,3}+x_{8,4,3}+x_{8,5,3}+n_{28}-p_{28}=1$$
$$x_{9,1,3}+x_{9,2,3}+x_{9,3,3}+x_{9,4,3}+x_{9,5,3}+n_{29}-p_{29}=1$$
$$x_{10,1,3}+x_{10,2,3}+x_{10,3,3}+x_{10,4,3}+x_{10,5,3}+n_{30}-p_{30}=1$$
$$x_{1,1,1}+x_{1,2,1}+x_{1,3,1}+x_{1,4,1}+x_{1,5,1}+x_{1,1,2}+x_{1,2,2}+x_{1,3,2}+$$
$$x_{1,4,2}+x_{1,5,2}+x_{1,1,3}+x_{1,2,3}+x_{1,3,3}+x_{1,4,3}+x_{1,5,3}+n_{31}-p_{31}=2$$
$$x_{2,1,1}+x_{2,2,1}+x_{2,3,1}+x_{2,4,1}+x_{2,5,1}+x_{2,1,2}+x_{2,2,2}+x_{2,3,2}+$$
$$x_{2,4,2}+x_{2,5,2}+x_{2,1,3}+x_{2,2,3}+x_{2,3,3}+x_{2,4,3}+x_{2,5,3}+n_{32}-p_{32}=2$$
$$x_{3,1,1}+x_{3,2,1}+x_{3,3,1}+x_{3,4,1}+x_{3,5,1}+x_{3,1,2}+x_{3,2,2}+x_{3,3,2}+$$
$$x_{3,4,2}+x_{3,5,2}+x_{3,1,3}+x_{3,2,3}+x_{3,3,3}+x_{3,4,3}+x_{3,5,3}+n_{33}-p_{33}=2$$
$$x_{4,1,1}+x_{4,2,1}+x_{4,3,1}+x_{4,4,1}+x_{4,5,1}+x_{4,1,2}+x_{4,2,2}+x_{4,3,2}+$$
$$x_{4,4,2}+x_{4,5,2}+x_{4,1,3}+x_{4,2,3}+x_{4,3,3}+x_{4,4,3}+x_{4,5,3}+n_{34}-p_{34}=2$$
$$x_{5,1,1}+x_{5,2,1}+x_{5,3,1}+x_{5,4,1}+x_{5,5,1}+x_{5,1,2}+x_{5,2,2}+x_{5,3,2}+$$
$$x_{5,4,2}+x_{5,5,2}+x_{5,1,3}+x_{5,2,3}+x_{5,3,3}+x_{5,4,3}+x_{5,5,3}+n_{35}-p_{35}=2$$
$$x_{6,1,1}+x_{6,2,1}+x_{6,3,1}+x_{6,4,1}+x_{6,5,1}+x_{6,1,2}+x_{6,2,2}+x_{6,3,2}+$$
$$x_{6,4,2}+x_{6,5,2}+x_{6,1,3}+x_{6,2,3}+x_{6,3,3}+x_{6,4,3}+x_{6,5,3}+n_{36}-p_{36}=2$$
$$x_{7,1,1}+x_{7,2,1}+x_{7,3,1}+x_{7,4,1}+x_{7,5,1}+x_{7,1,2}+x_{7,2,2}+x_{7,3,2}+$$
$$x_{7,4,2}+x_{7,5,2}+x_{7,1,3}+x_{7,2,3}+x_{7,3,3}+x_{7,4,3}+x_{7,5,3}+n_{37}-p_{37}=2$$
$$x_{8,1,1}+x_{8,2,1}+x_{8,3,1}+x_{8,4,1}+x_{8,5,1}+x_{8,1,2}+x_{8,2,2}+x_{8,3,2}+$$
$$x_{8,4,2}+x_{8,5,2}+x_{8,1,3}+x_{8,2,3}+x_{8,3,3}+x_{8,4,3}+x_{8,5,3}+n_{38}-p_{38}=2$$

$x_{9,1,1}+x_{9,2,1}+x_{9,3,1}+x_{9,4,1}+x_{9,5,1}+x_{9,1,2}+x_{9,2,2}+x_{9,3,2}+$
$x_{9,4,2}+x_{9,5,2}+x_{9,1,3}+x_{9,2,3}+x_{9,3,3}+x_{9,4,3}+x_{9,5,3}+n_{39}-p_{39}=2$

$x_{10,1,1}+x_{10,2,1}+x_{10,3,1}+x_{10,4,1}+x_{10,5,1}+x_{10,1,2}+x_{10,2,2}+x_{10,3,2}+$
$x_{10,4,2}+x_{10,5,2}+x_{10,1,3}+x_{10,2,3}+x_{10,3,3}+x_{10,4,3}+x_{10,5,3}+n_{40}-p_{40}=2$

$x_{1,1,1}+x_{2,1,1}+x_{3,1,1}+x_{4,1,1}+x_{5,1,1}+x_{6,1,1}+$
$x_{7,1,1}+x_{8,1,1}+x_{9,1,1}+x_{10,1,1}+n_{41}-p_{41}=1$

$x_{1,2,1}+x_{2,2,1}+x_{3,2,1}+x_{4,2,1}+x_{5,2,1}+x_{6,2,1}+$
$x_{7,2,1}+x_{8,2,1}+x_{9,2,1}+x_{10,2,1}+n_{42}-p_{42}=1$

$x_{1,3,1}+x_{2,3,1}+x_{3,3,1}+x_{4,3,1}+x_{5,3,1}+x_{6,3,1}+$
$x_{7,3,1}+x_{8,3,1}+x_{9,3,1}+x_{10,3,1}+n_{43}-p_{43}=1$

$x_{1,4,1}+x_{2,4,1}+x_{3,4,1}+x_{4,4,1}+x_{5,4,1}+x_{6,4,1}+$
$x_{7,4,1}+x_{8,4,1}+x_{9,4,1}+x_{10,4,1}+n_{44}-p_{44}=1$

$x_{1,5,1}+x_{2,5,1}+x_{3,5,1}+x_{4,5,1}+x_{5,5,1}+x_{6,5,1}+$
$x_{7,5,1}+x_{8,5,1}+x_{9,5,1}+x_{10,5,1}+n_{45}-p_{45}=2$

$x_{1,1,2}+x_{2,1,2}+x_{3,1,2}+x_{4,1,2}+x_{5,1,2}+x_{6,1,2}+$
$x_{7,1,2}+x_{8,1,2}+x_{9,1,2}+x_{10,1,2}+n_{46}-p_{46}=1$

$x_{1,2,2}+x_{2,2,2}+x_{3,2,2}+x_{4,2,2}+x_{5,2,2}+x_{6,2,2}+$
$x_{7,2,2}+x_{8,2,2}+x_{9,2,2}+x_{10,2,2}+n_{47}-p_{47}=1$

$x_{1,3,2}+x_{2,3,2}+x_{3,3,2}+x_{4,3,2}+x_{5,3,2}+x_{6,3,2}$
$+x_{7,3,2}+x_{8,3,2}+x_{9,3,2}+x_{10,3,2}+n_{48}-p_{48}=1$

$x_{1,4,2}+x_{2,4,2}+x_{3,4,2}+x_{4,4,2}+x_{5,4,2}+x_{6,4,2}+$
$x_{7,4,2}+x_{8,4,2}+x_{9,4,2}+x_{10,4,2}+n_{49}-p_{49}=1$

$x_{1,5,2}+x_{2,5,2}+x_{3,5,2}+x_{4,5,2}+x_{5,5,2}+x_{6,5,2}+$
$x_{7,5,2}+x_{8,5,2}+x_{9,5,2}+x_{10,5,2}+n_{50}-p_{50}=2$

$x_{1,1,3}+x_{2,1,3}+x_{3,1,3}+x_{4,1,3}+x_{5,1,3}+x_{6,1,3}+$
$x_{7,1,3}+x_{8,1,3}+x_{9,1,3}+x_{10,1,3}+n_{51}-p_{51}=1$

$x_{1,2,3}+x_{2,2,3}+x_{3,2,3}+x_{4,2,3}+x_{5,2,3}+x_{6,2,3}$
$+x_{7,2,3}+x_{8,2,3}+x_{9,2,3}+x_{10,2,3}+n_{52}-p_{52}=1$

$x_{1,3,3}+x_{2,3,3}+x_{3,3,3}+x_{4,3,3}+x_{5,3,3}+x_{6,3,3}+$
$x_{7,3,3}+x_{8,3,3}+x_{9,3,3}+x_{10,3,3}+n_{53}-p_{53}=1$

$x_{1,4,3}+x_{2,4,3}+x_{3,4,3}+x_{4,4,3}+x_{5,4,3}+x_{6,4,3}+$
$x_{7,4,3}+x_{8,4,3}+x_{9,4,3}+x_{10,4,3}+n_{54}-p_{54}=1$

$x_{1,5,3}+x_{2,5,3}+x_{3,5,3}+x_{4,5,3}+x_{5,5,3}+x_{6,5,3}+$
$x_{7,5,3}+x_{8,5,3}+x_{9,5,3}+x_{10,5,3}+n_{55}-p_{55}=2$

$x_{1,1,1}+x_{1,2,1}+x_{1,3,1}+x_{1,4,1}+x_{1,5,1}+x_{2,1,1}+x_{2,2,1}+x_{2,3,1}+x_{2,4,1}+$
$x_{2,5,1}+x_{3,1,1}+x_{3,2,1}+x_{3,3,1}+x_{3,4,1}+x_{3,5,1}+x_{4,1,1}+x_{4,2,1}+x_{4,3,1}+$
$x_{4,4,1}+x_{4,5,1}+x_{5,1,1}+x_{5,2,1}+x_{5,3,1}+x_{5,4,1}+x_{5,5,1}+x_{6,1,1}+x_{6,2,1}+$
$x_{6,3,1}+x_{6,4,1}+x_{6,5,1}+x_{7,1,1}+x_{7,2,1}+x_{7,3,1}+x_{7,4,1}+x_{7,5,1}+x_{8,1,1}+$
$x_{8,2,1}+x_{8,3,1}+x_{8,4,1}+x_{8,5,1}+x_{9,1,1}+x_{9,2,1}+x_{9,3,1}+x_{9,4,1}+x_{9,5,1}+$
$x_{10,1,1}+x_{10,2,1}+x_{10,3,1}+x_{10,4,1}+x_{10,5,1}+n_{56}-p_{56}=8$

$x_{1,1,2}+x_{1,2,2}+x_{1,3,2}+x_{1,4,2}+x_{1,5,2}+x_{2,1,2}+x_{2,2,2}+x_{2,3,2}+x_{2,4,2}+$
$x_{2,5,2}+x_{3,1,2}+x_{3,2,2}+x_{3,3,2}+x_{3,4,2}+x_{3,5,2}+x_{4,1,2}+x_{4,2,2}+x_{4,3,2}+$
$x_{4,4,2}+x_{4,5,2}+x_{5,1,2}+x_{5,2,2}+x_{5,3,2}+x_{5,4,2}+x_{5,5,2}+x_{6,1,2}+x_{6,2,2}+$
$x_{6,3,2}+x_{6,4,2}+x_{6,5,2}+x_{7,1,2}+x_{7,2,2}+x_{7,3,2}+x_{7,4,2}+x_{7,5,2}+x_{8,1,2}+$
$x_{8,2,2}+x_{8,3,2}+x_{8,4,2}+x_{8,5,2}+x_{9,1,2}+x_{9,2,2}+x_{9,3,2}+x_{9,4,2}+x_{9,5,2}+$
$x_{10,1,2}+x_{10,2,2}+x_{10,3,2}+x_{10,4,2}+x_{10,5,2}+n_{57}-p_{57}=8$

$x_{1,1,3}+x_{1,2,3}+x_{1,3,3}+x_{1,4,3}+x_{1,5,3}+x_{2,1,3}+x_{2,2,3}+x_{2,3,3}+x_{2,4,3}+$
$x_{2,5,3}+x_{3,1,3}+x_{3,2,3}+x_{3,3,3}+x_{3,4,3}+x_{3,5,3}+x_{4,1,3}+x_{4,2,3}+x_{4,3,3}+$
$x_{4,4,3}+x_{4,5,3}+x_{5,1,3}+x_{5,2,3}+x_{5,3,3}+x_{5,4,3}+x_{5,5,3}+x_{6,1,3}+x_{6,2,3}+$
$x_{6,3,3}+x_{6,4,3}+x_{6,5,3}+x_{7,1,3}+x_{7,2,3}+x_{7,3,3}+x_{7,4,3}+x_{7,5,3}+x_{8,1,3}+$
$x_{8,2,3}+x_{8,3,3}+x_{8,4,3}+x_{8,5,3}+x_{9,1,3}+x_{9,2,3}+x_{9,3,3}+x_{9,4,3}+x_{9,5,3}+$
$x_{10,1,3}+x_{10,2,3}+x_{10,3,3}+x_{10,4,3}+x_{10,5,3}+n_{58}-p_{58}=8$

$x_{1,1,1}+x_{2,1,1}+x_{3,1,1}+x_{4,1,1}+x_{5,1,1}+x_{6,1,1}+x_{7,1,1}+x_{8,1,1}+x_{9,1,1}+$
$x_{10,1,1}+x_{1,1,2}+x_{2,1,2}+x_{3,1,2}+x_{4,1,2}+x_{5,1,2}+x_{6,1,2}+x_{7,1,2}+x_{8,1,2}+$
$x_{9,1,2}+x_{10,1,2}+x_{1,1,3}+x_{2,1,3}+x_{3,1,3}+x_{4,1,3}+x_{5,1,3}+x_{6,1,3}+x_{7,1,3}+$
$x_{8,1,3}+x_{9,1,3}+x_{10,1,3}+n_{59}-p_{59}=3$

$x_{1,2,1}+x_{2,2,1}+x_{3,2,1}+x_{4,2,1}+x_{5,2,1}+x_{6,2,1}+x_{7,2,1}+x_{8,2,1}+x_{9,2,1}+$
$x_{10,2,1}+x_{1,2,2}+x_{2,2,2}+x_{3,2,2}+x_{4,2,2}+x_{5,2,2}+x_{6,2,2}+x_{7,2,2}+x_{8,2,2}+$
$x_{9,2,2}+x_{10,2,2}+x_{1,2,3}+x_{2,2,3}+x_{3,2,3}+x_{4,2,3}+x_{5,2,3}+x_{6,2,3}+x_{7,2,3}+$
$x_{8,2,3}+x_{9,2,3}+x_{10,2,3}+n_{60}-p_{60}=3$

$x_{1,3,1}+x_{2,3,1}+x_{3,3,1}+x_{4,3,1}+x_{5,3,1}+x_{6,3,1}+x_{7,3,1}+x_{8,3,1}+x_{9,3,1}+$
$x_{10,3,1}+x_{1,3,2}+x_{2,3,2}+x_{3,3,2}+x_{4,3,2}+x_{5,3,2}+x_{6,3,2}+x_{7,3,2}+x_{8,3,2}+$
$x_{9,3,2}+x_{10,3,2}+x_{1,3,3}+x_{2,3,3}+x_{3,3,3}+x_{4,3,3}+x_{5,3,3}+x_{6,3,3}+x_{7,3,3}+$
$x_{8,3,3}+x_{9,3,3}+x_{10,3,3}+n_{61}-p_{61}=3$

$x_{1,4,1}+x_{2,4,1}+x_{3,4,1}+x_{4,4,1}+x_{5,4,1}+x_{6,4,1}+x_{7,4,1}+x_{8,4,1}+x_{9,4,1}+$
$x_{10,4,1}+x_{1,4,2}+x_{2,4,2}+x_{3,4,2}+x_{4,4,2}+x_{5,4,2}+x_{6,4,2}+x_{7,4,2}+x_{8,4,2}+$
$x_{9,4,2}+x_{10,4,2}+x_{1,4,3}+x_{2,4,3}+x_{3,4,3}+x_{4,4,3}+x_{5,4,3}+x_{6,4,3}+x_{7,4,3}+$
$x_{8,4,3}+x_{9,4,3}+x_{10,4,3}+n_{62}-p_{62}=3$

$x_{1,5,1}+x_{2,5,1}+x_{3,5,1}+x_{4,5,1}+x_{5,5,1}+x_{6,5,1}+x_{7,5,1}+x_{8,5,1}+x_{9,5,1}+$
$x_{10,5,1}+x_{1,5,2}+x_{2,5,2}+x_{3,5,2}+x_{4,5,2}+x_{5,5,2}+x_{6,5,2}+x_{7,5,2}+x_{8,5,2}+$
$x_{9,5,2}+x_{10,5,2}+x_{1,5,3}+x_{2,5,3}+x_{3,5,3}+x_{4,5,3}+x_{5,5,3}+x_{6,5,3}+x_{7,5,3}+$
$x_{8,5,3}+x_{9,5,3}+x_{10,5,3}+n_{63}-p_{63}=3$

$x_{1,1,1}+x_{1,1,2}+x_{1,1,3}+n_{64}-p_{64}=1$
$x_{1,2,1}+x_{1,2,2}+x_{1,2,3}+n_{65}-p_{65}=1$
$x_{1,3,1}+x_{1,3,2}+x_{1,3,3}+n_{66}-p_{66}=1$
$x_{1,4,1}+x_{1,4,2}+x_{1,4,3}+n_{67}-p_{67}=1$
$x_{1,5,1}+x_{1,5,2}+x_{1,5,3}+n_{68}-p_{68}=1$
$x_{2,1,1}+x_{2,1,2}+x_{2,1,3}+n_{69}-p_{69}=1$
$x_{2,2,1}+x_{2,2,2}+x_{2,2,3}+n_{70}-p_{70}=1$
$x_{2,3,1}+x_{2,3,2}+x_{2,3,3}+n_{71}-p_{71}=1$
$x_{2,4,1}+x_{2,4,2}+x_{2,4,3}+n_{72}-p_{72}=1$
$x_{2,5,1}+x_{2,5,2}+x_{2,5,3}+n_{73}-p_{73}=1$
$x_{3,1,1}+x_{3,1,2}+x_{3,1,3}+n_{74}-p_{74}=1$
$x_{3,2,1}+x_{3,2,2}+x_{3,2,3}+n_{75}-p_{75}=1$
$x_{3,3,1}+x_{3,3,2}+x_{3,3,3}+n_{76}-p_{76}=1$
$x_{3,4,1}+x_{3,4,2}+x_{3,4,3}+n_{77}-p_{77}=1$
$x_{3,5,1}+x_{3,5,2}+x_{3,5,3}+n_{78}-p_{78}=1$
$x_{4,1,1}+x_{4,1,2}+x_{4,1,3}+n_{79}-p_{79}=1$
$x_{4,2,1}+x_{4,2,2}+x_{4,2,3}+n_{80}-p_{80}=1$
$x_{4,3,1}+x_{4,3,2}+x_{4,3,3}+n_{81}-p_{81}=1$
$x_{4,4,1}+x_{4,4,2}+x_{4,4,3}+n_{82}-p_{82}=1$
$x_{4,5,1}+x_{4,5,2}+x_{4,5,3}+n_{83}-p_{83}=1$
$x_{5,1,1}+x_{5,1,2}+x_{5,1,3}+n_{84}-p_{84}=1$
$x_{5,2,1}+x_{5,2,2}+x_{5,2,3}+n_{85}-p_{85}=1$
$x_{5,3,1}+x_{5,3,2}+x_{5,3,3}+n_{86}-p_{86}=1$
$x_{5,4,1}+x_{5,4,2}+x_{5,4,3}+n_{87}-p_{87}=1$
$x_{5,5,1}+x_{5,5,2}+x_{5,5,3}+n_{88}-p_{88}=1$
$x_{6,1,1}+x_{6,1,2}+x_{6,1,3}+n_{89}-p_{89}=1$
$x_{6,2,1}+x_{6,2,2}+x_{6,2,3}+n_{90}-p_{90}=1$
$x_{6,3,1}+x_{6,3,2}+x_{6,3,3}+n_{91}-p_{91}=1$
$x_{6,4,1}+x_{6,4,2}+x_{6,4,3}+n_{92}-p_{92}=1$
$x_{6,5,1}+x_{6,5,2}+x_{6,5,3}+n_{93}-p_{93}=1$
$x_{7,1,1}+x_{7,1,2}+x_{7,1,3}+n_{94}-p_{94}=1$
$x_{7,2,1}+x_{7,2,2}+x_{7,2,3}+n_{95}-p_{95}=1$
$x_{7,3,1}+x_{7,3,2}+x_{7,3,3}+n_{96}-p_{96}=1$
$x_{7,4,1}+x_{7,4,2}+x_{7,4,3}+n_{97}-p_{97}=1$
$x_{7,5,1}+x_{7,5,2}+x_{7,5,3}+n_{98}-p_{98}=1$
$x_{8,1,1}+x_{8,1,2}+x_{8,1,3}+n_{99}-p_{99}=1$
$x_{8,2,1}+x_{8,2,2}+x_{8,2,3}+n_{100}-p_{100}=1$
$x_{8,3,1}+x_{8,3,2}+x_{8,3,3}+n_{101}-p_{101}=1$
$x_{8,4,1}+x_{8,4,2}+x_{8,4,3}+n_{102}-p_{102}=1$
$x_{8,5,1}+x_{8,5,2}+x_{8,5,3}+n_{103}-p_{103}=1$
$x_{9,1,1}+x_{9,1,2}+x_{9,1,3}+n_{104}-p_{104}=1$
$x_{9,2,1}+x_{9,2,2}+x_{9,2,3}+n_{105}-p_{105}=1$
$x_{9,3,1}+x_{9,3,2}+x_{9,3,3}+n_{106}-p_{106}=1$

$x_{9,4,1}+x_{9,4,2}+x_{9,4,3}+n_{107}-p_{107}=1$
$x_{9,5,1}+x_{9,5,2}+x_{9,5,3}+n_{108}-p_{108}=1$
$x_{10,1,1}+x_{10,1,2}+x_{10,1,3}+n_{109}-p_{109}=1$
$x_{10,2,1}+x_{10,2,2}+x_{10,2,3}+n_{110}-p_{110}=1$
$x_{10,3,1}+x_{10,3,2}+x_{10,3,3}+n_{111}-p_{111}=1$
$x_{10,4,1}+x_{10,4,2}+x_{10,4,3}+n_{112}-p_{112}=1$
$x_{10,5,1}+x_{10,5,2}+x_{10,5,3}+n_{113}-p_{113}=1$
$x_{6,5,1}+x_{7,5,1}+n_{114}-p_{114}=1$
$x_{1,2,2}+x_{2,2,2}+n_{115}-p_{115}=0$
$x_{4,5,3}+x_{10,5,3}+n_{116}-p_{116}=2$
$234x_{1,1,1}+336x_{1,2,1}+170x_{1,3,1}+169x_{1,4,1}+261x_{1,5,1}+$
$238x_{2,1,1}+355x_{2,2,1}+186x_{2,3,1}+157x_{2,4,1}+250x_{2,5,1}+$
$208x_{3,1,1}+325x_{3,2,1}+158x_{3,3,1}+170x_{3,4,1}+234x_{3,5,1}+$
$218x_{4,1,1}+307x_{4,2,1}+196x_{4,3,1}+167x_{4,4,1}+259x_{4,5,1}+$
$251x_{5,1,1}+314x_{5,2,1}+173x_{5,3,1}+157x_{5,4,1}+265x_{5,5,1}+$
$228x_{6,1,1}+374x_{6,2,1}+189x_{6,3,1}+173x_{6,4,1}+253x_{6,5,1}+$
$254x_{7,1,1}+344x_{7,2,1}+160x_{7,3,1}+158x_{7,4,1}+252x_{7,5,1}+$
$224x_{8,1,1}+328x_{8,2,1}+200x_{8,3,1}+184x_{8,4,1}+235x_{8,5,1}+$
$244x_{9,1,1}+335x_{9,2,1}+149x_{9,3,1}+157x_{9,4,1}+255x_{9,5,1}+$
$226x_{10,1,1}+316x_{10,2,1}+146x_{10,3,1}+158x_{10,4,1}+222x_{10,5,1}+$
$257x_{1,1,2}+370x_{1,2,2}+187x_{1,3,2}+185x_{1,4,2}+287x_{1,5,2}+$
$261x_{2,1,2}+390x_{2,2,2}+205x_{2,3,2}+173x_{2,4,2}+275x_{2,5,2}+$
$229x_{3,1,2}+358x_{3,2,2}+173x_{3,3,2}+187x_{3,4,2}+257x_{3,5,2}+$
$240x_{4,1,2}+337x_{4,2,2}+215x_{4,3,2}+184x_{4,4,2}+285x_{4,5,2}+$
$277x_{5,1,2}+345x_{5,2,2}+190x_{5,3,2}+173x_{5,4,2}+291x_{5,5,2}+$
$251x_{6,1,2}+412x_{6,2,2}+208x_{6,3,2}+190x_{6,4,2}+279x_{6,5,2}+$
$279x_{7,1,2}+378x_{7,2,2}+176x_{7,3,2}+174x_{7,4,2}+277x_{7,5,2}+$
$246x_{8,1,2}+360x_{8,2,2}+220x_{8,3,2}+203x_{8,4,2}+259x_{8,5,2}+$
$268x_{9,1,2}+369x_{9,2,2}+163x_{9,3,2}+173x_{9,4,2}+281x_{9,5,2}+$
$249x_{10,1,2}+348x_{10,2,2}+161x_{10,3,2}+174x_{10,4,2}+244x_{10,5,2}+$
$270x_{1,1,3}+388x_{1,2,3}+187x_{1,3,3}+185x_{1,4,3}+301x_{1,5,3}+275x_{2,1,3}+$
$410x_{2,2,3}+205x_{2,3,3}+173x_{2,4,3}+289x_{2,5,3}+241x_{3,1,3}+358x_{3,2,3}+$
$173x_{3,3,3}+187x_{3,4,3}+270x_{3,5,3}+252x_{4,1,3}+337x_{4,2,3}+215x_{4,3,3}+$
$184x_{4,4,3}+299x_{4,5,3}+277x_{5,1,3}+345x_{5,2,3}+190x_{5,3,3}+173x_{5,4,3}+$
$306x_{5,5,3}+263x_{6,1,3}+432x_{6,2,3}+208x_{6,3,3}+190x_{6,4,3}+293x_{6,5,3}+$
$279x_{7,1,3}+397x_{7,2,3}+176x_{7,3,3}+174x_{7,4,3}+291x_{7,5,3}+259x_{8,1,3}+$
$360x_{8,2,3}+220x_{8,3,3}+203x_{8,4,3}+272x_{8,5,3}+282x_{9,1,3}+369x_{9,2,3}+$
$163x_{9,3,3}+173x_{9,4,3}+295x_{9,5,3}+261x_{10,1,3}+348x_{10,2,3}+$
$161x_{10,3,3}+174x_{10,4,3}+244x_{10,5,3}-p_0=0$
ve
$x_{i,j,k}=$ 0 veya 1

$$\left.\begin{aligned} n_l, p_l &\geq 0 \\ n_l \times p_l &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots, 115, 116$$

**Ek 2: Optimal Çözüm Değerleri**

**Tablo 2: Optimal Çözüm Değerleri**

| Tamsayılı Doğrusal Programlama Modeli | | Hedef Programlama Yöntemi 2. Tercih Önceliği | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{1,2,1}=1$ | $x_{8,5,2}=1$ | $x_{2,5,1}=1$ | $x_{6,5,1}=1$ | $n_4=1$ | $n_{31}=2$ | $n_{70}=1$ | $n_{88}=1$ | |
| $x_{2,5,1}=1$ | $x_{9,3,2}=1$ | $x_{7,3,1}=1$ | $x_{2,4,2}=1$ | $n_{11}=1$ | $n_{57}=2$ | $n_{71}=1$ | $n_{90}=1$ | $n_{104}=1$ |
| $x_{5,4,1}=1$ | $x_{3,1,3}=1$ | $x_{3,5,2}=1$ | $x_{6,1,2}=1$ | $n_{10}=1$ | $n_{58}=2$ | $n_{75}=1$ | $n_{91}=1$ | $n_{108}=1$ |
| $x_{7,5,1}=1$ | $x_{4,5,3}=1$ | $x_{3,1,3}=1$ | $x_{5,2,3}=1$ | $n_{15}=1$ | $n_{56}=2$ | $n_{76}=1$ | $n_{92}=1$ | $n_{109}=1$ |
| $x_{8,1,1}=1$ | $x_{5,2,3}=1$ | $x_{9,3,3}=1$ | $x_{8,1,1}=1$ | $n_{17}=1$ | $n_{64}=1$ | $n_{77}=1$ | $n_{94}=1$ | $n_{110}=1$ |
| $x_{10,3,1}=1$ | $x_{7,3,3}=1$ | $x_{5,4,1}=1$ | $x_{10,3,2}=1$ | $n_{19}=1$ | $n_{65}=1$ | $n_{79}=1$ | $n_{95}=1$ | $n_{107}=1$ |
| $x_{2,4,2}=1$ | $x_{9,4,3}=1$ | $x_{9,2,1}=1$ | $x_{8,5,2}=1$ | $n_{21}=1$ | $n_{66}=1$ | $n_{81}=1$ | $n_{98}=1$ | $n_{112}=1$ |
| $x_{3,5,2}=1$ | $x_{10,5,3}=1$ | $x_{4,2,2}=1$ | $x_{7,4,3}=1$ | $n_{22}=1$ | $n_{67}=1$ | $n_{82}=1$ | $n_{100}=1$ | $p_{63}=3$ |
| $x_{4,2,2}=1$ | Min Z=4283 | $x_{4,5,3}=1$ | $n_1=1$ | $n_{26}=1$ | $n_{68}=1$ | $n_{84}=1$ | $n_{101}=1$ | $p_0=4283$ |
| $x_{6,1,2}=1$ | | $x_{10,5,3}=1$ | $n_3=1$ | $n_{28}=1$ | $n_{69}=1$ | $n_{86}=1$ | $n_{102}=1$ | |

**Tablo 3: Pazarlama Elemanlarının Çalışma Planı**

| | 0-1 Tamsayılı Doğrusal Programlama Modeli | | | Hedef Programlama Yöntemi 2. Tercih Önceliği | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ocak Ayı | Şubat Ayı | Mart Ayı | Ocak Ayı | Şubat Ayı | Mart Ayı |
| Pazarlama Elemanı 1 | Market 2 | - | - | - | - | - |
| Pazarlama Elemanı 2 | Market 5 | Market 4 | - | Market 5 | Market 4 | - |
| Pazarlama Elemanı 3 | - | Market 5 | Market 1 | - | Market 5 | Market 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pazarlama Elemanı 4 | - | Market 2 | Market 5 | - | Market 2 | Market 5 |
| Pazarlama Elemanı 5 | Market 4 | - | Market 2 | Market 4 | - | Market 2 |
| Pazarlama Elemanı 6 | - | Market 1 | - | Market 5 | Market 1 | - |
| Pazarlama Elemanı 7 | Market 5 | - | Market 3 | Market 3 | - | Market 4 |
| Pazarlama Elemanı 8 | Market 1 | Market 5 | - | Market 1 | Market 5 | - |
| Pazarlama Elemanı 9 | - | Market 3 | Market 4 | Market 2 | - | Market 3 |
| Pazarlama Elemanı 10 | Market 3 | - | Market 5 | - | Market 3 | Market 5 |

## YARARLANILAN KAYNAKLAR


ABOUDI, RONNY AND GEORGE L. NEMHAUSER (1991), "Some Facets for an Assignment Problem with Side Constraints", Operations Research, Volume 39 (2), 244-250.

AMINI, MOHAMMAD M. AND MICHAEL RACER (1994), "A Rigorous Computational Comparison of Alternative Solution Methods for the Generalized Assignment Problem", Management Science, Volume 40, Issue 7, 868-890.

BALAS, EGON AND MATTHEW J. SALTZMAN (1991), "An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem", Operations Research, Volume 39 (1), 150-161.

CARON GAETAN, PIERRI HANSEN AND BRIGITTE JAUMARD (1999), "The Assignment Problem with Seniority and Job Priority Constraints", Operations Research, Volume 37 (3), 449-453.

CHARNES A., W. W. COOPER, R. J. NIEHAUS AND A. STEDRY (1969), "Static and Dynamic Assignment Models with Multiple Objectives, and Some Remarks on Organization Design", Management Science, Volume 15, No 8, 365-375.

FEIRING, B. R. (1993), "A Model Generation Approach to the Personel Assignment Problem", The Journal of the Operational Research Society, Volume 44 (5), 503-512.

FRANZI LORI S. AND JANIS L. MILLER (1993), "Scheduling Medical Residents to Rotations: Solving the Large-Scale Multiperiod Staff Assignment Problem", Operations Research, Volume 41 (2), 269-279.

FRIEZE, A.M. (1974), "A Bilinear Programming Formulation of the 3-Dimensional Assignment Problem", Mathematical Programming 7, 376-379.

GEETHA, S. AND M. N. VARTAK (1989), "Time-Cost Trade-Off Analysis in Some Constrained Assignment Problems", The Journal of the Operational Research Society, Volume 40 (1), 97-101.

GEOFFRION, A. M. AND G. W. GRAVES (1976), "Scheduling Paralel Production Lines with Changeover Costs: Practical Application of a Quadratic Assignment / LP Approach", Operations Research, Volume 24 (4), 595-610.

HAHN, PETER AND THOMAS GRANT (1998), "Lower Bounds for the Quadratic Assignment Problem Based upon a Dual Formulation", Operations Research, Volume 46 (6), 912-922.

HANAN, MAURICE AND JEROME M. KURTZBERG (1972), " A Review of the Placement and Quadratic Assignment Problems", SIAM Review, Volume 14 (2), 324-342.

HOWTON, F. WILLIAM (1963), "Work Assignment and Interpersonel Relations in a Research Organizations: Some Participant Observations", Administrative Science Quarterly, Volume 7 (4), 502-520.

LASHKARI R. S. AND S.C. JAISINGH (1980), "A Heuristic Approach to Quadratic Assignment Problem", The Journal of the Operational Research Society, Volume 31 (9), 845-850.

LEE, SANG M. AND MARC J. SCHNIEDERJANS (1983), "A Multicriteria Assignment Problem: A Goal Programming Approach", Interfaces 13, 75-81.

MAZZOLA, JOSEPH B., AND ALAN W. NEEBE (1986), "Resource-Constraint Assignment Scheduling", Operations Research, Volume 34 (4), 560-572.

PASSY, URRY (1971), "Nonlinear Assignment Problems Treated by Geometric Programming", Operations Research, Volume 19 (7), 1675-1690.

PIERSKALLA, WILLIAM P. (1968), "The Multidimensional Assignment Problem", Operations Research, Volume 16 (2), 422-431.

RITZMAN LARRY, JOHN BRADFORD AND ROBERT JACOBS (1979), "A Multiple Objective Approach to Space Planning for Academic Facilities", Management Science, Volume 25 (9), 895-906.

ROSS, G. TERRY AND ANDRIS A ZOLTNERS (1979), "Weighted Assignment Models and their Applications", Management Science, Volume 25 (7), 683-696.

SAATÇIOĞLU, ÖMER (1987), "A Multi-Attribute Assignment Goal-Programming Model with Incentives", The Journal of the Operational Research Society, Volume 38 (4), 361-365.

SARKAR, ABHIRUP (1984), "A Dynamic Assignment Problem", International Economic Review, Volume 25 (3), 663-670.

SESHAN, C. R. (1981), "Some Generalizations of the Time Minimizing Assignment Problem", The Journal of the Operational Research Society, Volume 32 (6), 489-494.

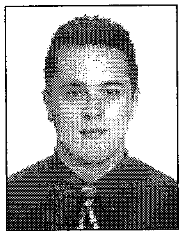
SRINIVASAN, V. AND G.L. THOMPSON (1973), "Alternate Formulations for Static Multi-Attribute Assignment Models", Management Science, Volume 20 (2), 154-158.

VARTAK, M. N. AND S. GEETHA (1990), "Specially Structured Precedence Constraints in Three-Dimensional Bottleneck Assignment Problems, *The Journal of the Operational Research Society*, Volume 41 (4), 339-344.

WHITE, D.J. (1984), "A Special Multi-Objective Assignment Problem", The Journal of the Operational Research Society, Volume 35 (8), 759-767.

ZANAKIS, STELIOS H. (1983), "A Staff to Job Assignment (Partitioning) Problem with Multiple Objectives", Computers and Operations Research, Volume 10, No 4, 357-363.

**Mustafa M. ÖZKAN**



Uludağ Üniversitesi, İ.İ.B.F.,
Ekonometri Bölümü, BURSA

0224 4428940-41135

mozkan@uludag.edu.tr

Mustafa M. Özkan has Ph. D. of Operations Research at Uludag University Social Sciences Institute. He is Research Assistant at Uludag University. His research areas are fuzzy sets, multi objective programming, network modelling.