Öneri.C.5.S.18.
Haziran 2002.s.21-28.

HİSSE SENEDİ FİYATLARININ MODELLENMESİ ve OPSİYONLARIN FİYATLANDIRILMASI: BİNOMİAL YAKLAŞIM

Ömer ÖNALAN

Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F., İşletme Böl., Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı, Yardımcı Doçent Dr.

***Abstract:** In this study, we explain to the pricing hedging of derivatives in finite markets models. In this setting we work out of the key financial and mathematical ideas underlying modern derivatives.*
Asset analysis without having to deal with the technicalities stochastic calculus. We explain the notation of dynamic edging and introduce the concept of an equivalent martingale – measure. We discuss the fundamental theorem of asset pricing and derive the Risk- Neutral pricing principle. To illustrate these concepts we briefly discuss the Binomial model of Cox, Ross and Rubinstein (1979)

I. GİRİŞ

Bu çalışmada, $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ sonlu durum uzayı ile bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde çalışıyoruz. Ticaret günleri t=1,2,...,N sonlu olup , t=N göz önüne alınan türev kontratın vadesini göstermektedir. bilgi akışını modellemek için $\{F_n\}$ n=0,1,2,...,N "Süzgeç"ini kullanıyoruz: bir A olayının gerçekleşip gerçekleşmediğine , t=n zamanına kadar elde edilen bilgiye göre karar verilebiliyorsa A olayına "F_n' ye aittir" denir.

"*Türev Menkul Kıymet*"- Ödemeleri başka bir menkul kıymetin ödemelerine bağlı olan menkul kıymetlerin - fiyatlaması ve korunma (hedging) modern finanstaki en önemli konulardan biridir.Bir türev menkul kıymetin en genel örneği hisse senedi üzerindeki bir alım opsiyonudur.Bu ise bir hisse senedinin bir hissesini önceden belirlenmiş bir K (kullanım fiyatı) fiyatından, yine önceden belirlenmiş bir T tarihine kadar alma hakkı (zorunluluk değil bu nedenle "opsiyon" deniliyor) veren bir menkul kıymettir. Opsiyonun fiyatı, ilgili hisse senedinin fiyat dinamiklerinin istatistiksel özellikleri ve yatırımcıların bu menkul kıymetleri alıp satma tercihleri birleştirilerek dengede belirlenmelidir. Bu çalışmada, hisse senedi fiyatlarının nasıl modelleneceği ve hisse senedi opsiyonlarının nasıl fiyatlandırılacağı konusunu araştırıyoruz. S_n, verilmiş olan bir hisse senedinin t=n zamandaki fiyatını göstermektedir.(zaman birimleri; yıllar, aylar, haftalar veya günlerdir.) $n \geq 0$,

Analize başlamak için, reel hisse senedi fiyat süreci için uygun bir stokastik modeli düşünmemiz gerekmektedir. Şu halde, $\{S_n; n \geq 0\}$ fiyat süreci için, bazı modelleme varsayımları türetmeliyiz. Baz hisse senedinden yaratılabilecek bir finansal türevler yelpazesinin varlığını kabul edelim.Böyle türevlerin birkaç örneği aşağıdadır [1].

Avrupa Alım Opsiyonu: Bu opsiyonun sahibi, bir hisse senedinin bir hissesini önceden belirlenmiş , bir gelecek t=n zamanında (vade tarihi), yine önceden belirlenmiş bir K fiyatından (kullanım fiyatı) alma hakkına sahiptir. t= 0 zamanında opsiyon alınır. $n \geq 1$ ve K sabitlerinin her ikisi de kontratta yazılmıştır ve kontrat t=n zamanında sona erer. Eğer $S_n > K$ ise sahibi opsiyonu t=n zamanında kullanabilir ve $S_n - K'$ lık bir ödeme elde eder.Eğer $S_n < K$ ise opsiyon değersizdir. Bu durumda ödeme 0' dır. Böylece t=n vade tarihinde opsiyonun sahibine yaptığı ödeme $C_n = (S_n - K)^+$ dır. Opsiyonun sahibi hisse senedinin fiyatlarının yükseleceğini ümit eder.

Amerikan Alım Opsiyonu: Avrupa opsiyonlarından tek farkı $t = k, 1 \leq k \leq n$ gibi herhangi bir zamanda kullanılabilmesidir. Buradaki fikir şudur: Eğer hisse senedinin fiyatı t=n zamanından önce K' fiyatının üzerine çıkmışsa, opsiyon vade tarihini beklemeden kullanılabilmelidir.

Bermuda Alım Opsiyonu: Bu tür opsiyonlar Amerikan alım opsiyonlarına benzer. Tek farkı, vadeden önceki herhangi zaman yerine, önceki zamanların önceden belirlenmiş bir alt kümesinde kullanılabilir olmasıdır.

Asya Alım Opsiyonu: Bu tür opsiyonlar Avrupa alım opsiyonuna benzer, farkı ise şudur; Opsiyonun t = n zamandaki ödemesi için hisse senedinin "Ortalama" fiyatı kullanılmaktadır.

$$C_1 = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_n - K \right)^+$$

Satım Opsiyonları: Yukarıdaki opsiyonlarının hepsi benzer bir satım opsiyonuna sahiptir. Opsiyonun sahibi, hisse senedinin bir hissesini t=n zamanında, K fiyatından satma hakkına sahiptir. Avrupa satım opsiyonunda, t=n zamanındaki ödeme $(K - S_n)^+$ dir. Satım opsiyonunun sahibi, hisse senedi fiyatının düşeceğini ümit eder. Satımlar alımlardan anlamlı bir şekilde farklıdır.Gerçekte, hisse senedi hisselerinin el değiştirmesine gerek yoktur. Örneğin, Avrupa alım opsiyonunun sahibi, denk bir şekilde t=n zamandaki ödemesi, $C_1 = (S_n - K)^+$ miktarlık bir kontrol sözleşmesini imzalar, sadece para el değiştirir. Esasında böyle opsiyonların alıcıları ve satıcıları basitçe, hisse senedi fiyatlarının değişeceğini düşünerek kumar oynamaktadırlar ve ödemeler tam olarak, baz hisse senedi alıp, satmadan bu oynanabilir, sadece her günün sonunda hisse senedi fiyatlarının ne olduğunu bilmeye ihtiyacımız vardır. (Şüphesiz bu kumarı idare eden kanunlar olacaktır. İşte bu nedenle, formal hisse senedi piyasaları vardır ve yatırım firmaları yasal olarak hisse senedi, opsiyonlar ve diğer malları satarlar.). Aşağıdaki kısımlarda,"Bu opsiyonlar için bir adil fiyat nedir?"sorusunu araştıracağız [2, 3].

II. HİSSE SENEDİ FİYATLARI İÇİN BİNOMİAL MODEL

S_0' ın hisse senedinin bir hissesinin t=0 zamanındaki fiyatı olduğunu kabul edelim. S_1 ise hisse senedinin t=1 zamanındaki fiyatıdır. Şimdi de fiyat hareketlerinin bir *Bernoulli rassal değişkeni* formunda olduğunu kabul edelim;

$$S_1 = \begin{Bmatrix} uS_0, & p\ , & \text{ihtimale} \\ dS_0, & 1-p, & \text{ihtimalle} \end{Bmatrix}$$

burada 0<d<1<u ve 0<p<1 dir. Fiyattaki göreceli değişim $= S_1 / S_0$ oranı ile verilmiş olsun. Burada $P(Y_1 = u) = p,\quad P(Y_1 = d) = 1 - p$ Böylece hisse senedi ya yukarıya (u) ya da aşağıya (d) gider. Belirsizlik bir baz Bernoulli (p) rassal değişkeni yüzündendir. p' ye ilave olarak, Risk u ve d' nin büyüklüğüne de bağlıdır: Farklı hisse senetleri farklı p, u, d' ye sahip olacaktırlar. Fiyatların $n \geq 1$ gelecek zamanlarında da aynı şekilde değiştiğini kabul edelim; S_n değeri verilmiş olsun.Bu durumda,

$$S_{n+1} = \begin{Bmatrix} uS_n & p & ihtimalle \\ dS_n & 1-p & ihtimalle \end{Bmatrix},\ n \geq 0$$

Geçmişten bağımsızdır. Buradan şu ortaya çıkar. $S_n : n \geq 0$ bir **Markov Zinciri** dir. Çünkü

$$S_n = S_0 * Y_1 * Y_2 * \ldots * Y_n \qquad (1)$$

$Y_i = S_i / S_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, Ardışık fiyat oranları

$$P(Y = u) = p\ ,\ P(Y = d) = 1 - p \qquad (2)$$

dağılımı ile benzer ve aynı dağılıma sahiptirler.Şu halde,

$$E(S_n) = E(\ S_0 * Y_1 * Y_2 * \ldots * Y_n)$$

$$= S_0 E(Y_1 * Y_2 * \ldots * Y_n)$$

$$= S_0 (E(Y))^n\ ,\quad n \geq 0$$

olur. Çünkü, S_0 bir sabit, Y_i' ler ise $E(Y_i) = E(Y) = pu + (1-p)d$ ile bağımsız aynı dağılmış rassal değişkenlerdir.Böylece,

$$E(S_n) = S_0 (\,pu + (1-p)d)^n\ ,\quad n \geq 0 \text{ olur.}$$

Markov özelliği: Şu anki durum S_n verilmiş olduğunda, gelecek S_{n+1} , $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$ geçmişinden bağımsızdır. Burada S_n verilmiştir, gelecek $S_{n+1} = S_n Y_{n+1}$ yeni bir bağımsız rassal değişken olup, Y_{n+1} ile tam olarak belirlenir. Böylece gerçekten geçmişten bağımsız olur. Verilen bir n için (1) ve (2) den şu ortaya çıkar ; $i \in \{0, \ldots n\}$ ***için*** $S_n = u^i d^{n-i}$ ***olur. Bunun anlamı şudur***: Hisse senedi fiyatı, ilk n-periyot süresince i- defa yükselir, n - i defa düşer. Bu duruma karşılık gelen olasılıklar ise ***Binom (n,p)*** dağılımı ile belirlenir:

$$P(S_n = u^i d^{n-i} S_0) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ 0 \leq i \leq n$$

Bu model , yukarıdaki bağımsız aynı dağılmış Y_i ardışık getiri oranları kullanılarak, aralık gittikçe daha küçük alt aralıklara bölünmek suretiyle, sürekli zaman aralığındaki hisse senedi fiyatlarının değişimi (tekamülü) için iyi bir *yaklaşım olarak kullanılabilir.* u d ve p parametrelerinin nasıl tahmin edileceği üzerinde duracağız.Şimdilik bu parametrelerin bilindiğini kabul edelim [3-5].

II.1. Hisse Senedi ve Risksiz Mallardan Oluşan Portföyler

Şimdi artık hisse senedine ilave olarak bir de r>0 sabit faiz oranı ile **risksiz mal** (para) vardır. Almış olduğumuz risksiz malın x hissenin t=n zamanındaki değeri , $x(1+r)^n$ Bu malın alınması demek, paranın borç olarak verilmesi demektir. Bu malın satılması ise borçlanılması demektir. r ' nin analiz içerisinde sabit kaldığını kabul edelim. 1+r<u durumuna sahip olmalıyız. Aksi takdirde hisse senedine yatırım yapmanın bir anlamı olmazdı. Hisse senedi ve risksiz malın bir **portföyü,** verilmiş olan bir zamandaki , toplam yatırımı tanımlayan bir (α,β) çiftidir. α : Hisse senedinin hisseleri , β :Risksiz malın hisseleri.. Şunu biliyoruz ki, hisse senedi ve risksiz malın bir portföyü her zaman iyi tanımlanmış bir fiyata sahiptir: Yani t = 0 zamanında portföyün değeri $\alpha S_0+\beta$ dır.Genelde ise t = n , n$\geq$ 0 zamanında, Portföyün Değeri: $\alpha S_n+\beta(1+r)^n$ şeklinde ifade edilir.

II.2. Vade Tarihi t=1 İçin Avrupa Alım Opsiyonunun Fiyatlandırılması

Şimdi de hisse senedinin bir hissesi için kullanım fiyatı K ve vade tarihi t=1 olan bir Avrupa Alım Opsiyonunu düşünelim: Bu opsiyonun sahibi t =1 zamanında, hisse senedinin bir hissesini K fiyatından alma hakkına sahiptir. Eğer t=1 zamanında $S_1>K$ ise opsiyonun sahibi opsiyonu kullanır ve bu durumda S_1-K 'lık bir ödeme elde eder. Aksi takdirde $(S_1<K)$ ise vade tarihinde opsiyon değersiz olup kullanılmaz. Bu durumda opsiyon sahibine yapılan ödeme $C_1=(S_1-K)^+$ dır. ***Fikir şudur:*** Eğer opsiyon kullanılmışsa , opsiyon sahibi hisse senedini K fiyatından alarak bunu piyasada S_1 fiyatından satmak suretiyle S_1-K ' lık bir ödeme elde edecektir. Böyle bir opsiyonun sahibi hisse senedinin fiyatının yükseleceğini ümit eder.

Eğer hisse senedi fiyatı yükseliyorsa;

$$C_1=C_{1u}=(uS_0-K)^+$$

Eğer hisse senedi fiyatı düşüyorsa;

$$C_1=C_{1d}=(dS_0-K)^+$$

Şimdide bu opsiyon için olması gereken fiyatı belirleyelim bunu C_0 ile gösterelim. C_0 : Hisse senedinin **türevinin** bir hissesinin fiyatıdır. b hisse senedinin maliyeti , bC_0 olacaktır. Böylece sonunda, bu opsiyon hisse senedi gibi alınıp satılacaktır. Hisse senedi ve risksiz malın portföyüne benzemez. Olması gereken C_0 fiyatı değildir. Bu durumda opsiyonun ödemesi hisse senedinin ödemesinden daha azdır. $(S_1-K)^+ < S_1$ Buradan şu sonuca varırız. $C_0<S_0$; opsiyonun fiyatı hisse senedinin fiyatından daha az olacaktır. Bu ise kişilerin niçin opsiyon almak istediklerini açıklar. Diğer bir değişle opsiyonlar bireylere, hisse senedi almaktan daha ucuz bir alternatif sunar. C_0 fiyatını hesaplayarak bulmak için bir portföy kullanabiliriz. Bunu yapmak için ; hisse senedi ve risksiz maldan oluşan bir (α,β) portföyü kurarız. Eğer portföy t=0 zamanında kurulmuşsa t=1 zamanında yenilenecektir. Opsiyonun ödenmesi C_1 : portföyün t=1 zamanındaki değeri, eğer hisse senedinin fiyatı yükseliyorsa C_{u1} eğer hisse senedinin fiyatı düşüyorsa C_{d1} ' eşittir. Kısaca, bu portföy $\alpha S_0+\beta$ ' ya mal olur ve opsiyonla aynı C_1 ödemesini üretir; Portföy ve opsiyon t=1 zamanında aynı ödemeye sahip olduklarından, t=0 zamanında da aynı fiyata sahip olmalılardır:

$$C_0 = \text{Yenilenen portföyün fiyatı}$$

$$=\alpha S_0+\beta \tag{3}$$

Şu noktaya işaret edelim : Onlar aynı yatırımlardır ve böylece de aynı maliyete sahip olmalıdırlar. Böyle bir portföyün bulunması α ve β değerleri için çözümü gerektirir.

$$\alpha uS_0+\beta(1+r)=C_{1u} \quad \text{ve}$$

$$\alpha dS_0+\beta(1+r)=C_{1d}$$

gibi iki tane iki bilinmeyenli denkleme sahip olmalıyız. Çözüm şu şekildedir:

$$\alpha=\frac{C_{1u}-C_{1d}}{S_0(u-d)} \tag{4}$$

$$\beta=\frac{uC_{1d}-dC_{1u}}{(1+r)(1+u)} \tag{5}$$

α ve β ' nın her ikisde negatif degildir. $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)}\left(p^* C_{1u} + (1-p^*)C_{1d}\right) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{(1+r)}(p^*(uS_0 - K)^+ + (1-p^*)(dS_0 - K)^+) \quad (7)$$

burada,

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d} \quad (8)$$

$$1 - p^* = \frac{u-(1+r)}{u-d} \quad (9)$$

Varsayımımızdan 1+r<u olduğundan 0< p^* <1 bir ihtimaldir. Eğer hisse senedinin p ihtimali ile yükselmesi için $p = p^*$ ise C_0, opsiyonun iskonto edilmiş ödemesi olarak ifade edilebilir.

$$C_0 = \frac{1}{1+r}E^*(C_1) \quad (10)$$

E^* : Hisse senedi fiyatı için $p = p^*$ olduğu zamanda beklenen değeri gösteriyor. p^* ' ne **Risk Yansız İhtimal** denir. Reel beklenen iskonto edilmiş ödeme aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{1}{1+r}E(C_1) = \frac{1}{1+r}(pC_{1u} + (1-p)C_{1d})$$

burada p hisse senedi için reel **Yükselme** olasılığıdır. Fakat opsiyonların fiyatlamasında, fiyatlama formülünde reel p kullanılmaz. Bunun yerine **Risksiz Yansız** p^* ihtimali kullanılır. Gerçekte ,**Opsiyonun fiyatı p' ye bağlı değil sadece S_0, K, u, d ve r ' ye bağlıdır.** Şu halde opsiyonu fiyatlamak için reel p' yi bilmeye ihtiyacımız yoktur. Sürekli zamandaki hisse senedi modelleriyle ilgilendiğimiz zaman opsiyon fiyatlamak için ünlü Black-Scholes formülünü kullanırız. Bu formülde, Baz Brownian hareketin μ yoğunluk terimine bağlı değildir. Sadece σ^2 varyans terimine bağlıdır [6]

III. RİSK - YANSIZ ÖLÇÜM

Baz hisse senedinin rassallığı p' nin reel değerine bağlı değildir. Buradan şu sonuç çıkar: **"Reel p, opsiyonun fiyatlandırılmasında rol oynamaz."** Yani C_0 'ı hesaplamak için onu bilmeye ihtiyacımız yoktur. S_0, r, u ve d verilmiş olduğunda, p' nin farklı değerleri aynı C_0 fiyatını üretir. p^* güzel bir yoruma sahiptir. S_0 başlangıç fiyatı verildiğinde t=1 zamanındaki beklenen fiyatın şu anki, değeri tekrar S_0 dır. Ortalama olarak, hisse senedi (iskonto edildiği zaman) fiyatı ne yükselir ne düşer. Yani Risk – Yansızdır:

$$(1+r)^{-1}E(S_1|S_0) = S_0$$

eğer $p = p^*$ ise (11)

bunu görmek için (11) deki beklenen değer açılır.

$$(1+r)^{-1}(puS_0 + (1-p)dS_0) = S_0$$

$$(1+r)^{-1}(pu + (1-p)d) = 1$$

Tek çözüm,

$$p = p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Şu halde hisse senedi fiyatının "Adil bir şekilde" değiştiği düşünülerek ($p = p^*$), opsiyonun fiyatı t=1 zamandaki opsiyonun iskonto edilmiş beklenen ödemesi olarak görülebilir. Genelliği kaybetmeksizin ($p = p^*$) olduğunu kabul edebiliriz.Çünkü yukarıda da değinildiği gibi p' nin gerçek değerini bilmeye gerek yoktur. Sadece risksiz p değerine ihtiyacımız vardır. p' den p^* ' ye değişim **ölçümünün değişimi** olarak bilinir. Çünkü $P(S_1 = uS_0)$, p' den p^* değişmekte, $P(S_1 = dS_0)$, (1-p) den $(1-p^*)$ ' ne değişmektedir. Zaman zaman, hisse senedi fiyatlamasının "Risk Yansız Ölçüm" altında yapıldığını söyleriz. Bunun anlamı ise p^*' nü kullandığımızdır. $\{S_n : n \geq 0\}$ bir Markov süreci olduğundan (11) ve analiz aşağıdaki ifadeyi gerektirir.

$$(1+r)^{-(n+1)}E^*(S_{n+1}|S_n) = (1+r)^{-n}S_n, \ n \geq 0$$

Beklenen değer risk yansız ölçüm altında alınmıştır. $\{(1+r)^{-n}.S_n : n \geq 0\}$ iskonto edilmiş fiyatların stokastik süreci bir **Martingale** dir. Böylece p^* iskonto edilmiş hisse senedi fiyatlarını martingale formuna dönüştüren tek olasılık ölçümüdür. Özel olarak $(1+r)^{-n}E(S_n) = E(S_0), \quad n \geq 0$ olsun. Eğer S_0

deterministik (biliniyorsa) o zaman $(1+r)^{-n}E(S_n)=S_0$ dır. Bunun anlamı şudur;Herhangi bir zamanda hisse senedinin beklenen değerinin şuanki değeri, başlangıç fiyatı ile aynıdır.

Martingale : $E(X_{n+1}|X_0,X_1,...,X_n)=X_n\ ,\ n\geq 0$ özelliğini sağlayan bir $\{X_n;n\geq 0\}$ stokastik sürecidir. Martingaleler kumar konusundaki adil oyun notasyonunu zapteder. X_n : n oyundan sonraki toplam şansınızı göstersin, Martingale özelliği şunu ifade eder, geçmişteki oyunlarınız ne olursa olsun gelecek oyununuz şu anki şansınıza eşit olacaktır. Buradan hemen şunu görürüz. $E(X_n)=(X_0),n\geq 0$: Oyunu bitirdiğiniz zaman sizin beklenen toplam şansınız başlangıçtaki şansınızla aynı olacaktır [3].

III.1. t=1 Vade Tarihi İle Diğer Opsiyonların Fiyatlaması

Portföy yenileme metodu, opsiyonun C_1 ödemesi için C_{1d} ve C_{1u} değerlerini bildiğimiz herhangi bir hisse senedi opsiyonuna da uygulanabilir. Yani hisse senedi yükseliyorsa ödemenin ne olduğunu ve hisse senedi düşüyorsa ödemenin ne olacağını bilmeye ihtiyacımız vardır.Örneğin t=1 vadeli ve $dS_0<K<S_0$ kullanım fiyatı ile bir **Avrupa Satım Opsiyonu'**nu düşünelim. Böyle bir opsiyon sahibine hisse senedinin bir hissesini K fiyatından satma hakkı verir. Burada opsiyon sahibi fiyatın düşeceğini ümit etmektedir. Böylece ödeme, $C_1=(K-S_1)^+$, $C_{1u}=0$, $C_{1d}=K-dS_0$ ve opsiyonun fiyatı şu şekilde verilir:

$$C_0=\frac{1}{1+r}(p^*C_{1u}+(1-p^*)C_{1d})$$

$$=\frac{1}{1+r}(1-p^*)(K-dS_0)$$

$$=\frac{1}{1+r}(\frac{u-(1+r)}{u-d})(K-dS_0)$$

III.2. Vade Tarihi $t\geq 2$ Olduğunda Avrupa Alım Opsiyonu' nun Fiyatlaması

Opsiyon sahibinin t=n zamanına kadar opsiyonu kullanmadan beklemesi gerektiğini kabul edelim. Opsiyonun bu tarihteki ödemesi $C_n=(S_n-K)^+$ Opsiyo-nun şu anki maliyeti ne olmalıdır?

Hisse senedi için Binominal ağaç modeli altında, t=n vadeli, K, kullanım fiyatı ile bir Avrupa alım opsiyonun fiyatı aşağıdaki şekilde verilir.

$$C_0=\frac{1}{(1+r)^n}E^*(C_n)$$

E^* : Hisse senedi fiyatı için ((8) ile tanımlanan) p^* risk-yansız ihtimali altındaki beklentidir.

Diğer bir ifadeyle; **Fiyat Risk- Yansız Ölçüm altında opsiyonun beklenen ödemesi opsiyonun şu anki değerine eşittir.** Önce n=2 periyodunu düşünelim: t=0,1,2 hisse senedi fiyatları S_0,S_1,S_2 opsiyon sadece sadece t=2 zamanında kullanılabilir. C_0, önsel bilinmeyen fiyatı gösterir. C_1, t=1 zamanında önsel bilinmeyen fiyat opsiyona t=1 zamanında ne kadar ödenmelidir. t=2 zamanındaki fiyat, $C_2=(S_2-K)^+$, bu ise hisse senedinin uu, ud, du ve dd gibi 4 sonucu ile belirlenir. Eğer sonuç uu ise

$$S_2=u^2S_0 \text{ ve } C_2=C_{2,uu}=(u^2S_0-K)^+$$

$$C_0=\frac{1}{(1+r)^n}E^*(C_n)$$

(10) denklemi kullanılarak,

$$C_{1,u}=\frac{1}{(1+r)}(p^*C_{2,uu}+(1-p^*)C_{2,ud} \quad (12)$$

$$C_{1,d}=\frac{1}{(1+r)}(p^*C_{2,du}+(1-p^*)C_{2,dd} \quad (13)$$

p^*, (8) ile tanımlanan Risk- Yansız ölçümdür. Böylece, C_1' in sonucu için iki değer hesapladık (10) denklemini C_1' e uygulayarak t=0, Zamanındaki istenen maliyet bulunur;

$$C_0=\frac{1}{1+r}(p^*C_{1,u}+(1-p^*)C_{1,d}) \quad (14)$$

Yani (10) u üç kere uyguladık. Yani 3 defa beklenen değer hesapladık. Eğer $E^*(C_2)$bek beklenen değerini hesaplasaydık, t=2 zamanındaki beklenen ödeme p^*' ya göre, 0, t=0 zamanki beklenen ödemeyi verirdi.

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^2} E^*(C_2) \qquad (15)$$

Bunu görelim. $p = p^*$ olduğu zaman şunu gözleriz:

$$C_2 = \begin{cases} C_{2,uu}, & (p^*)^2 \\ C_{2,ud}, & 2p^*(1-p^*) \\ C_{dd}, & (1-p^*)^2 \end{cases}$$

$$E^*(C_2) = (p^*)^2 C_{2,uu} + 2p^*(1-p^*)C_{2,ud} + (1-p^*)^2 C_{dd}$$

Bunu 2' den daha çok periyoda benzer şekilde genişletiriz. Örneğin t=5 vade tarihi olsun. Önce t=4 zamanındaki maliyetleri hesaplamalıyız. $C_{4,uuuu}$:Eğer hisse senedi 4 periyodun tamamında yükselmişse bu durumdaki maliyetleri gösterir. t=5 zamanındaki iki mümkün nihai ödeme

$$C_{5,uuuuu} = (u^5 S_0 - K)^+ \quad \text{ve}$$

$$C_{5,uuuud} = (u^4 d S_0 - K)^+$$

$$C_{4,uuuu} = \frac{1}{1+r}(p^* C_{5,uuuuu} + (1-p^*)C_{5,uuuud})$$

$$= \frac{1}{1+r}\left[p^*(u^5 S_0 - K)^+ + (1-p^*)(u^4 d S_0 - K)^+\right]$$

Diğer 4 durum $C_{4,uuud}, C_{4,uudd}, C_{4,uddd}$ ve $C_{4,dddd}$ maliyet t=4 zamanında benzer şekilde hesaplanır. Sonra t=3 zamanında maliyetler hesaplanır. ... t=1' dekiler hesaplanır, sonuç olarak C_0 ' ı hesaplarız. Bu ise 5+4+3+2+1=15 beklenen değerin hesaplanmasını gerektirir. Genelde, vade tarihi t=n olduğu zaman, (10) denklemi $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ defa uygularız[7]. Sonuç olarak,

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} E^*(C_n) \qquad (17)$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (p^*)^i (1-p^*)^{n-i} (u^i d^{n-i} S_0 - K)^+ \qquad (18)$$

III.3. Amerikan Alım Opsiyonu İçin Erken Kullanım Optimal Değildir

Amerikan alım opsiyonunda , opsiyon sahibi opsiyonunu t=n vadesine kadarki herhengi bir zamanda kullanabilir. Fakat göstereceğiz ki vadeden önce kullanmak optimal değildir. Herhangi bir t=k<n zamanında, C_k **opsiyonunun değeri, t=k zamanında opsiyonu kullanmanın ödenmesinden daha büyüktür:** $C_k > S_k - K$ Bunu görelim. Alıştırma olarak t=2 durumunu düşünelim. O zaman, $C_2 = (S_2 - K)^+ \geq S_2 - K$, Her bir sonuç için açıklamayı genişletirsek üst sınırları elde ederiz.

$$\begin{aligned} C_{2uu} &\geq u^2 S_0 - K \\ C_{2ud} &\geq u d S_0 - K \\ C_{2dd} &\geq d^2 S_0 - K \end{aligned} \qquad (19)$$

Şimdi bu eşitsizlikleri C_1 ' in kesinlikle $S_1 - K$ den daha büyük olduğunu göstermekte kullanabiliriz. Bu ise $C_{1u} > uS_0 - K$ ve $C_{1d} > dS_0 - K$ ' nın her ikisinin de gösterilmesini ister.

$$\begin{aligned} C_{1u} &= \frac{1}{1+r}(p^* C_{2,uu} + (1-p^*)C_{2,ud} \\ &\geq \frac{1}{1+r}(p^*(u^2 S_0 - K) + (1-p^*)(udS_0 - K)) \\ &= \frac{uS_0}{1+r}(p^* u + (1-p^*)d) - \frac{K}{1+r} \\ &> \frac{uS_0}{1+r}(p^* u + (1-p^*)d) - K \\ &= uS_0 \frac{p^*(u-d)+d}{1+r} - K \\ &= uS_0 - K \end{aligned} \qquad (20)$$

(Çünkü 1+r>1)

Bu şekilde, $C_{1u} > uS_0 - K$ olduğunu kanıtladık. $C_{1d} > dS_0 - K$ olduğu da benzer şekilde kanıtlanır. İspat t=n zamanı içinde benzer şekilde çalışır. Önce $C_{n-1} > S_{n-1} - K$ olduğunu gösterir. Sonra $C_{n-2} > S_{n-2} - K$ ve $C_1 > S_1 - K$ gösterilinceye kadar bu işlem adım adım devam eder. Amerikan satım opsiyonu alım opsiyonundan tamamen farklıdır. Erken kullanımın karlı olduğu birçok durum olabilir. Bu yüzden

Amerikan satım opsiyonları Avrupa satım opsiyonlarından çok daha pahalıdır.

IV. BİNOMİAL AĞAÇLARIN SÜREKLİ ZAMANLI DEĞİŞİMLERİ

Bizim üzerinde yoğunlaşacağımız esas soru şudur: Hisse senedi fiyatının evrimi için sürekli zamanlı bir yapı verilmiş olsun.(veya başka bir Stokastik Süreç) Zaman adımları sonsuz derecede küçültüldüğünde, bu sürece yakınsayan bir binomial ağacı nasıl kurmalıyız?

FELLER Diffüzyon Limiti Z_i (i=1,...,N) bağımsız Bernouilli rassal değişkenleri , nin bir ailesi ve $P[Z_i=1] = p$, $P[Z_i=-1] = q = 1-p$ olsun . O zaman , $E[Z_i] = p-q$, $Var[Z_i] = 4pq$ olur.

Şimdi bir binomial ağaç kuralım: zaman aralığı 0' dan $T = N\Delta t$' ye kadar değişiyor ve her birinin uzunluğu Δt olan N tane aralıktan oluşuyor. $t_n = n\Delta t$ olsun. X_n , bir rassal değişkenin t_n zamanındaki değerini göstersin. $X_n=x$ verilmiş olsun.

$$X_{n+1} = \begin{cases} x+\Delta x, & p \quad ihtimali\,ile \\ x-\Delta x, & q = 1-p \quad ihtimali\,ile \end{cases} \tag{21}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca ardışık artımlar bağımsızdır. Eğer $X_0=x_0$ verilmişse, o zaman $\{X_n\}$ sürecini Bernoulli rassal değişkenin terimleri ile aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta x \tag{22}$$

Beklentinin lineer ve artımların bağımsız olduğu gerçeğini kullanarak, aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$E_0 X_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} E[Z_i]\Delta x = x_0 + n(p-q)\Delta x$$

$$Var_0 X_n = \sum_{i=1}^{n} Var[Z_i](\Delta x)^2 = 4npq(\Delta x)^2$$

T' yi sabit tutup, $N \longrightarrow \infty$ yaklaştırdığımızda $\{X_n\}_{n=0}^{N}$ süreci, aşağıdaki özelliklerle, bir sürekli zamanlı limit $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$' ye yakınsar.

$$E_0[X_n] = X_0 + \frac{t_n}{\Delta t}(p-q)\Delta x$$

$$Var_0\,[X_n] = 4\frac{t_n}{\Delta t}pq(\Delta x)^2$$

Şimdi, $\Delta x, \Delta t \longrightarrow 0$ yaklaşırken limite geçmek istiyoruz. Öyleki $E_0[X_n]$ ve $Var_0[X_n]$ sınırlı kalacak şekilde, özel olarak şunu istiyoruz,

$$E_0[X_n] \longrightarrow \mu t \quad , \quad Var_0[X_n] \longrightarrow \sigma^2 t \tag{23}$$

Varyans sonlu $\Longrightarrow$ $(\Delta x)^2 / \Delta t$ sınırlıdır. Şu halde,

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 \Rightarrow \Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Ortalama sonlu $\Longrightarrow (p-q)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \mu$

$\Delta x'$ i yerine yazarsak,

$$(2p-1)\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}} = \mu$$

Bu ifade yeniden düzenlenirse

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \qquad q = \frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \tag{24}$$

böylece, kesikli zamanlı süreç , μ yoğunluk ve σ^2 varyanslı bir sürekli zamanlı limite yakınsar. Birim zamandaki adım büyüklüğü ve ihtimal ölçümü aşağıdaki şekildedir.

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad p,q = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \tag{25}$$

Herşey zaman adımının terimlerine göre yazılmıştır. Yukarıdaki türetmenin işaret ettiği şey şudur: Adım büyüklüğü ve ihtimalleri, bir sürekli zamanlı limit ile tutarlı olacak şekilde, özel olarak seçmeliyiz. X için limit sürecine, μ yoğunluk ve σ oynaklığı ile **Aritmetik Brownian Hareket** adı verilir [1, 6] tanımlanır ve bizim , μ yoğunluk ve σ oynaklık ile bir Aritmetik

Haziran 2002.s.21-28.

Brownian hareket olarak modellediğimiz şey budur. Bununla birlikte kesikli zamanda, Logaritmik fiyatların, farkı alınmış serileri olarak tanımlanırlar:

V. SONUÇ

Bir çok finansal zaman serisi sadece kesikli zamanlarda gözlenir. Bu tip verilerin kesikli doğası ise kesikli zamanlı modellerin popüler olma nedenlerinden bir tanesidir. Diğer bir neden ise bu tip modellerin genellikle maksimum olabilirlik analizine müsaade ediyor olmasıdır.

Binomial model basit bir forma sahip olmasına rağmen, piyasanın temel yapısının anlaşılmasını sağlamaktadır. Denk Martingale ölçümleri kullanılarak oluşturulan Risk- Yansız fiyatlama metodolojisi ise, Black-Scholes' in orijinal yaklaşımını basitleştirmekte ve genelleştirmektedir. Bu araçlar herhangi bir türev ürünü fiyatlamak için kullanılabilir. Böylece çok gerçekçi şartlarda arbitrajsız fiyatlar elde edilebilmektedir.

Arbitraj Fiyatının orijinal ihtimal yerine "Denk Martingale Ölçümü" ile belirlenmesi gerçeği derin bir görüş olup, Martingaleler'in teorisinin öncü rol oynadığı kompleks Finansal türevlerin fiyatlandırılması gibi büyük bir araştırma alanına yol açmıştır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] HULL, J.C., **Options, Futures and Other Derivatives**, Printice Hall,1997.

[2] COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M., *"Option Pricing: A Simplified Approach,"*, **Journal of Financial Economics**, 7, 1979, s.224-264.

[3] ELLIOTT, R.J.; KAPP, P.E., **Mathematics of Financial Markets**, Springer 1999.

[4] RESNICK, S., **Adventures in Stochastic Processes**, Birhouser,1992.

[5] WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J., **The Mathematics of Financial Derivatives**, Cambridge University Press, 1995.

[6] KALLIANPUR, G.; KARANDIKAR, R.L., **Introduction to Option Pricing Theory**, Birhauser, 2000.

[7] RUBINSTEIN, M., *"Implied Binomial Trees,"*, **Journal of Finance**, 49, 1994, s.771-818.

BLACK, F.; SCHOLES, M., *"Pricing of Options Corporate Liabilities"*, **Journal of Political Economy**, 81, 1973, s.637-654.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE , B., **Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance**, Chapman&Hall,1996.

OKSENDAL, B., **Stochastic Differential Equations:An Introduction with Applications**, Springer, 1998.

PLISKA, S.R., **Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models**, Blackwell Publishers Ltd., 1998.

WILLIAMS, D., **Probability with Martingales**, Cambridge University Press, 1991.