



## Çarpık Dağılımlar için Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemine Dayalı $\bar{X}$ ve $R$ Kontrol Grafikleri

\*<sup>1</sup> Sevgi Yurt Öncel, <sup>2</sup> Handan Özarslan

<sup>1</sup> Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Yenışehir, Yahşihan, Kırıkkale  
syoncel@kku.edu.tr 

<sup>2</sup> Sosyal Güvenlik Kurumu Ankara İl Müdürlüğü, Çankaya, Ankara  
handanozarlan@msn.com 

Araştırma Makalesi

Geliş Tarihi: 04.02.2020

Kabul Tarihi: 14.05.2020

### Öz

İstatistiksel süreç kontrolü, üretim sırasında kalite sorunlarının geciktirilmeden giderilmesi ve en ekonomik şartlarda verimliliğin en üst düzeyde tutulması için istatistiksel tekniklerin kullanılmasını kapsar. Süreç kontrolünde grafik yöntemi oldukça tercih edilen bir yöntemdir. Klasik Shewhart kontrol grafikleri, kalite değişkeninin dağılımının Normal dağılım olması varsayımına dayanır. Ancak kalite değişkeni her zaman Normal dağılıma sahip olmayabilir. Bu durumda Shewhart tarafından önerilen klasik kontrol grafiklerinin kullanılması I. tip hata olasılığının artmasına neden olur ve süreç hakkında yanıltıcı sonuçlar elde edilebilir. Bu durumda çarpık dağılımlar için  $\bar{X}$  ve  $R$  kontrol grafiklerinin oluşturulması için, çarpıklık düzeltmesi yöntemi önerilmektedir. Bir dağılımın simetrisinin belirlenmesinde kullanılan çarpıklık katsayısının tahmin edilmesi çok önemli bir problemdir. Bu çalışmada çarpıklık düzeltmesinde kullanılan çarpıklık katsayısı tahmin edicileri olarak Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı ve momentlere dayalı çarpıklık katsayısı tahmin edicileri kullanılmıştır. Çarpıklık katsayısı göz önünde bulundurularak kalite kontrol grafiklerinin nasıl çizdirileceği üzerinde durulmuştur. Uygulama kısmında çarpık bir dağılım olan Weibull dağılımı için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Çarpıklık katsayısı farklı tahmin edicilerle hesaplanarak çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile oluşturulan kontrol grafiklerinin performansları I. tip hata olasılıkları, ortalama çalışma uzunluğu ile değerlendirilmiş ve klasik Shewhart kontrol grafikleri ile karşılaştırılmıştır. Maliyeti yüksek olan ve tahribatlı muayene edilen ürünler üreten işletmeler için öneriler geliştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Cornish-Fisher açılımı, çarpıklık katsayısı, çarpıklık düzeltme yöntemi, kalite kontrol grafikleri, Weibull dağılımı

## $\bar{X}$ and $R$ Control Charts Based on the Skewness Correction Method for Skewed Distributions

\*<sup>1</sup> Sevgi Yurt Öncel, <sup>2</sup> Handan Özarslan

<sup>1</sup> Kırıkkale University Faculty of Arts and Sciences, Department of Statistics, Yenışehir, Yahşihan, Kırıkkale,  
syoncel@kku.edu.tr

<sup>2</sup> Social Security Institution Ankara Provincial Directorate, Çankaya, Ankara, handanozarlan@msn.com

### Abstract

Statistical process control involves the use of statistical techniques to eliminate quality problems during production without delay and to keep productivity at the highest level under the most economical conditions. Graphic method is a highly preferred method in process control. Classic Shewhart control charts are based on the assumption that the distribution of the quality variable is a Normal distribution. However, the quality variable may not always have a Normal distribution. In this case, the use of classical control graphics recommended by Shewhart causes an increased probability of type I error and misleading results can be obtained about the process. In this case, the skewness correction method is proposed to create the  $\bar{X}$  and  $R$  control charts for skewed distributions. Estimating the skewness coefficient used in determining the symmetry of a distribution is a very important problem. In this study, Bowley's skewness coefficient, Kelly's skewness coefficient and moment skewness coefficient estimators are used as the skewness coefficient estimators. Considering the skewness coefficient, it is focused on how to draw quality control charts. A simulation study has been made for the Weibull distribution, which is a skewed distribution in the application part. The performance of the control charts created by the skewness correction method by

\*Sorumlu Yazar : Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Yenışehir, Yahşihan, Kırıkkale  
syoncel@kku.edu.tr

Doi: 10.21541/apjes.684549

calculating the skewness coefficient with different estimators, the type I error probabilities were evaluated with the average working length and compared with the classical Shewhart control charts. Suggestions have been developed for businesses that produce high cost and destructively inspected products.

**Keywords:** skewness coefficient, Cornish-Fisher expansions, quality control charts, skewness correction method, Weibull distribution.

## GİRİŞ

Günümüzde teknoloji hızlı bir şekilde ilerlemekte, bilgiye ulaşmak çok çabuk ve kolay gerçekleşmekte, müşteri beklentileri de sürekli artmaktadır. İşletmelerin bu koşullara uyum sağlamaları için hızlı, verimli ve kaliteli üretim yapmaları zorunlu hale gelmektedir [1].

Kalite, müşteri memnuniyeti, verimlilik, esneklik, etkililik, kullanıma uygunluk gibi birçok isteği ön plana çıkaran bir kavramdır. Kaliteyi, bir ürünün ya da hizmetin özelliklerinin kişilerin isteklerini karşılayabilme derecesi olarak da tanımlamak mümkündür. Aynı zamanda kalite, müşteri memnuniyetine yönelik ürün ve hizmet özelliklerinin toplamıdır. Müşterilerin memnuniyet derecesi ne kadar yüksekse, kalite de o oranda yüksek sayılır.

Üretimin ve hizmetin tüketici açısından en ekonomik ve en iyi yapılması için kalite kontrol çalışmalarını planlamak, geliştirmek ve sürdürmek gerekir. Çünkü kalite kontrolün öncelikli hedefi, tüketicilerin isteklerini mümkün olan en ekonomik seviyede karşılayan ürün ve hizmetlerin üretimidir [2].

Üretim sistemlerinin büyümesi, işletmeler arası ilişkiler, rekabetin uluslararası nitelik kazanması, yaşam düzeyinin yükselmesi, tüketicilerin bilinçlenmesi ve tüketiciyi koruyan yasaların ortaya çıkışı, endüstride istatistiksel kalite kontrol yöntemlerinin uygulanmasını zorunlu hale getirmiştir. İstatistiksel kalite kontrolün amacı, bir ürün ya da hizmetin istenen kalite seviyesine ulaşabilmesi için üretimin herhangi bir aşamasını denetlemektense üretimi oluşturan sürecin hepsini kontrol etmektir.

Kalite kontrol grafiklerinin kullanılması fikri 1926 yılında Shewhart tarafından ortaya atılmıştır [3]. Bu grafikler bir sürecin istatistiksel yöntemlerle kontrol altında tutulmasında en etkili araçlardır ve sürecin ne derece iyi işlediğini gösterirler. Klasik Shewhart kontrol grafikleri kalite değişkeninin dağılımının Normal dağılım olması varsayımına dayandırılmıştır. Bu varsayım geçerli olmadığında klasik kontrol grafikleriyle süreci izlemek yanıltıcı olabilir. Birçok durumda ilgilenilen kalite değişkeninin gösterdiği dağılım Normal dağılımdan farklı ve çarpık bir dağılım olabilir. Klasik kontrol grafikleri kullanıldığında çarpıklık arttıkça I. tip hata olasılığı da artacaktır. Bunun için örneklem büyüklüğünün artırılması önerilse de bu çözüm zaman ve maliyet açısından pahalı bir çözümdür.

Normal dağılım varsayımının sağlanamadığı durumlarda Shewhart kontrol grafikleri çarpıklık düzeltmesi, ağırlıklı

varyans, ağırlıklı standart sapma yöntemleriyle oluşturulabilir. Ya da parametrik olmayan, dağılımdan bağımsız kontrol grafikleri kullanılır. Literatürde bu konuyla ilgili yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır. Bai ve Choi (1995) çarpık dağılıma sahip veriler için ağırlıklı varyans yöntemine dayalı olarak  $\bar{X}$  ve  $R$  kontrol grafiği sınırlarını oluşturmuştur. Weibull, Burr ve Lognormal dağılımına sahip veriler için ağırlıklı varyans yönteminin I. tip hata olasılığını Monte Carlo simülasyonu yaparak Shewhart ve Ferrell yöntemleriyle karşılaştırmıştır.

Chang ve Bai (2001) tarafından yapılan çalışmada ağırlıklı standart sapma ile kontrol grafiği oluşturmak için basit bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntemle göre çarpık dağılım ortalamaya göre iki parçaya ayrılır ve her bir parça yeni simetrik dağılım olarak kullanılır. Ağırlıklı standart sapma yönteminin mevcut yöntemler üzerinde önemli iyileştirmeler gerçekleştirdiği görülmüştür. Özellikle süreç parametreleri bilinmediğinde ve örneklem boyutu küçük olduğunda önerilen ağırlıklı standart sapmalı ortalama grafiğinin son derece iyi performansının olduğu gözlenmiştir.

Chan ve Cui (2002) çalışmalarında çarpık dağılımlar için  $\bar{X}$  ve  $R$  kontrol grafikleri oluşturmak için çarpıklık düzeltmesi yöntemini ortaya koymuşlardır. Eğer süreç dağılımının simetrik olduğu biliniyorsa önerdikleri  $\bar{X}$  grafiği neredeyse Shewhart  $\bar{X}$  grafiğiyle aynı olmuştur. Yeni grafikler Shewhart grafikleri ve ağırlıklı varyans yöntemiyle oluşturulan kontrol grafikleriyle karşılaştırılmıştır. Süreç dağılımı Weibull, Lognormal, Burr ve Binom dağılımı olduğunda yapılan simülasyon çalışması sonucunda çarpıklık düzeltmeli kontrol grafiklerinin 0.0027'ye yakın I. tip hata olasılığına sahip olduğunu göstermişlerdir. Süreç dağılımı Üstel olduğunda çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  ve  $R$  grafiklerinin sadece I. tip hata olasılıklarının değil II. tip hata olasılıklarının da ağırlıklı varyans ve Shewhart yöntemlerinden daha düşük olduğu göstermiştir.

Kan ve Yazıcı (2006) çalışmalarında Burr dağılımına sahip veriler için birimler (tek birimlik örneklem) kontrol grafiklerini Chan ve Cui (2002)'nin çarpıklık düzeltmesi yöntemi ile ele almışlardır. Burr dağılımı için kontrol limitlerini elde ederek  $n=5$  ve  $n=7$  için bir simülasyon çalışması yapmışlardır.  $n=7$  iken çarpıklık düzeltmesi yöntemiyle elde edilen kontrol grafiği limitleri Shewhart yönteminin limitlerinden daha geniş çıkmıştır. Veri seti Burr dağılımına sahip olduğunda Shewhart birimler kontrol grafikleri yerine çarpıklık düzeltmesiyle elde edilen birimler kontrol grafiğinin kullanılmasını önermişlerdir. Yazıcı ve Kan (2009), Normal dağılım varsayımının

sağlanamadığı durumlarda, X birimler kontrol grafiği için çarpıklık düzeltme yöntemini geliştirmişlerdir. Burr, Lognormal ve Üstel dağılımlar için çarpıklık düzeltmeli birimler kontrol grafiklerinin sınırları, klasik Shewhart birimler kontrol sınırları ile simülasyonla karşılaştırılmıştır.

Karagöz ve Hamurkaroglu (2012) tarafından yapılan çalışmada çarpık dağılımlar için  $\bar{X}$  ve R kontrol grafiklerinin limitleri, klasik, ağırlıklı varyans, ağırlıklı standart sapma ve çarpıklık düzeltmesi yöntemleri Monte Carlo simülasyonu kullanılarak karşılaştırılmıştır. Weibull, Gamma ve Lognormal dağılımlarının kontrol grafiklerinin I. tip hata olasılığını farklı alt grup büyüklüklerinde karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçları çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının daha düşük olduğunu göstermiştir.

Rao ve Kantam (2012) tarafından yapılan çalışmada çarpık bir dağılım olan Yarı Lojistik dağılım için  $\bar{X}$  ve R grafikleri çarpıklık düzeltme yöntemi ile çizilmiştir.

Priya ve Kantam (2017)'in çalışmasında çarpık bir dağılım olan Linear Bozulma Oranı ( Linear Failure Rate) dağılımı için Bowley'in çarpıklık katsayısı ve Kelly'nin çarpıklık katsayısı ile kontrol grafiği limitleri bulunmuştur ve Kelly'nin çarpıklık katsayısı kullanılarak oluşturulan çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  kontrol grafiğinin üstünlüğü tartışılmıştır.

Karagöz (2018) çarpık dağılımlar için  $\bar{X}$  kontrol grafiğinin kontrol limitlerini oluşturmak için kesilmiş ortalama ve çeyrekler arası aralık tahmin edicileri kullanarak değiştirilmiş Shewhart, değiştirilmiş ağırlıklı varyans ve değiştirilmiş çarpıklık düzeltme yöntemlerini önermiştir.

Bir dağılım varsayımı gerektirmeyen parametrik olmayan kontrol grafikleri ile ilgili çalışmalar da oldukça yaygındır. Dağılımdan bağımsız kontrol grafikleri çizilirken örneklemin geldiği kitlenin dağılımını ve varyansını bilmeye ya da tahmin etmeye gerek yoktur. Turhan ve Öncel (2019) herhangi bir dağılım varsayımı olmadan sıra istatistiklerine dayalı kalite kontrol grafiği limitlerinin belirlenmesi konusunu ve literatürdeki çalışmaları ayrıntılı olarak ele almıştır. Bu çalışmada süreç ortalamasının takibi için farklı örnek hacimleri için medyan kontrol limitleri, yanlış alarm oranı ve ortalama çalışma uzunluğu hesaplamalarını tablolatırılmış ve bir uygulama verilmiştir.

Bu çalışmada çarpık dağılımlar için kullanılması önerilen çarpıklık düzeltmeli kontrol kartları ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Çarpıklık düzeltmesi yönteminin uygulanabilmesi için örneklemin alındığı kitlenin çarpıklık katsayısının belirlenmesi gereklidir. Literatürde iyi bilinen Bowley, Kelly ve momentlere dayalı çarpıklık katsayıları incelenmiştir. Bu tahmin ediciler kullanılarak Weibull dağılımı için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  ve R kontrol grafiklerinin ortalama çalışma uzunluğu ve I. tip hata yapma olasılıkları klasik Shewhart kontrol grafikleri ile karşılaştırılmıştır.

## 1. İSTATİSTİKSEL KALİTE KONTROL SÜRECİ İLE İLGİLİ TANIMLAR

Bir ürün ve üretim süreci çok iyi tasarlanmış olsa bile doğal nedenlerden dolayı ürünlerin birbirine göre bir farklılığı olacaktır. Bu farklılık kabul edilebilir ise süreç istatistiksel olarak kontrol altındadır denir. Eğer kalite değişkenindeki değişim makinelerin kalibrasyonundan, çalışan kişi veya hammaddeden kaynaklanan bir değişim ise süreç kontrol dışındadır denir. Üretilen ürünlerde meydana gelen hataları saptamak ve değişimi görmek amacı ile kullanılan her türlü teknik ve araç istatistiksel kalite kontrol kapsamına girer. Amaç tanımlanabilir nedenlerden dolayı ortaya çıkan kontrol dışı durumu kısa sürede ortaya çıkarabilmektir. Kontrol grafikleri bu amaçla kullanılan bir yöntemlerden biridir.

### 1.1. Kalite Kontrol Grafiklerinin Tanımı

Kontrol grafiklerini yatay ve dikey eksen, noktalar, orta çizgi (OÇ), üst kontrol limiti (ÜKL) çizgisi ve alt kontrol limiti (AKL) çizgisi oluşturmaktadır. Yatay eksen örneklem numarasını, dikey eksen ise örneklemin bir fonksiyonunu (istatistiği) gösterir. Grafikte işaretlenen noktalar örneklemden hesaplanan istatistiklerdir. Değişimi takip etmek için noktalar çizgilerle birleştirilir. Bu noktalardan bazılarının kontrol limitlerinin dışında olduğu veya kontrol limitleri içinde bulunup belirli bir diziliş, kümeleme veya eğilim gösterdikleri durumda örneklemin dağılımının ortalamasında, standart sapmasında veya her ikisinde de bir kayma olduğu düşünülür. Bu sonuç süreçte düzeltilmesi gereken hataların var olduğu anlamına gelmektedir Kalite değişkeninin dağılımındaki bu türden kaymaları hızlıca yakalamak ve sorunu giderip kitle dağılım parametrelerini hedeflenen değere getirmek istatistiksel kalite kontrol yöntemleri ile sağlanır [1, 2, 14, 15].

$X$ , ortalaması  $\mu_x$  ve standart sapması  $\sigma_x$  olan bir rasgele değişken olsun. Kontrol grafiği sınırları

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \mu_x + k\sigma_x \\ \text{OÇ} &= \mu_x \\ \text{AKL} &= \mu_x - k\sigma_x \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1) eşitliğinde gösterildiği gibi oluşturulmaktadır. Burada  $k$  katsayısı, orta çizgiden üst kontrol limiti ve alt kontrol limitine olan mesafeyi, örneklemin dağılımına ve 1.tip hata yapma olasılığı (süreç kontrol altındayken yanlışlıkla süreç kontrol dışındadır kararına varma olasılığının üst sınırı) değerine göre belirler. Uygulamada  $\bar{X}$  (ortalama), R (aralık) ve S (standart sapma) gibi kontrol grafikleri çizilmektedir.  $\bar{X}$  grafiği sürecin ortalamasını, R ve S grafikleri sürecin varyansını kontrol etmek amacıyla kullanılır. Bu grafikler çift yani  $\bar{X}$ -R grafikleri veya  $\bar{X}$ -S grafikleri biçiminde oluşturulur. Bu çalışmada örneklem hacmi küçük olduğunda tercih edilen  $\bar{X}$ -R grafikleri incelenecektir.

## 1.2. Hipotez Testi ve Ortalama Çalışma Uzunluğu

Hipotez, kitle dağılımının parametreleri hakkında yapılan bir iddiadır. Hipotez testi ise, iddianın kabulü veya reddi için ortaya konan bir karar kuralını örneklem ile test etmektir. Dolayısı ile örnekleme dayanarak çıkarılacak sonuçlarda yani verilecek kararlarda bir hata söz konusudur. Doğruluğunun kanıtlanması istenen iddiaya sıfır hipotezi denir ve  $H_0$  ile gösterilir.  $H_0$ 'ın yanlışlığı kanıtlandığı takdirde doğru kabul edilecek hipoteze karşı hipotez denir ve  $H_1$  ile gösterilir. Bu testler yapılırken  $\alpha$ ,  $H_0$  hipotezi doğru iken reddedilme olasılığı (I.tür hata yapma olasılığı);  $1-\alpha$ ,  $H_0$  hipotezi doğru iken red edilmemesi olasılığı (testin güvenilirlik düzeyi);  $\beta$ ,  $H_0$  hipotezi yanlış iken  $H_0$ 'ın kabul edilme olasılığı (II. tip hata yapma olasılığı);  $1-\beta$ ,  $H_0$  hipotezi yanlış iken  $H_0$ 'ın reddedilme olasılığı (testin gücü) olasılıkları hesaplanır. I. tip hata yapma olasılığının üst sınırı, testin anlamlılık düzeyini verir.

Kontrol grafikleri ile hipotez testleri arasında sıkı bir bağlantı vardır. Bu durumda, I. tip hata ve II. tip hata ifadeleri kontrol grafikleri açısından

$$\alpha = P(\text{I.tür hata})$$

$$= P(\text{Süreç kontrol dışı} / \text{Süreç kontrol altında iken})$$

$$= \text{Üretici riski (kaliteli ürünün reddedilmesi olasılığı)}$$

$$\beta = P(\text{II.tür hata})$$

$$= P(\text{Süreç kontrol altında} / \text{Süreç kontrol dışında iken})$$

$$= \text{Tüketici riski (kalitesiz ürünün kabul edilme olasılığı)}$$

biçiminde yeniden tanımlanabilir [1, 14, 15].

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu_0, \sigma^2) \quad \text{iken} \quad H_0 : X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$$

hipotezine karşılık  $H_1 : X \sim N(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma, \sigma^2)$  hipotezi ile Normal dağılıma sahip olan bir kitlenin ortalamasındaki değişim (kaymalar) araştırılabilir. Kontrol grafiklerinin limitleri  $\mu_{\bar{X}} \mp k\sigma_{\bar{X}}$  dir. Süreç kontrol altında iken örneklem ortalaması  $\bar{X}$ 'nin kontrol limitlerinin dışına çıkması olasılığı

$$\alpha = 1 - \int_{\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}}^{\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n}} f_{\bar{X}}(u|\mu_0) du$$

dır. Burada yer alan  $\mu_0$  ve  $\mu_1$  parametreleri sırasıyla süreç kontrol altında ve süreç kontrol dışında iken  $X$  rasgele değişkeninin kitle ortalamasını göstermektedir.  $X$  rasgele değişkeninin dağılımı Normal dağılım olduğunda  $\alpha = 2\Phi(-k)$ 'dir. Burada  $\Phi$ , Standart Normal dağılımın

dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Süreç kontrol altındayken kitle ortalamasının  $\mu_0$ 'dan  $\mu_1$ 'e kayması halinde bu kaymayı birbirini izleyen noktalarda tespit edememe olasılığı

$$\begin{aligned} \beta &= P( AKL \leq \bar{X} \leq \check{U}KL | \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma ) \\ &= \int_{\mu_0 - k\sigma/\sqrt{n}}^{\mu_0 + k\sigma/\sqrt{n}} f_{\bar{X}}(u|\mu_1) du \end{aligned}$$

dır. Kontrol grafiğinde yer alan örneklem ortalamalarının kontrol limitleri dışına çıkmadan önce grafikte işaretlenmesi beklenen nokta sayısı, ortalama çalışma uzunluğu ( $O\check{C}U$ ) olarak adlandırılır ve kontrol grafiğinin performansını değerlendirmek için kullanılır. Süreç kontrol altındayken ortalama çalışma uzunluğu

$$\begin{aligned} O\check{C}U &= \frac{1}{1 - P( AKL < \bar{X} < \check{U}KL | \mu = \mu_0 )} \\ &= \frac{1}{1 - \int_{AKL}^{\check{U}KL} f_{\bar{X}}(u|\mu_0) du} \quad (2.2) \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır [15]. Süreç kontrol altındayken  $O\check{C}U = \frac{1}{\alpha}$ , süreç kontrol dışında iken  $O\check{C}U = \frac{1}{1-\beta}$  dir.

Örneklemin dağılımı Normal dağılım iken ortalama için Shewhart Kontrol grafiğinin ortalama çalışma uzunluğu  $\alpha = 0.0027$  için  $1/0.0027 = 370$ 'dir. Yani süreç kontrol altındayken ortalama 370 noktada bir kez kontrol grafiği, doğal nedenlerden dolayı süreç kontrol dışında sinyali verecektir [13, 15]. Süreç kontrol altındayken  $O\check{C}U$ 'nun büyük olması istenir. Süreç kontrol dışına çıkmışsa erken uyarı almak için  $O\check{C}U$ 'nun küçük olması istenir.

## 3. KLASİK SHEWART KONTROL GRAFİKLERİ

Bir üretim sürecinin kalite kontrolü, bir ürünün ölçülebilen (nicel) veya ölçülemeyen (nitel) özelliklerine göre uygun kontrol grafikleri ile takip edilmelidir. Sürecin, istatistiksel kalite kontrolünün yapılabilmesi için uygun bir kalite özelliği ve bu özelliğe uyumlu kontrol grafiği seçilmelidir. Ölçülebilen kalite değişkenlerin dağılım ortalamasında olabilecek kaymaları takip edebilmek amacıyla için  $\bar{X}$  kontrol grafiği çizilir. Kitle varyansında meydana gelebilecek bir değişimi takip etmek amacıyla da Shewhart kontrol grafiği olarak  $S$  veya  $R$  grafiği çizilir. Örneklem hacmi küçük olduğunda ( $n < 8$ , genellikle) değişimi takip etmek için  $R$  kontrol grafiği tercih edilir. Bu çalışmada  $\bar{X}$  ve  $R$  kontrol grafikleri üzerinde durulacaktır.

Bir üretim sürecinin istatistiksel olarak kontrol altında olup olmadığını incelemek için Faz I'de ilgilenilen kalite

değişkenine ait gözlemler elde edilir ve değişkenin dağılımının bilinmeyen parametreleri varsa tahmin edilir ve kontrol limitleri elde edilir. Faz II aşamasında ise süreçte bir değişimin olup olmadığı takip edilir.

Ortalaması  $\mu$  standart sapması  $\sigma$  olan Normal dağılımın kitle ortalamasındaki değişimi takip etmek için çizilecek Shewhart kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}} \\ OC_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} \\ AKL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

biçimindedir.  $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$  eşitliğinde yer alan  $\alpha = 0.0027$ , iken  $Z_{\alpha/2} = Z_{0.00135} = 3$  değeri kontrol limiti katsayısı olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle klasik Shewhart kontrol grafiklerinde  $\mu_{\bar{X}} \mp 3\sigma_{\bar{X}}$  sınırlarında  $\alpha = 0.0027$ 'dir [15]. Süreç ortalamasındaki kaymaları tespit edebilmek için çizilen kontrol grafikleri kitle parametreleri biliniyorken ve bilinmiyorken durumları için farklı hesaplamalarla çizilir.  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

iken  $\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\sqrt{n}}\right)$  olduğundan dolayı kitle parametreleri  $\mu$  ve  $\sigma$  biliniyorken grafiğin limitleri  $\bar{X}$  grafiğinin limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + 3 \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} \\ OC_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} \\ AKL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} - 3 \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçimindedir. Normal dağılıma sahip kitleden alınan örneklemin genişliği ile dağılımın standart sapması arasındaki ilişkiyi kullanarak ele alınan  $W = \frac{R}{\sigma}$  rasgele değişkeni, görel genişlik olarak adlandırılır.  $W$ 'nin dağılımının parametreleri, örneklem hacminin bir fonksiyonudur ve  $E(W) = d_2$  dir. Dolayısıyla  $\sigma$ 'nin tahmin edicisi  $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2}$  dir. Böylece kitle parametreleri  $\mu$

ve  $\sigma$  bilinmiyorken  $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$  ve  $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$  tahmin edicileri kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{X} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \\ OC_{\bar{X}} &= \bar{X} \\ AKL_{\bar{X}} &= \bar{X} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

formülleri ile kontrol limitleri bulunur.  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_m$  alt örneklere ait ortalamalar olmak üzere,  $i$ 'inci örneklemin ortalaması,  $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$  ile hesaplanan genel

ortalama  $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$ ,  $\mu$ 'nün yansız bir tahmin edicisi olarak (3.3) eşitliğinde yer alır. (3.3) eşitliğinde yer alan  $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$ , her alt örnek grubundan hesaplanan genişlik değerlerinin aritmetik ortalamasıdır. (3.3) eşitliğinde  $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$  olarak yerine konarak  $\bar{X} \mp A_2 \bar{R}$  aralığı, kitle

standart sapması bilinmiyorken konum parametresindeki değişimi takip etmek için kontrol limitleri olarak kullanılır [15].  $R$  kontrol grafiğinin limitleri ise

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \mu_R + 3\sigma_R \\ OC_R &= \mu_R \\ AKL_R &= \mu_R - 3\sigma_R \end{aligned} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Kitle varyansı biliniyorken  $\mu_R = \sigma d_2$  ve  $\sigma_R = d_3 \sigma$  (3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,  $R$  kontrol grafiğinin limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= d_2 \sigma + 3d_3 \sigma = D_2 \sigma \\ OC_R &= d_2 \sigma \\ AKL_R &= d_2 \sigma - 3d_3 \sigma = D_1 \sigma \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. (3.5) ile verilen formüller  $\sigma$  parantezine alındığında ortaya çıkan kontrol limitleri katsayıları  $D_1 = d_2 - 3d_3$ ,  $D_2 = d_2 + 3d_3$  olarak gösterilir.  $R$  grafiği çizilirken kitle varyansı  $\sigma$  bilinmiyorken  $\sigma_R$ 'nin tahmin edicisine ihtiyaç duyulur. Kalite değişkeninin Normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında  $\hat{\sigma}_R$ ,  $W = \frac{R}{\sigma}$  görel genişliğinin dağılımından bulunabilir.  $W$ 'nin standart sapması olan  $\sigma_W = d_3$ , örneklem hacminin bir fonksiyonudur. Böylece  $R = W\sigma$  olduğundan  $\sigma_R = d_3 \sigma$  dir. Parametreler bilinmiyorken  $\hat{\mu}_R = \bar{R}$  ve  $\hat{\sigma}_R = \frac{d_3}{d_2} \bar{R}$  tahmin edicileri kullanılarak  $R$  kontrol grafiğinin limitleri,

$$\dot{U}KL_R = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = D_4\bar{R}$$

$$OC_{\bar{R}} = \bar{R} \quad (3.6)$$

$$AKL_R = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\bar{R} = D_3\bar{R}$$

olarak elde edilir. (3.6) ile verilen formüller  $\bar{R}$  parantezine alındığında ortaya çıkan kontrol limitleri katsayıları

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2} \text{ olarak gösterilir. Bu bölümde}$$

yer alan  $d_2, d_3, A_2, D_1, D_2, D_3, D_4$  katsayılarının çeşitli örneklem hacmi ( $n$ ) için alacağı değerler, Montgomery (1995, sayfa 725)'de verilen Tablo VI'da yer almaktadır [15].

#### 4. ÇARPIKLIK DÜZELTMELİ SHEWHART KALİTE KONTROL GRAFİKLERİNİN OLUŞTURULMASI

Klasik Shewhart kontrol grafiklerinin oluşturulması kalite değişkeninin Normal dağılıma sahip olması varsayımına bağlıdır [15]. Ancak çoğu durumda süreç kalite değişkeninin dağılımı çarpık olabilir ve Normal dağılım varsayımı yapılamaz. Bu durumda I. tip hata olasılığını büyütmeyen uygun diğer yöntemlerle grafik çizmek gerekir. Çarpık bir dağılıma sahip örneklem için klasik Shewhart kontrol grafikleri yerine Cornish-Fisher açılımına dayanan çarpıklık düzeltmesi yöntemi kullanılabilir. Bu bölümde önce örneklemden çarpıklık katsayısı hesaplamak için kullanılacak formüller ve Cornish-Fisher açılımı tanıtılacaktır. Daha sonra da Cornish-Fisher açılımına dayalı çarpıklık düzeltmeli Shewhart kontrol grafiklerinin nasıl çizileceği açıklanacaktır.

##### 4.1 Çarpıklık Katsayısı

Çarpıklık ölçüleri simetrik dağılıma sahip olmayan bir veri setinin Normal dağılımdan hangi düzeyde ve ne yönde uzaklaştığını saptamaya yarayan ölçülerdir. Büyüklüğü çarpıklığın kuvvetini, işareti ise yönünü göstermektedir. Bir dağılımın çarpıklığı hakkında bilgi edinmenin en kolay yolu dağılımın aritmetik ortalamasını, medyanını ve eğer varsa modunu karşılaştırmaktır. Dağılım simetrik ise,  $\bar{X} = \text{Medyan} = \text{Mod}$  olacağından çarpıklık katsayısı=0 olur. Dağılım sağa çarpık ise  $\text{Mod} < \text{Medyan} < \bar{X}$  olur ve çarpıklık katsayısı>0 dir. Dağılım sola çarpık ise  $\bar{X} < \text{Medyan} < \text{Mod}$  olur ve çarpıklık katsayısı<0 dir. Çarpıklık katsayısını belirlemek için Pearson(1895)'in önerdiği  $\frac{(\bar{X} - \text{Mod})}{S}$  ve  $\frac{3(\bar{X} - \text{Medyan})}{S}$  formüllerinde

yer alan ortalama, ve standart sapma, uç değerlerden çok etkilenen istatistikler olduğu için dağılımın çarpıklığını belirlemek için tercih edilmemektedir. [15, 16]. Bu çalışmada çarpıklık katsayılarının hesaplanmasında Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı

ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı göz önüne alınacaktır.

##### 4.1.1 Çeyrekliklere Dayalı Bowley'in Çarpıklık Katsayısı

MacGillivray (1986)'nin belirttiğine göre Bowley (1901) tarafından önerilen çarpıklık katsayısı formülü çeyrekliklere dayanmaktadır. Çarpıklığın uç değerlerden etkilenmesinin istenmediği durumda kullanılır. Simetrik bir dağılımda birinci çeyreklik ( $Q_{0.25}$ ) ve üçüncü çeyreklik ( $Q_{0.75}$ ) değerinin medyana ( $Q_{0.50}$ ) olan uzaklıklarının birbirine eşit olması fikrine dayalı olan Bowley'in çarpıklık katsayısı

$$k_{3(B)} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} \quad (4.1)$$

$$= \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

(4.1) eşitliği biçimindedir [16, 17, 18 19]. Ve veri setindeki sadece üç değere ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ) dayanarak hesaplanması zayıf tarafıdır.

##### 4.1.2 Yüzdelerle Dayanan Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı

David ve Johnson (1956), Bowley'in çarpıklık katsayısı formülünü geliştirerek

$$k_3 = \frac{Q_{1-\alpha} - 2Q_2 + Q_\alpha}{Q_{1-\alpha} - Q_\alpha} \quad (4.2)$$

ölçüsünü önermişlerdir [20]. (4.2) eşitliği ile verilen formülde  $\alpha = 0.1$  alınarak elde edilen çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı olarak anılmaktadır [21]. Dağılımın her iki uç noktasındaki gözlemlerin sadece %10'unu ihmal eden,  $Q_{10}, Q_{50}$  ve  $Q_{90}$  yüzdelerine dayanan bir ölçüdür ve

$$k_{3(K)} = \frac{Q_{90} - 2Q_{50} + Q_{10}}{Q_{90} - Q_{10}} \quad (4.3)$$

(4.3) eşitliği biçimindedir. Ve veri setindeki sadece üç değere ( $Q_{10}, Q_{50}, Q_{90}$ ) dayanarak hesaplanması zayıf tarafıdır [17]

##### 4.1.3 Momentlere Dayalı Çarpıklık Katsayısı

Momentlere dayalı bir çarpıklık katsayısı olan Fisher-Pearson çarpıklık katsayısı

$$k_3^* = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X - \mu)^3}{\left[\sqrt{E(X - \mu)^2}\right]^3} \quad (4.4)$$

(4.4) formülü ile hesaplanır [11, 22]. Simetrik dağılımlar için genelde  $\mu_3 = 0$  olduğu için  $k_3^* = 0$  olur ve verilerin simetrik bir dağılıma sahip olduğu anlaşılır. Örneklemeden bu çarpıklık katsayısı

$$k_{3(M)} = \frac{1}{nm-3} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_{ij} - \bar{x}}{S_{nm}} \right)^3 \quad (4.5)$$

(4.5) eşitliğinde verilen istatistik ile bulunur. Burada,

$$S_{nm} = \sqrt{\frac{1}{nm-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}$$
 örneklem standart sapması

ve  $\bar{x} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$  örneklem ortalamasıdır. Örneklemedeki tüm verileri kullandığı için en hassas çarpıklık ölçüsüdür [17].

Çarpıklık katsayısının önem kontrolü için

$H_0$  :Kitlenin dağılımı simetriktir.

$H_1$  :Kitlenin dağılımı simetrik değildir.

hipotezi test edilir. Eğer,

$$\left| \frac{\text{hesaplanan } k_3}{\sqrt{\frac{6nr(nr-1)}{(nr-2)(nr+1)(nr+3)}}} \right| > Z_{\alpha/2} \quad (4.6)$$

(4.6.) eşitliği sağlanır ise  $H_0$  hipotezi  $\alpha$  anlam düzeyinde red edilir ve çarpıklık katsayısının önemli olduğu yani dağılımın çarpık olduğu sonucuna varılır. [23].

### 4.2. Cornish-Fisher açılımı

Çarpıklık düzeltilmesi yöntemi Cornish-Fisher açılımına dayanır.  $X$  ortalaması 0, standart sapması 1 olan standartlaştırılmış rasgele değişken olsun.  $X(U_\alpha)$ ,  $X$  rasgele değişkeninin dağılımının  $\alpha$  yüzdeliği olsun.  $U_\alpha$  Standart Normal dağılıma sahip rasgele değişken olsun.  $k_r$ ,  $X$  'in  $r$ . kümülanı ( $r \geq 3$ ) olsun. O zaman

$$\begin{aligned} X(U_\alpha) = & U_\alpha + \frac{1}{6}(U_\alpha^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(U_\alpha^3 - 3U_\alpha)k_4 \\ & - \frac{1}{36}(2U_\alpha^2 - 5U_\alpha)k_3^2 + \frac{1}{120}(U_\alpha^4 - 6U_\alpha^2 + 3)k_5 \\ & - \frac{1}{24}(U_\alpha^4 - 5U_\alpha^2 + 2)k_3k_4 + \frac{1}{324}(12U_\alpha^4 - 53U_\alpha^2 + 17)k_3^3 \\ & + \frac{1}{720}(U_\alpha^5 - 10U_\alpha^3 + 15U_\alpha)k_6 \\ & - \frac{1}{180}(2U_\alpha^5 - 17U_\alpha^3 + 21U_\alpha)k_3k_5 - \frac{1}{384}(3U_\alpha^5 - 24U_\alpha^3 + 29U_\alpha)k_3^2k_4 \\ & + \frac{1}{288}(14U_\alpha^5 - 103U_\alpha^3 + 107U_\alpha)k_3^2k_4 \\ & - \frac{1}{7776}(252U_\alpha^5 - 1688U_\alpha^3 + 1511U_\alpha)k_3^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

biçiminde Cornish-Fisher açılımına sahiptir [24].  $3\sigma$  sınırları için,  $\alpha_1 = 1 - 0.00135 = 0.99865$  ve  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = 1 - 0.99865 = 0.00135$  olarak alınırsa  $U_{\alpha_1} = 3$ ,  $U_{\alpha_2} = -3$  bulunarak (4.7) eşitliğinde yerine koyulduğunda  $X(U_{\alpha_1})$  ve  $X(U_{\alpha_2})$  'nin Cornish-Fisher açılımı,

$$\begin{aligned} X(U_{\alpha_1}) = & 3 + \frac{4}{3}k_3 + \frac{3}{4}k_4 - \frac{13}{12}k_3^2 \\ & + \frac{1}{4}k_5 - \frac{19}{12}k_3k_4 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} X(U_{\alpha_2}) = & -3 + \frac{4}{3}k_3 - \frac{3}{4}k_4 + \frac{13}{12}k_3^2 \\ & + \frac{1}{4}k_5 - \frac{19}{12}k_3k_4 + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. (4.8) ve (4.9) eşitlikleri  $X$  'in bir çok kümülanını içeren karmaşık forma sahiptir. Çarpıklık katsayısı  $k_3$  'ün kalite kontrol grafikleri üzerindeki etkisi ile ilgilendiğimizden dolayı

$$X(U_{\alpha_1}) = 3 + \frac{4}{3}k_3 - \frac{13}{12}k_3^2 + Y_1 \quad (4.10)$$

$$X(U_{\alpha_2}) = -3 + \frac{4}{3}k_3 + \frac{13}{12}k_3^2 + Y_2 \quad (4.11)$$

(4.10) ve (4.11) formülleri kullanılır. Burada yer alan  $Y_1$  ve  $Y_2$  terimlerinin pratikte hesaplanması ve kullanılması zor olduğundan kalite kontrol grafiklerinin limitleri

$$\begin{aligned} X(U_{\alpha_1}) = & 3 + \frac{4}{3}k_3 - \frac{13}{12}k_3^2 + Y_1 \\ \approx & 3 + \frac{4}{3}k_3h(k_3) \\ = & \text{ÜKL} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
X(U_{\alpha_2}) &= -3 + \frac{4}{3}k_3 + \frac{13}{12}k_3^2 + Y_2 \\
&\approx -3 + \frac{4}{3}k_3 h(k_3) \\
&= AKL
\end{aligned} \tag{4.13}$$

formülleri ile yaklaşık olarak hesaplanır. Burada yer alan  $h(\cdot)$  fonksiyonunun özellikleri,  $h(k_3) = -h(k_3)$ ,  $\lim_{k_3 \rightarrow \infty} k_3 h(k_3) = 0$  ve  $h(0) = 1$  dir. Chan ve Cui (2003) çalışmalarında basitlik sağlaması için  $h$  fonksiyonunu  $h(k_3) = \frac{1}{1 + \delta k_3^2}$  biçiminde seçmiştir ve pek çok çarpık dağılım (Weibull, Lognormal, Burr ... gibi) için yapılan simülasyon çalışmalarında  $\delta$  parametresini 0,2'ye çok yakın bulduklarından dolayı  $h(k_3) = \frac{1}{1 + 0.2k_3^2}$  olarak almışlardır. Dolayısıyla kalite kontrol grafiklerinin üst ve alt kontrol limiti

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL} &= 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0.2k_3^2} \\
AKL &= -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0.2k_3^2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL} &= 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0.2k_3^2} \\
AKL &= -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3}{1 + 0.2k_3^2}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

biçiminde oluşturulur.

### 4.3 Çarpıklık Düzeltmesi Yöntemiyle Shewhart Kalite Kontrol Grafiklerinin Oluşturulması

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , ortalaması  $\mu_X$ , standart sapması  $\sigma_X$  ve çarpıklığı  $k_3$  olarak bilinen dağılımın alt örneklem grubu olsun. Bu durumda Chan ve Cui (2003)'nin önerdiği çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  ve  $R$  kontrol grafiği limitleri

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL}_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + \left( 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3(\bar{x})}{1 + 0.2k_3^2(\bar{x})} \right) \sigma_{\bar{X}} \\
OC_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} \\
AKL_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + \left( -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3(\bar{x})}{1 + 0.2k_3^2(\bar{x})} \right) \sigma_{\bar{X}}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

biçimindedir. Çarpıklık düzeltmeli  $R$  kontrol grafiği limitleri ise

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL}_R &= \mu_R + \left( 3 + \frac{\frac{4}{3}k_3(R)}{1 + 0.2k_3^2(R)} \right) \sigma_R \\
OC_{\bar{R}} &= \mu_R
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$AKL_R = \mu_R + \left( -3 + \frac{\frac{4}{3}k_3(R)}{1 + 0.2k_3^2(R)} \right) \sigma_R$$

biçimindedir. (4.16) ve (4.17) eşitliklerinde yer alan  $k_3(\bar{x})$  ve  $k_3(R)$  sırasıyla örneklem ortalaması  $\bar{x}$  ve örneklem genişliği  $R$ 'nin dağılımının çarpıklık katsayısıdır [6].  $\bar{X}$  kontrol grafiği limitlerinin hesaplanmasında kullanılan  $\frac{\frac{4}{3}k_3(\bar{x})}{1 + 0.2k_3^2(\bar{x})}$  formülü  $c_4^*$  ile  $R$  kontrol grafiği limitlerinin

hesaplanmasında kullanılan  $\frac{\frac{4}{3}k_3(R)}{1 + 0.2k_3^2(R)}$  formülü  $d_4^*$  ile

gösterilir ve bu sabitler çarpıklık düzeltmesidir. Burada  $d_2^* = \frac{\mu_R}{\sigma_X}$ ,  $d_3^* = \frac{\sigma_R}{\sigma_X}$  olmak üzere sırasıyla  $\frac{R}{\sigma_X}$ 'in

ortalaması ve standart sapmasıdır. Dolayısıyla  $\sigma_X = \frac{\mu_R}{d_2^*}$

ve  $\sigma_R = \frac{d_3^*}{d_2^*} \mu_R$  olarak hesaplanır.  $c_4^*, d_4^*, d_2^*$  ve  $d_3^*$

sabitleri formülde yerine koyulduğunda çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL}_{\bar{X}} &= \mu_X + (3 + c_4^*) \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \\
OC_{\bar{X}} &= \mu_X
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$OC_{\bar{X}} = \mu_X$$

$$AKL_{\bar{X}} = \mu_X + (-3 + c_4^*) \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

ve çarpıklık düzeltmeli  $R$  kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned}
\dot{ÜKL}_R &= \mu_R + (3 + d_4^*) \sigma_R \\
OC_{\bar{R}} &= \mu_R
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$AKL_R = \mu_R + (-3 + d_4^*) \sigma_R$$

olarak hesaplanır.  $c_4^*$  ve  $d_4^*$  sabitleri çarpıklık düzeltmesi sabitleridir ve  $AKL_R$  negatif ise 0 alınır. Eğer dağılım simetrik ise  $c_4^* = 0$  olur ve  $\bar{X}$  grafiği Shewhart grafiğinin limitlerine sahip olur [6]. Eğer dağılımın ortalaması ve varyansı bilinmiyorsa kontrol grafiklerinin



oluşturulabilmesi için bu parametrelerin tahmin edicileri kullanılır. Eğer örneklemin alındığı kitlenin çarpıklık katsayısı  $k_3$  ise  $\bar{X}$  'nin dağılımının çarpıklık katsayısı  $\frac{k_3}{\sqrt{n}}$  dir. Çarpıklık düzeltmesi yöntemiyle elde edilmeye çalışılan kontrol grafikleri için gerekli katsayılar olan  $d_2^*$  ve  $d_3^*$  klasik Shewhart kontrol grafikleri için gerekli katsayılar olan  $d_2$  ve  $d_3$  'ün yerine geçer. Bu durumda çarpıklık düzeltmesiyle elde edilen  $\bar{X}$  kontrol grafiği limitleri,

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + \left(3 + \frac{4k_3 / (3\sqrt{n})}{1 + 0.2k_3^2 / n}\right) \frac{\bar{R}}{d_2^* \sqrt{n}} \\ &= \bar{\bar{X}} + A_U^* \bar{R} \\ O\check{C}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} \\ AKL_{\bar{X}} &= \bar{\bar{X}} + \left(-3 + \frac{4k_3 / (3\sqrt{n})}{1 + 0.2k_3^2 / n}\right) \frac{\bar{R}}{d_2^* \sqrt{n}} \\ &= \bar{\bar{X}} - A_L^* \bar{R} \end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak hesaplanır. Burada,

$$\begin{aligned} A_U^* &= \left(3 + \frac{4k_3 / (3\sqrt{n})}{1 + 0.2k_3^2 / n}\right) \frac{1}{d_2^* \sqrt{n}} \\ A_L^* &= \left(-3 + \frac{4k_3 / (3\sqrt{n})}{1 + 0.2k_3^2 / n}\right) \frac{1}{d_2^* \sqrt{n}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

dır ve hesaplanan  $k_3$  değerine ve örneklem büyüklüğüne göre  $A_U^*$  ve  $A_L^*$  sabitlerinin değerleri Tablo 1'den okunur [6].  $d_2^*$  sabitinin değerleri Chan ve Cui (2003,s.564)'de yer almaktadır. Eğer hesaplanan  $k_3$  değeri tabloda yer

almıyorsa  $A_U^*$  ve  $A_L^*$  sabitleri

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{4.22}$$

(4.22) eşitliği ile verilen interpolasyon formülü ile hesaplanır [25]. Örneğin  $n=5$  iken  $k_3=1.2$  olarak hesaplanırsa,  $A_U^*$  değerinin 0.74,  $A_L^*$  değerinin 0.46 olduğu görülmektedir. Eğer  $k_3=1.2$  olarak hesaplanırsa,  $A_U^*$  değeri 0.46,  $A_L^*$  değeri 0.74 olur. Yine  $n=5$  iken  $k_3=1.35$  olarak hesaplanırsa  $A_U^*$  ve  $A_L^*$  sabitlerinin değerleri (4.22) eşitliğindeki interpolasyon formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} A_U^* &= \frac{1.35 - 1.6}{1.2 - 1.6} 0.74 + \frac{1.35 - 1.2}{1.6 - 1.2} 0.79 = 0.75875 \\ A_L^* &= \frac{1.35 - 1.6}{1.2 - 1.6} 0.46 + \frac{1.35 - 1.2}{1.6 - 1.2} 0.44 = 0.4525 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Çarpıklık düzeltmesi yöntemine dayalı R kontrol grafiği limitleri

$$\begin{aligned} \bar{U}KL_R &= \left[1 + (3 + d_4^*) \frac{d_3^*}{d_2^*}\right] \bar{R} = D_4^* \bar{R} \\ O\check{C}_R &= \bar{R} \\ AKL_R &= \left[1 + (-3 + d_4^*) \frac{d_3^*}{d_2^*}\right] \bar{R} = D_3^* \bar{R} \end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak hesaplanır. Çarpık dağılımlar için  $D_4^*$  ve  $D_3^*$  sabitlerinin değerleri aşağıda yer alan Tablo 2'de, verilmiştir [6].

**Tablo 1.** Çarpıklık düzeltmeli  $\bar{X}$  kontrol grafiği sabitleri  $A_U^*$  ve  $A_L^*$

	n=2		n=3		n=4		n=5		n=7		n=10	
$k_3$	$A_U^*$	$A_L^*$	$A_U^*$	$A_L^*$	$A_U^*$	$A_L^*$	$A_U^*$	$A_L^*$	$A_U^*$	$A_L^*$	$A_U^*$	$A_L^*$
0.0	1.88	1.88	1.03	1.03	0.73	0.73	0.58	0.58	0.42	0.42	0.31	0.31
0.4	2.14	1.67	1.13	0.92	0.82	0.69	0.63	0.53	0.45	0.39	0.33	0.29
0.8	2.37	1.47	1.25	0.84	0.87	0.61	0.68	0.50	0.48	0.37	0.35	0.28
1.2	2.61	1.32	1.37	0.77	0.95	0.57	0.74	0.46	0.52	0.35	0.37	0.26
1.6	2.83	1.22	1.49	0.72	1.03	0.54	0.79	0.44	0.56	0.33	0.39	0.25
2.0	3.02	1.15	1.60	0.68	1.10	0.51	0.85	0.42	0.59	0.32	0.42	0.25
2.4	3.19	1.12	1.69	0.65	1.18	0.49	0.91	0.40	0.63	0.30	0.44	0.23
2.8	3.32	1.13	1.78	0.64	1.24	0.47	0.95	0.39	0.66	0.29	0.46	0.22
3.2	3.45	1.16	1.86	0.64	1.29	0.47	1.00	0.38	0.69	0.29	0.48	0.22
3.6	3.52	1.20	1.92	0.65	1.34	0.47	1.04	0.37	0.72	0.28	0.50	0.21
4.0	3.59	1.52	1.97	0.66	1.39	0.47	1.07	0.37	0.75	0.27	0.51	0.21

**Tablo 2.** Çarpıklık düzeltilmeli  $R$  kontrol grafiği sabitleri  $D_4^*$  ve  $D_3^*$ 

$k_3$	$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$		$n=7$		$n=10$	
	$D_4^*$	$D_3^*$	$D_4^*$	$D_3^*$	$D_4^*$	$D_3^*$	$D_4^*$	$D_3^*$	$D_4^*$	$D_3^*$	$D_4^*$	$D_3^*$
<b>0.0</b>	4.12	0.00	2.93	0.00	2.53	0.00	2.30	0.10	2.06	0.24	1.88	0.35
<b>0.4</b>	4.21	0.00	3.06	0.00	2.69	0.01	2.40	0.14	2.16	0.27	1.98	0.38
<b>0.8</b>	4.41	0.00	3.28	0.00	2.85	0.07	2.61	0.17	2.36	0.29	2.17	0.39
<b>1.2</b>	4.70	0.00	3.58	0.00	3.13	0.09	2.88	0.17	2.61	0.28	2.41	0.37
<b>1.6</b>	5.03	0.00	3.90	0.00	3.44	0.07	3.17	0.15	2.88	0.26	2.65	0.34
<b>2.0</b>	5.32	0.00	4.20	0.00	3.71	0.03	3.44	0.11	3.13	0.21	2.90	0.28
<b>2.4</b>	5.60	0.00	4.46	0.00	3.97	0.00	3.69	0.06	3.37	0.16	3.11	0.24
<b>2.8</b>	5.85	0.00	4.71	0.00	4.21	0.00	3.92	0.05	3.58	0.11	3.31	0.19
<b>3.2</b>	6.09	0.00	4.93	0.00	4.42	0.00	4.13	0.00	3.78	0.00	3.50	0.14
<b>3.6</b>	6.27	0.00	5.12	0.00	4.61	0.00	4.31	0.00	3.96	0.00	3.67	0.09
<b>4.0</b>	6.44	0.00	5.30	0.00	4.79	0.00	4.48	0.00	4.11	0.00	3.81	0.04

Eğer hesaplanan  $k_3$  değeri tabloda yer almıyorsa interpolasyon uygulanır. Örneğin  $n=7$  iken  $k_3 = 2.8$  olarak hesaplanırsa,  $D_4^*$  değerinin 3.58,  $D_3^*$  değerinin 0.11 olduğu görülmektedir. Yine  $n=7$  iken  $k_3 = 2.45$  olarak hesaplanırsa  $D_4^*$  ve  $D_3^*$  sabitlerinin değerleri

$$D_4^* = \frac{2.45 - 2.8}{2.4 - 2.8} 3.37 + \frac{2.45 - 2.4}{2.8 - 2.4} 3.58 = 3.39625 \quad (4.24)$$

$$D_3^* = \frac{2.45 - 2.8}{2.4 - 2.8} 0.11 + \frac{2.45 - 2.4}{2.8 - 2.4} 0.16 = 0.11625$$

olarak (4.22)'de gösterilen interpolasyon formülü ile hesaplanır.

## 5.UYGULAMA

Bu bölümde Weibull dağılımına sahip örneklem için çarpıklık düzeltmesine dayalı Shewhart kontrol grafiklerinin uygulaması yapılacaktır. Farklı çarpıklık katsayısı formülleri için çizilen kontrol grafikleri I. tip hata, OÇU ve standart hata kriterlerine göre Monte Carlo simülasyon metodu ile karşılaştırılacaktır. Uygulamada Microsoft Excel ve R programı kullanılmıştır. Bu kısımda verilen uygulama Handan Özarslan'ın " Çarpık Dağılımlar için Shewhart Kontrol Grafikleri " başlıklı Yüksek Lisans tezinden hazırlanmıştır.

### 5.1. Weibull Dağılımı

$\lambda > 0$  konum parametrelisi,  $\alpha > 0$  ölçek parametrelisi ve  $\beta > 0$  şekil parametrelisi Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkenini göstermek için  $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha, \beta)$  gösterimi kullanılır. Bu dağılıma sahip  $X$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{x-\lambda}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\alpha}\right)^\beta}, x > \lambda \quad (5.1)$$

biçimindedir. Weibull dağılımı yaşam analizinde, güvenilirlikte ve kalite kontrolünde çok karşılaşılan bir dağılımdır. Örneğin, bir ürünün ömrünü veya bir hizmetin süresini, bir seramik malzemenin kırılma veya bir ipin kopma mukavamentini değerlendirmek için kullanılabilir.

Weibull(0,  $\alpha$ , 1) olduğunda dağılım Üstel dağılım, Weibull(0,  $\alpha$ , 2) olduğunda ise dağılım standart Rayleigh dağılımı olur. Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin sırasıyla birikimli dağılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun tersi

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\alpha}\right)^\beta}, x > \lambda \quad (5.2)$$

$$F^{-1}(p) = \lambda + \alpha \left[ \ln \left( \frac{1}{1-p} \right) \right]^{1/\beta} \quad (5.3)$$

biçimindedir. (5.3) eşitliğinde  $p \in (0,1)$  dir. Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin medyanı,  $n$ . dereceden merkezi momenti, beklenen değeri, ve varyansı,

$$\text{Medyan} = \lambda + \alpha (\ln 2)^{1/\beta} \quad (5.4)$$

$$E(X^n) = \lambda + \alpha^n \Gamma \left( \frac{n+\beta}{\beta} \right) \quad (5.5)$$

$$E(X) = \mu = \lambda + \alpha \Gamma \left( \frac{1+\beta}{\beta} \right)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \alpha^2 \left( \Gamma \left( \frac{\beta+2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left( \frac{\beta+1}{\beta} \right) \right) \quad (5.6)$$

dır. Bowley'in çarpıklık katsayısı

$$k_{3(B)} = \frac{(\ln(4))^{1/\beta} - 2(\ln(2))^{1/\beta} + \left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{1/\beta}}{(\ln(4))^{1/\beta} - \left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)^{1/\beta}} \quad (5.7)$$

Kelly'nin çarpıklık katsayısı

$$k_{3(K)} = \frac{(\ln(10))^{1/\beta} - 2(\ln(2))^{1/\beta} + \left(\ln\left(\frac{10}{9}\right)\right)^{1/\beta}}{(\ln(10))^{1/\beta} - \left(\ln\left(\frac{10}{9}\right)\right)^{1/\beta}} \quad (5.8)$$

ve momentlere dayalı çarpıklık katsayısı

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - \mu^3}{\sigma^3}$$

$$= \frac{E(X^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \quad (5.9)$$

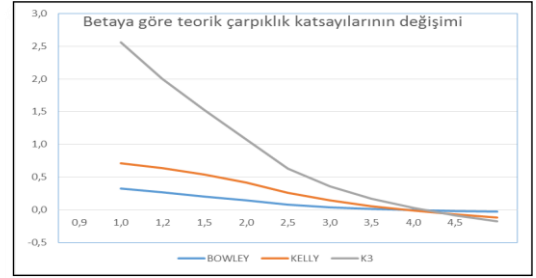
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\right)^{3/2}}$$

dır. (5.7)-(5.9) eşitliklerinden görüleceği gibi Weibull dağılımının çarpıklık katsayısı sadece  $\beta$  parametresine bağlıdır. Buna göre  $\beta$  parametresinin farklı değerleri için hesaplanan çarpıklık katsayıları Tablo 3.'de verilmiştir

**Tablo 3.** Weibull dağılımının farklı  $\beta$  değerleri için çarpıklık katsayıları hesaplamaları

$\beta$	Bowley'in çarpıklık katsayısı	Kelly'nin çarpıklık katsayısı	Momentlere dayanan çarpıklık katsayısı
0.85	0.32318	0.71312	2.56009
1	0.26186	0.63479	2.00000
1.2	0.20161	0.53945	1.52113
1.5	0.13948	0.41682	1.07199
2	0.07591	0.25831	0.63111
2.5	0.03727	0.14134	0.35863
3	0.01138	0.05239	0.16810
3.5	-0.00716	-0.01721	0.02511
4	-0.02109	-0.07301	-0.08724
4.5	-0.03192	-0.11869	-0.17838

ve grafik biçiminde



**Şekil 1.**  $\beta$  parametresine göre çarpıklık katsayısı değişimi grafiği

Şekil 1.'de gösterilmiştir. Weibull dağılımında farklı  $\beta$  değerlerine göre çarpıklık katsayılarına bakıldığında,  $\beta$  değeri arttıkça her üç çarpıklık katsayısının da azaldığı görülmektedir.  $\beta$  parametresi 3 ile 3,5 arasında değerler aldığımda Weibull dağılımının çarpıklık katsayısı da sıfıra yakın değerler almaktadır ve Normal dağılıma yaklaşmaktadır.

## 5.2 Weibull Dağılımı için Kontrol Grafikleri ve I. Tip Hataların Karşılaştırılması

Bu kesimde bilinmeyen çarpıklık katsayısının tahmini için kullanılan tahmin edicilerin kontrol grafiği performansı üzerindeki etkileri Monte-Carlo simülasyon çalışması ile incelenecektir.

Uygulamada Weibull dağılımı için çarpıklık sadece  $\beta$  şekil parametresine bağlı olduğundan, konum parametresi  $\lambda = 0$  ve ölçek parametresi  $\alpha = 1$  olarak seçilmiştir. Şekil 1 göz önünde bulundurularak  $\beta = 0.85, 1.2, 3.5$  değerleri için dağılım fonksiyonu tekniği kullanılarak  $n=3, 4, 5, 7$  ve  $m=18$  seçilerek Weibull dağılımından sayılar üretilmiştir. Bu çalışmada yer alan (4.1)-(4.5) eşitlikleri ile verilen çarpıklık katsayısı formüllerinden elde edilen (5.7)-(5.9) tahminleri kullanılarak oluşturulan kontrol grafikleri için değişen  $n$  ve  $\beta$  değerlerine göre I. tip hata olasılıkları ve  $OÇU$  hesaplanmıştır. Bu işlemler 1000 kez tekrar edilmiştir.  $\bar{X}$  kontrol grafiği için yapılan simülasyon çalışması sonuçları Tablo 4.'de  $R$  kontrol grafiği için yapılan simülasyon çalışması sonuçları ise Tablo 5.'de verilmiştir [26].

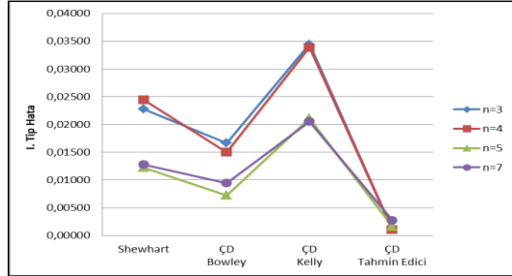
### 5.2.1 Çarpıklık katsayılarına göre $\bar{X}$ Kontrol grafiği performanslarının karşılaştırması

$\bar{X}$  kontrol grafiği için Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı, ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı kullanılarak çarpıklık düzeltmeli Shewhart kontrol grafiklerinin limitleri hesaplanmıştır ve simülasyon çalışması yapılarak I. tip hata olasılıkları ve ortalama çalışma uzunlukları Tablo 4.'de gösterilmiştir.

**Tablo 4.** Weibull dağılımı için çarpıklık katsayılarına göre  $\bar{X}$  kontrol grafiği performanslarının karşılaştırması için hesaplanan I. tip hata ve OÇU değerleri

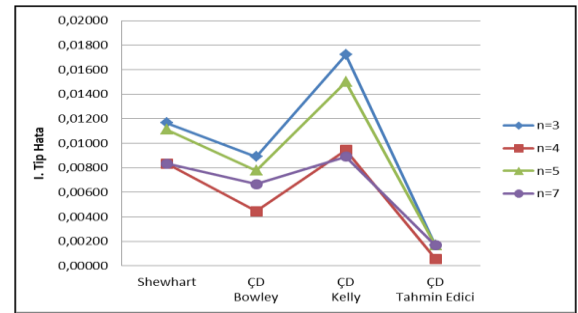
$\beta$	$n$	Bowley'in Çarpıklık Katsayısı		Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı		Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısı		Klasik Shewhart Yöntemi	
		I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU
0.85	3	0.01667	60.00	0.03444	29.03	0.00111	900	0.02278	43.90
	4	0.01500	66.67	0.03389	29.51	0.00111	900	0.02444	40.91
	5	0.00722	138.46	0.02111	47.37	0.00167	600	0.01222	81.82
	7	0.00944	105.88	0.02056	48.65	0.00278	360	0.01278	78.26
1.2	3	0.00889	112.50	0.01722	58.06	0.00167	600	0.01167	85.71
	4	0.00444	225.00	0.00944	105.88	0.00056	1800	0.00833	120.00
	5	0.00778	128.57	0.01500	66.67	0.00167	600	0.01111	90.00
3.5	7	0.00667	150.00	0.00889	112.50	0.00167	600	0.00833	120.00
	3	0.01444	69.23	0.01778	56.25	0.01556	64	0.01778	56.25
	4	0.01056	94.74	0.01278	78.26	0.00833	120	0.01333	75.00
	5	0.00889	112.50	0.01000	100.00	0.00889	113	0.01000	100.00
	7	0.00833	120.00	0.01167	85.71	0.00667	150	0.11722	8.53

Momentlere dayalı hesaplanan çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesinin I. tip hata olasılıklarının daha düşük olduğu görülmektedir.  $\beta = 0.85$ , 1.2, 3.5 parametrelerinin her biri için farklı  $n$  değerlerine göre hesaplanıp Tablo 4.'de belirtilen I. tip hata olasılıkları Şekil 2., Şekil 3. ve Şekil 4.'de grafik üzerinde gösterilmiştir.

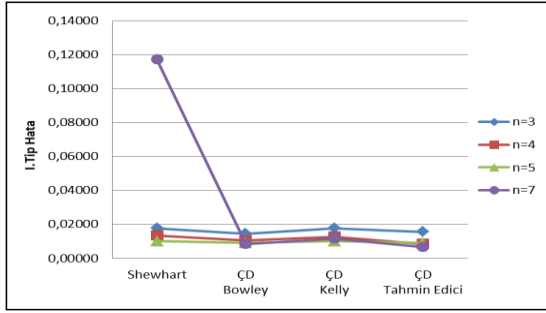
**Şekil 2.**  $\beta = 0.85$  için Weibull dağılımı  $\bar{X}$  kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

Şekil 2.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 0.85$  parametrelili Weibull dağılımının  $\bar{X}$  kontrol grafiklerinde Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda momentlere dayanan

çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise en küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.

**Şekil 3.**  $\beta = 1.2$  için Weibull dağılımı  $\bar{X}$  kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

Şekil 3.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 1.2$  parametrelili Weibull dağılımının  $\bar{X}$  kontrol grafiklerinde Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise en küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir.



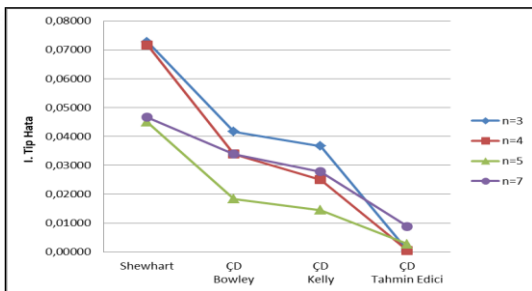
Şekil 4.  $\beta = 3.55$  için Weibull Dağılımı  $\bar{X}$  kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

Şekil 4.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 3.55$  parametrelili Weibull dağılımının  $\bar{X}$  kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu

Tablo 5. Weibull dağılımı için çarpıklık katsayılarına göre R Kontrol grafiği performanslarının karşılaştırması için hesaplanan I. tip hata ve OÇU değerleri

$\beta$	n	Bowley'in Çarpıklık Katsayısı		Kelly'nin Çarpıklık Katsayısı		Momentlere dayalı hesaplanan Çarpıklık Katsayısı		Klasik Shewhart Yöntemi	
		I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU	I. Tip Hata	OÇU
0.85	3	0.04167	24	0.03667	27.27	0.00056	1800	0.07278	13.74
	4	0.03389	29.51	0.02500	40	0.00056	1800	0.07167	13.95
	5	0.01833	54.55	0.01444	69.23	0.00278	360	0.04500	22.22
	7	0.03389	29.51	0.02778	36	0.00889	112.5	0.04667	21.43
1.2	3	0.01111	90	0.00722	138.46	0.00056	1800	0.03444	29.03
	4	0.00667	150	0.00667	150	0.00167	600	0.03333	30
	5	0.01889	52.94	0.01667	60	0.00222	450	0.04889	20.45
	7	0.03889	25.71	0.03500	28.57	0.00111	900	0.06056	16.51
3.5	3	0.00278	450	0.00222	360	0.00167	600	0.01000	100
	4	0.00056	1800	0.00056	1800	0.00056	1800	0.01111	90
	5	0.00111	900	0.00111	900	0.00111	900	0.00667	150
	7	0.00111	900	0.00111	900	0.00056	1800	0.00611	163.64

Yöntemlerin I. tip hataları arasındaki farkın R kontrol grafiklerinde daha belirgin olduğu görülmektedir.  $\beta = 0.85, 1.2, 3.5$  parametrelerinin her biri için farklı n değerlerine göre hesaplanıp Tablo 5.'de belirtilen I. tip hata olasılıkları Şekil 5., Şekil 6. ve Şekil 7.'de grafik üzerinde gösterilmiştir.



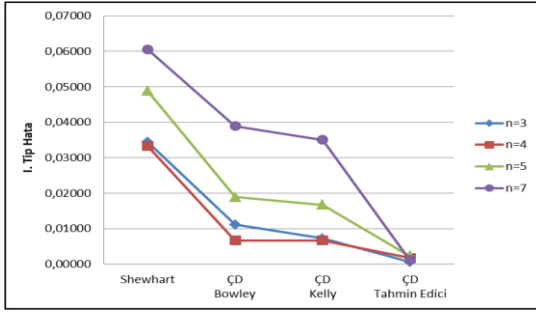
Şekil 5.  $\beta = 0.85$  için Weibull dağılımı R kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

ve yine aynı koşullarda Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$ , Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinin ise birbirlerine yakın ve Shewhart yönteminden daha küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir [26].

## 5.2.2 Çarpıklık katsayılarına göre R Kontrol grafiği performanslarının karşılaştırması

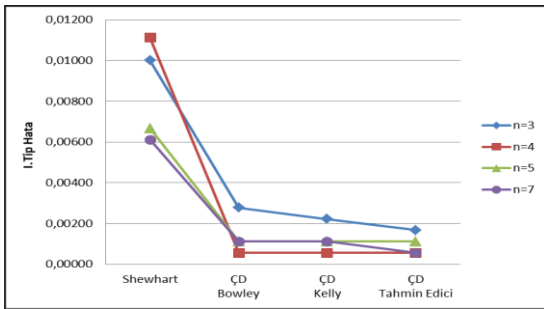
R kontrol grafiği için Bowley'in çarpıklık katsayısı, Kelly'nin çarpıklık katsayısı, ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı kullanılarak çarpıklık düzeltmeli Shewhart kontrol grafiklerinin limitleri hesaplanmıştır ve simülasyon çalışması yapılarak I. tip hata olasılıkları ve ortalama çalışma uzunlukları Tablo 5.'de gösterilmiştir.

Şekil 5.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 0.85$  parametrelili Weibull dağılımının R kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu, Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin Shewhart yönteminden, Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise Bowley'in yönteminden daha düşük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir. Yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise I. tip hata olasılığı çok düşüktür.



Şekil 6.  $\beta = 1,2$  için Weibull dağılımı  $R$  kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

Şekil 6.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 1.2$  parametrelili Weibull dağılımının  $R$  kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu, Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin Shewhart yönteminden, Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise Bowley'in yönteminden daha düşük I.tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir. Yine aynı koşullarda momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin ise I. tip hata olasılığı çok düşüktür.



Şekil 7.  $\beta = 3.5$  için Weibull dağılımı  $R$  kontrol grafiği için I. tip hata olasılıkları grafiği

Şekil 7.'de,  $n=3, 4, 5, 7$  olduğunda  $\beta = 3.55$  parametrelili Weibull dağılımının  $R$  kontrol grafiklerinde klasik Shewhart yönteminin I. tip hata olasılığının yüksek olduğu ve yine aynı koşullarda Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$ , Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinin ise birbirlerine yakın ve Shewhart yönteminden daha küçük I. tip hataya sahip olduğu gözlenmektedir [26].

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Normal dağılıma sahip olmayan bir örneklem için klasik Shewhart yöntemi kullanıldığında süreç kontrol altındayken kontrol sınırları dışına çıkan nokta sayısı çarpıklık

düzeltilmesi yöntemine göre çok daha fazladır. Dağılım çarpık olduğunda Shewhart kontrol grafiğinin I. tip hata olasılığı oldukça yüksektir ve diğer yöntemlerle oluşturulan grafiklere göre kötü bir performansa sahiptir.

I. tip hata olasılıkları örneklem büyüklüklerine göre farklılık göstermemektedir. Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$ , Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ve momentlere dayanan çarpıklık katsayısı  $k_3^*$  ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemlerinden  $k_3^*$  ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemi en iyi performansa sahiptir.  $k_3^*$ , verilerin hepsi kullanılarak hesaplandığından uç değerlerden etkilenen bir çarpıklık katsayısıdır. Üç değerler çarpıklık katsayısı değerini artırmaktadır.  $k_{3(B)}$  ve  $k_{3(K)}$  çarpıklık katsayıları uç değerlerden etkilenmediğinden çarpıklık düzeltmesi yönteminde düşük bir performansa sahip olmaktadır. Üç değere duyarlı çarpıklık katsayısı ile oluşturulan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hata olasılığının daha düşük olduğu yani daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir.

Klasik Shewhart yöntemine en yakın sonuçları Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$  ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemi vermiştir. Kelly'nin çarpıklık katsayısı  $k_{3(K)}$  ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yönteminin I. tip hatasının Bowley'in çarpıklık katsayısı  $k_{3(B)}$  ile hesaplanan çarpıklık düzeltmesi yöntemine göre daha düşük olduğu görülmektedir. Bu nedenle Weibull dağılımına sahip veriler için çizilecek olan  $\bar{X}$  kontrol grafiğinde çarpıklık katsayısının hesaplanmasında Kelly'nin formülünün kullanılmasını önerilir.

Buradan görülmektedir ki kalite kontrol grafikleri çizilirken, örneklemin geldiği kitlenin dağılımı, örneklem hacmi, çarpıklık katsayısının hangi yöntemle hesaplanacağı kritik karardır. Kalite kontrol grafikleri çizilirken genelde örneklem hacmi büyük tutulmakta, merkezi limit teoreminden faydalanılmakta ve Normal dağılım varsayımı yapılmaktadır. Halbuki maliyeti yüksek olan ve tahribatlı muayene edilen ürünlerin kalite kontrolünde küçük örneklem ile çalışıldığından dolayı bu varsayımlar sağlanmayabilir. Dolayısıyla Normal dağılıma sahip olmayan (hatta ciddi derecede çarpıklığı olan bir dağılıma sahip olan) örneklemin kalite değişkenlerinin denetiminin bu çalışmada önerilen çarpıklık düzeltmesi yöntemine dayanan kontrol grafikleri ile yapılması işletmelere önerilir.

## KAYNAKÇA

- [1] Ş. Şenol, İstatistiksel Kalite Kontrol, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, , 2012.
- [2]T. Özdemir, İstatistiksel Kalite Kontrol, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No: 62, 2000.
- [3] W. A Shewhart. "Quality control charts." The Bell System Technical Journal vol.5, no 4, pp. 593-603, 1926.

- [4] D. S. Bai, I. S. Choi, “ $\bar{X}$  and R control charts for skewed population”, *Journal of Quality Tecnology*, 27(2), 305-701, 1995.
- [5] Y. S. Chang, D. S. Bai, “Control charts for positively-skewed populations with weighted wtandard deviations”, *Quality and Reliabilite Engineering İnternational*, 17(5), 397-406, 2001.
- [6] L K. Chan, H. J. Cui, “Skewness correction  $\bar{X}$  and R charts for skewed distributions”, *Naval Research Logistics*, 50, 1-19, 2003.
- [7] B. Kan, B. Yazıcı, “The Individualls Control Charts for Burr Distributed Data”, *Proceedings of the 9th WSEAS Interntional Conference on Applied Mathematics*, 645-649, 2006.
- [8] B. Yazıcı, B. Kan, “Asymmetric control limits for small samples”, *Qual Quant*, 43, 865-874, 2009.
- [9] D. Karagöz, C. Hamurkaroğlu., “Control charts for skewed distributions: Weibull, Gamma, and Lognormal”, *Metolodoloski Zvezki*, 9(2), 95-106, 2012.
- [10] B. Srinivasa Rao, R. R. L. Kantam, “Mean and range charts for skewed distributions—a comparison based on half logistic distribution”, *Pakistan Journal of Statistics*, 28(4), 2012.
- [11] M. C. Priya, R. R. Kantam, “Variable control charts-linear failure rate distribution”, 13(4), 715-726, 2017.
- [12] Karagöz, D., “Robust  $\bar{X}$  control chart for monitoring the skewed and contaminated process. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(1), 223-242,2018.
- [13] N. Turhan, N., S.Y. Öncel, “Süreç ortalamasının izlenmesi için sıra istatistiklerine dayalı kalite kontrol kartları”, *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, 12(2), 72-89,2019.
- [14] Birgören, B., *İstatistiksel Kalite Kontrolü*, Nobel Yayınevi, Ankara, 2.Baskı, 2017.
- [15] Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, New York, John Wiley & Sons, 1995.
- [16] K. Pearson, “Contributions to the mathematical theory of evolution II. Skew variation in homogeneous material”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 186, 343–414, 1895.
- [17].M. F.Hossain, M.A.S.A Adnan, A new approach to determine the asymmetry of a distribution, pp 127-134, in *Applied Statistics Research Progress*, Editor M. Ahsanullah, New York Nova Science Publishers, 2007.
- [18] H. L. MacGillivray, “Skewness and asymmetry: measures and orderings”. *The Annals of Statistics*, 14(3), 994-1011, 1986.
- [19] A. L. Bowley, *Elements of Statistics*. New York: Charles Scribner’s Sons, 1901.
- [20] F. N. David, N. Johnson, "Some tests of significance with ordered variables." *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 18.1, 1-31, 1956.
- [21] P. K. Mohanty, S. K. Patel, *Basic Statistics*, Scientific Publishers, 2016.
- [22] D. P. Doane, L. E. Seward, “Measuring skewness: a forgotten statistic?”, *Journal of Statistics Education*, 19(2), 2011.
- [23] P. R. Tadikamalla, D. G. Popescu, “Kurtosis correction metod for  $\bar{X}$  and R control charts for long-tailed symmetrical distributions”, *Naval Research Logistics*, 54(4), 371-383, 2007.
- [24] E. A. Cornish, R. A Fisher, “ Moments and cumulants in the specification of distributions”, *Revue de l'Institut international de Statistique*, 307-320, 1938.
- [25] Öztürk, F., *Polinom İnterpolasyonu*, Sayısal Analiz ders notu, Ankara Üniversitesi, URL: <http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist310/Ders3/interpolasyon.pdf> (Erişim zamanı: Ocak, 31, 2020).
- [26] Özarslan, Handan, “Çarpık Dağılımlar için Shewhart Kontrol Grafikleri”, *Yüksek Lisans Tezi*, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Kırıkkale, 2018.