



Portföy seçimi için ortalama-varyans-çarpıklık modeli

Barış Altaylıgil¹

*Ekonometri Bölümü, İktisat Fakültesi
İstanbul Üniversitesi, İstanbul, Türkiye*

Özet

Bu makalemizde, finansal yatırım araçları arasından optimal portföy seçimi için önce çarpıklığı dikkate alan ortalama-varyans-çarpıklık (MVS) modeli daha sonra iyi çeşitlendirilmiş bir portföy elde edebilmek için entropi ölçüsü ekleyerek oluşturduğumuz ortalama-varyans-çarpıklık-entropi (MVSE) modeli tanıtılmaktadır. MVS ve MVSE’de, geleneksel çarpıklık formüllerinin kullanılması yerine daha dayanıklı ve hesaplanması daha kolay olan Pearson çarpıklık ölçüsü kullanılmıştır. Her iki model, İMKB-30’da yer alan hisse senetleri arasından portföy oluşturmak için kullanılmış ve elde edilen sonuçlar Markowitz’in ortalama-varyans (MV) modeli ile karşılaştırılmıştır. MVS modeli ile, MV modelinden daha etkin portföylerin seçilebileceği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Markowitz Portföy Teorisi, Ortalama-Varyans, Çarpıklık, Entropi, Portföy Seçimi*

Mean-variance-skewness model for portfolio selection

Abstract

In this paper, mean-variance-skewness (MVS) model is proposed first for optimal portfolio selection from financial assets, and then mean-variance-skewness-entropy (MVSE) model by adding entropy measure is proposed in order to obtain well diversified portfolio. In MVS and MVSE, Pearson skewness measure which is robust and easy to calculate than traditional skewness measures is used. Both models are used in İMKB-30 for portfolio selection and the results are compared with Markowitz mean-variance (MV) model. It is showed that more efficient portfolios can be selected by MVS model than MV model.

Keywords: *Markowitz Portfolio Theory, Mean-Variance, Skewness, Entropy, Portfolio Selection.*

1. Giriş

Yatırım amaçlı bir portföy oluştururken izlenebilecek en makul strateji, belli bir getiri düzeyinde, portföy riskini minimum yapmaya çalışmaktır. Fakat finansal yatırım araçlarının getirisi arttıkça, riskinin de arttığı bilinmektedir. Bu yüzden yatırım yapılması düşünülen finansal araçların hangi ağırlıklarla portföye alınması gerektiğine karar vermek son derece önem kazanmaktadır. Portföyde yer alacak finansal yatırım araçlarının ağırlıkları öyle belirlenmelidir ki bu ağırlıklar bir yandan belli bir getiri düzeyini sağlamalı diğer yandan riski minimuma indirmelidir. Markowitz [1] ünlü çalışmasında bir portföyün getirisi ile riski arasındaki bu ilişkiyi ortalama-varyans (**MV**) modeli olarak adlandırmış ve belli getiri düzeylerinde, portföy varyansını minimum yapan tüm mümkün etkin portföyleri bulmuştur.

Markowitz’in [1] ortalama-varyans modeli, portföy oluşturmak için en çok kabul gören model olmasına rağmen, bünyesinde barındırdığı bazı eksikliklerden dolayı revizyona

¹ ybaris@istanbul.edu.tr (B. Altaylıgil)

ihtiyacı olduğu düşüncesi hızla yayılmaktadır. **MV** modeline dönük ilk eleştiriler; ağırlık tahminlerini örnekten elde edilen ilk iki momente dayandığı, bu yüzden istatistik tahmin hatası yapmasının muhtemel olduğu şeklindedir. Örnek ortalama ve kovaryansta oluşan bu istatistiksel hataların portföyde yer alan ağırlıkları kolaylıkla değiştirip portföyü bazı yatırımlar üzerinde yoğunlaştırdığı düşünülmektedir. Bu durum portföyün genellikle birkaç yatırım üzerinde aşırı derecede yoğunlaşmasına neden olmaktadır ki bu sonucun Sung Yong Park [2] tarafından portföy çeşitlendirmesi amacına taban tabana zıt olduğu gösterilmektedir. Jorion [3] bu istatistiksel hataları düzeltmek için "shrinkage tahmincileri" kullanmayı önermiştir fakat shrinkage tahmincileri ampirik Bayesçi yaklaşıma dayandığı için önsel uygun dağılımların belirlenmesi üstesinden gelinmesi zor bir başka problemi beraberinde getirmektedir. Shrinkage tahminciler yerine istatistik hatalara karşı Anil ve Park [4] çapraz entropiyi kullanmayı önermişlerdir. Çapraz entropinin Türkiye'de finansal yatırım araçları için bir uygulaması da Altaylıgil [5] tarafından yapılmıştır. Uygulamalar özellikle küçük örneklerde çapraz entropiyi kullanan tahmin modellerinin istatistiksel hatalara rağmen uygun portföy çeşitliliğini sağladığını göstermektedir.

MV modeline yöneltilen ikinci eleştiri ise ilk iki momentin dışında üçüncü momentin de portföy seçiminde kullanılması gerektiği şeklindedir. Aslında bu düşünce yeni değildir. Markowitz'in [1] üçüncü momentin kullanılabileceğini ama yine de en uygun portföyün ilk iki momente dayanan etkin ortalama-varyans portföyü olduğunu söylemiştir. Markowitz **MV** modelinin uygulanmasını iki önemli varsayıma dayandırmıştır; bunlardan ilki getirilerin normal dağılması ve ikincisi ise amaç fonksiyonun ikinci dereceden olmasıdır. Samuelson [6] portföy seçiminde ilk iki momentin dışında daha yüksek dereceden momentlerin kullanılabileceğini ileri sürmüştür fakat bu düşüncenin ampirik bulgular ile desteklenmesi 1990'lara kadar ertelenmiştir. Bunun ertelenişinin sebepleri arasında, finansal yatırım araçlarının getirilerinin normal dağıldığına inanılması, normal dağılmasa bile ortalama-varyans yaklaşımının yeterli olduğunun düşünülmesi [7], yüksek dereceden momentlerin kullanılmasıyla elde edilen çözümlerinin, **MV** modeli ile hemen hemen aynı olması, bu yüzden yüksek dereceden momentlerin kullanılmasına gerek olmadığına [8] düşünülmesi gösterilebilir. Kono [9] dönemin bu etkili görüşlerinin, üçüncü moment üzerine yapılacak çalışmaların cesaretini kırdığını düşünmektedir.

Üçüncü momentin portföy seçimi sırasında etkilerini ampirik olarak araştırmamanın 1990'lara kadar ertelenmesinin bir diğer önemli sebebi, teknik yetersizlik olmuştur. Çünkü üçüncü momentin hesaplanması onlarca yatırım aracı söz konusu olduğunda bugünün bilgisayarlarının hesaplama sınırlarını bile zorlayan çok fazla işlem yükü gerektirmektedir.

Son yıllarda portföy seçiminde yüksek mertebeden momentlerin kullanılması daha da fazla ilgi görmektedir. Hisse senedi getirilerinin normal dağılmadığını gösteren yeteri kadar ampirik sonucun birikmesi ve getirilerin aralarındaki ilişkilerin sadece korelasyon ile ifade edilmesinin eksik kalacağına düşünülmesi bu ilgiyi artırmaktadır. Konno et.al., [10], Pornchai et.al., [11] Liu, Wang ve Qui [12] Harvey et.al., [13] Jana et.al., [14]'nin çalışmaları bu konuda yapılmış çalışmalardan sadece bir kaçını oluşturmaktadır. Bu çalışmaların önemli bir kısmı portföy getiri dağılım kuyruklarının özellikle sol kuyruğun zayıf veya şişman olmasının kontrol edilebilmesi üzerinedir.

Bu çalışmanın öncelikli amacı **MV** modeline yöneltilen eleştiriler doğrultusunda modelde üçüncü momentin kullanılmasının yatırımcıya ilave bir bilgi sağlayıp sağlamadığını araştırmaktır. Bu doğrultuda Pearson çarpıklık ölçüsünün **MV** modelinde bir kısıt olarak kullanılması önerilmiştir. Makalenin bir diğer amacı ise portföy çeşitliliğinin entropi ölçüsü ile daha iyi sağlanıp sağlanmadığını araştırmaktır.

Bu çalışmada önce Markowitz'in **MV** modeli hatırlatılmış, ardından çarpıklık ve entropi ölçüsünün **MV** modeline eklenmesiyle oluşturulan **MVS** ve **MVSE** modelleri tanıtılmıştır.

Ardından her üç yöntemin birbirlerine göre üstünlük veya zayıflıkları Monte Carlo deneyleri ile karşılaştırılmıştır.

2. Markowitz Modeli (MV)

Markowitz [1] ortalama-varyans modeli, portföy getirisi belli bir değerde sabit tutulup, bu kısıt altında portföy riskini minimum yapan ağırlıkların bulunmasından oluşmaktadır.

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ portföyde yer alan yatırımların ağırlık vektörü

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$ portföyde yer alan yatırımların ortalama getiri vektörü

Σ yatırımların varyans kovaryans matrisi,

μ_0 belli bir getiri düzeyi

$\mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}$ portföy getiri serisi

$\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}$ portföy varyansı,

$\mathbf{1}'$ bileşenleri bir olan vektör

olmak üzere amaç fonksiyonu

$$\min_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}) \quad (1)$$

kısıtlar

$$\mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \quad (2)$$

$$\mathbf{p}'\mathbf{1} = 1, \quad p_k \geq 0 \quad (3)$$

olmak üzere **MV** modeli, getirilerin ortalaması ve varyans-kovaryans matrisi biliniyorken, risk ile getiri arasında bir paylaşırma yapmaktadır. Model yatırımcıya, yüksek getiriye karşılık yüksek risk veya düşük risk için düşük getiri sağlayacak ağırlıkları bulmaktadır. **MV** modeli kullanılarak tahmin edilen farklı getiri ve risk değerlerinin oluşturduğu sıralı ikililerin kartezyen düzlemdeki geometrik yeri bir elipse karşılık gelmektedir. Bu elips aşağı konkav bir eğri ile üstten sınırlanmaktadır ve ortalama-varyans etkin sınırı olarak bilinmektedir. Etkin sınır üzerinde yer alan noktalar, belli bir risk değeri için maksimum getiri düzeyini göstermektedir. Etkin sınır eğrisi boyunca yer alan noktaları kendi aralarında kıyaslamak öznel bir karar alma sürecidir. Söz gelimi, etkin sınır eğrisi üzerinde sağa doğru ilerlemek, daha yüksek getiri için daha yüksek bir riski göze almak anlamına gelmektedir.

3. Ortalama-Varyans-Çarpıklık Modeli (MVS)

Üçüncü moment portföy seçiminde farklı şekillerde kullanılmıştır. Sözelimi Kono [10] üçüncü momenti, tek başına amaç fonksiyonu olarak, Harvey [13] ise ilk üç momentten oluşan bir fayda fonksiyonunun içerisinde kullanmıştır. Lui [12] ve Jana [14] portföy getirisini ve portföyün üçüncü momentini maksimum, portföy varyansını minimum yapan çok amaçlı modeller içinde kullanmışlardır. Söz konusu çalışmalarda çarpıklık, γ_{ijk} getirilerin merkezi üçüncü momentini göstermek üzere cebirsel olarak

p_k k. yatırımın portföydeki ağırlığı,

μ_k k. yatırımın ortalama getirisi,

$$Y_{ijk} = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)(r_k - \mu_k)] \quad i, j, k = 1, 2, 3, \dots, K$$

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K Y_{ijk} \cdot p_i \cdot p_j \cdot p_k \quad (4)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Çok fazla sayıda yatırım aracı ve büyük örneklemeler kullanılmak zorunda kalındığında (4) numaralı formülü hesaplamak oldukça zorlaşmaktadır. Örneğin uygulama bölümünde portföy seçimi için kullandığımız 508 günlük 28 adet hisse senedi için önce Y_{ijk} hesaplanması ardından çarpıklık için 28³ adet işlem yapılması gerekmektedir. Gözlem sayısı 1000'leri aştığında bu durum çok zaman isteyen bir işlem yüküne dönüşmektedir. Gerek işlem yükünün fazla olması gerekse optimizasyonlarda çözüm bulabilmek adına konkavlığın sağlanabilmesi için (4) numaralı denklemin kendisi yerine lineer bir yaklaşımının kullanılması genel kabul görmektedir [10].

Bu durum göz önünde bulundurulduğunda çarpıklığın hesaplanması için çok değişkenli (4) formülü yerine portföy getiri serisinin çarpıklığının minimize edilmesinin uygun olduğu düşünülmüştür. Portföy getiri serisini negatif çarpık yapacak ağırlıkların aranması pozitif getirili yatırımların seçilme olasılığını arttıracak için bu durumun yatırımcıya ilave bir bilgi sağlayacağını düşünülmüştür. Bu yanılla portföy getiri serisinin çarpıklığını hesaplamak için özellikleri bakımından daha dayanıklı (robust) olan Pearson çarpıklık ölçüsünün kullanılması uygun bulunmuştur. Pearson çarpıklık ölçüsü medyan fonksiyonunu kullandığı için diğer çarpıklık ölçülerine göre nispeten daha dayanıklı kabul edilebilir diye düşünülmüştür. Bu çalışmada Pearson ölçüsünü önermemizin bir diğer nedeni ise fonksiyonel yapısı itibarıyla Sharpe oranına olan benzerliğidir. Bilindiği gibi Sharpe [15] oranı, portföy getiri ortalamasının risksiz bir getiri oranından farkının, portföy standart sapmasına bölünmesi ile hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuç riskten arındırılmış getiri oranını göstermektedir. Pearson çarpıklık ölçüsü formülünde, risksiz getiri oranı yerine, portföy getiri serisinin medyanı kullanılmaktadır. Bu ise bir anlamda dayanıklı bir Sharpe oranı ölçüsü hesaplamak anlamına gelmektedir. Pearson çarpıklık ölçüsünün eksi bir değer alması negatif çarpıklığı gösterdiği için önerdiğimiz portföy seçim modelinde Pearson çarpıklık ölçüsünün sıfırdan ufak bir değer alması bir kısıt olarak kullanılmıştır. Önerdiğimiz ortalama-varyans-çarpıklık portföy seçim modeli **MVS**,

r_k k. yatırımın getiri vektörü

$R = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ sütunları k adet getiri vektörü olan getiri matrisi

$p = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ portföyde yer alan yatırımların ağırlık vektörü

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$ portföyde yer alan yatırımların ortalama getiri vektörü

Σ yatırımların varyans kovaryans matrisi,

μ_0 belli bir getiri düzeyi

Rp portföy getiri serisi

$\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}$ portföy varyansı,

$\overline{R\mathbf{p}}$ portföy getiri serisinin ortalaması

$\tilde{R\mathbf{p}}$ portföy getiri serisinin medyanı

$3 \times (\overline{R\mathbf{p}} - \tilde{R\mathbf{p}}) / \sqrt{\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}}$ Pearson çarpıklık ölçüsü

$\mathbf{1}'$ birler vektörü olmak üzere

$$\min_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}) \quad (5)$$

amaç fonksiyonunun,

$$\mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \quad (6)$$

$$3 \times (\overline{R\mathbf{p}} - \tilde{R\mathbf{p}}) / \sqrt{\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}} < 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{p}'\mathbf{1} = 1, \quad p_k \geq 0 \quad (8)$$

kısıtları altında optimizasyonuna dayanmaktadır. Çarpıklığın arttırılmasının portföy çeşitlendirmesini daha azaltacağı düşünüldüğü için çeşitlendirmeyi gözeten yeni bir modelin önerilmesi uygun bulunmuştur. Bu model entropi ölçüsünün modele katılmasıyla elde edilmiştir.

4. Ortalama-Varyans-Çarpıklık-Entropi Modeli (MVSE)

MV modeliyle portföy oluşturulmak istendiğinde portföyün genellikle birkaç finansal yatırım aracı ile kendisini sınırladığı bilinmektedir. Modele çarpıklık bir kısıt olarak eklendiğinde bu durumun daha da belirginleşmesi beklenen bir durumdur. Belli bir getiri düzeyinde Shannon [16] entropi ölçüsünün **MVS**'nin amaç fonksiyonuna eklenmesiyle bu durumun bir ölçüde azalacağı düşünülmüştür. Shannon Entropi ölçüsü $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ portföy ağırlık vektörü olmak üzere

$$-\mathbf{p}' \log(\mathbf{p}) \quad (9)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Shannon entropi ölçüsünü maksimum yapmaya çalışmak, portföy ağırlıklarının tek düze dağılıma yakınsatmak anlamına gelmektedir [17]. Bu yüzden belli bir getiri oranı kısıtı altında entropi ölçüsü maksimum yapıldığında iyi çeşitlendirilmiş bir portföy elde etmenin mümkün olduğu düşünülmektedir. Bu bakış açısıyla önerdiğimiz ikinci portföy seçim modeli,

\mathbf{r}_k k. yatırımın getiri vektörü

$R = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k)$ sütunları k adet getiri vektörü olan getiri matrisi

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ portföyde yer alan yatırımların ağırlık vektörü

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$ portföyde yer alan yatırımların getiri ortalaması vektörü

Σ yatırımların varyans kovaryans matrisi,

μ_0 belli bir getiri düzeyi

$\mathbf{p}'R'$ portföy getiri serisi

$\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}$ portföy varyansı,

$\overline{R\mathbf{p}}$ portföy getiri serisinin ortalaması

$\tilde{R\mathbf{p}}$ portföy getiri serisinin medyanı

$3 \times (\overline{R\mathbf{p}} - \tilde{R\mathbf{p}}) / \sqrt{\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}}$ Pearson çarpıklık ölçüsü

$-\mathbf{p}' \log(\mathbf{p})$ Shannon entropi ölçüsü

$\mathbf{1}'$ bir vektörü olmak üzere

$$\min_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p} + \mathbf{p}' \log(\mathbf{p})) \quad (10)$$

amaç fonksiyonu

$$\mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \quad (11)$$

$$3 \times (\overline{R\mathbf{p}} - \tilde{R\mathbf{p}}) / \sqrt{\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}} < 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{p}'\mathbf{1} = 1, \quad p_k \geq 0 \quad (13)$$

kısıtları altında optimizasyonuna dayanmaktadır.

5. MV, MVS ve MVSE İle Portföy Seçimi

Her üç modeli karşılaştırabilmek için İMBK-30'da yer alan hisse senetleri arasından bir portföy oluşturma uygulaması yapılmıştır. 18 Kasım 2005 ile 28 Mart 2008 tarihleri arasından 509 gün uzunluğunda 28 hisse senedi kullanılmıştır. Hisse senetleri düzeltilmiş kapanış fiyatları piyasalara dönük, finansal hizmet veren <http://analiz.ibsyazilim.com> çevrimiçi sitesinden alınmıştır. Uygulamada kullanılan hisse senetleri İMKB'de kullanılan kısaltmalarıyla sırasıyla AKBNK, ARCLK, DENIZ, DOAS, DOHOL, DYHOL, EREGL, FINBN, GARAN, HURGZ, ISCTR, ISGYO, KCHOL, MIGRS, PETKM, PTOFS, SAHOL, SISE, SKBNK, TCELL, THYAO, TOASO, TSKB, TUPRS, ULKER, VAKBN, VESTL, YKBNK'den oluşmaktadır. Yatırım araçlarının özet istatistikleri Tablo 1'de verilmiştir. Hisse senetlerinin hesaplanan getiri ortalamaları incelendiğinde DOAS, GARANTİ, MİGROS, PTOFS, TCELL, TOASO ve TUPRS getiri ortalamalarının sıfırdan büyük geri kalan hisse senetlerinin ortalamalarının ise sıfırdan küçük olduğu diğer bir ifadeyle uzun dönemde zarar ettikleri görülmektedir.

Tablo 1: Hisse Senetleri Özet İstatistikleri

	AKBNK	ARCLK	DENIZ	DOAS	DOHOL	DYHOL	EREGL	FINBN	GARAN	HURGZ	ISCTR	ISGYO	KCHOL	MIGRS
Ortalama	-0.000999	-0.000895	-0.000115	0.0000386	-0.00212	-0.00115	0.000165	-0.0000157	0.000647	-0.00168	-0.00143	-0.00184	-0.000908	0.000901
Varyans	0.00106	0.000704	0.000587	0.00132	0.00199	0.00110	0.00139	0.000623	0.000983	0.000942	0.00123	0.00109	0.000922	0.000768
AKBNK	1.000	0.4476	0.1820	0.5132	0.3936	0.4787	0.3425	0.04800	0.6536	0.5391	0.6205	0.5185	0.5446	0.3834
ARCLK	0.4476	1.00	0.1495	0.4329	0.3508	0.3738	0.2299	0.02285	0.4654	0.3842	0.4656	0.5312	0.4246	0.3176
DENIZ	0.1820	0.1495	1.000	0.1875	0.1263	0.1749	0.06906	0.1908	0.2307	0.1705	0.1911	0.1875	0.1444	0.07033
DOAS	0.5132	0.4329	0.1875	1.000	0.4185	0.5022	0.3415	-0.01874	0.5766	0.6194	0.5481	0.5823	0.5357	0.4762
DOHOL	0.3936	0.3508	0.1263	0.4185	1.00	0.4537	0.2835	0.004437	0.4894	0.4226	0.4550	0.4263	0.4379	0.3451
DYHOL	0.4787	0.3738	0.1749	0.5022	0.4537	1.00	0.2414	0.02038	0.5699	0.5332	0.4943	0.4382	0.4230	0.3604
EREGL	0.3425	0.2299	0.06906	0.3415	0.2835	0.2414	1.00	0.09771	0.3584	0.3161	0.2821	0.3033	0.3202	0.2912
FINBN	0.04800	0.02285	0.1908	-0.01874	0.004437	0.02038	0.09771	1.00	0.1023	0.03586	0.03856	0.007145	-0.02314	-0.01802
GARAN	0.6536	0.4654	0.2307	0.5766	0.4894	0.5699	0.3584	0.1023	1.000	0.6368	0.7316	0.5740	0.6156	0.4097
HURGZ	0.5391	0.3842	0.1705	0.6194	0.4226	0.5332	0.3161	0.03586	0.6368	1.000	0.5376	0.5334	0.5655	0.4532
ISCTR	0.6205	0.4656	0.1911	0.5481	0.4550	0.4943	0.2821	0.03856	0.7316	0.5376	1.00	0.5295	0.5517	0.4244
ISGYO	0.5185	0.5312	0.1875	0.5823	0.4263	0.4382	0.3033	0.007145	0.5740	0.5334	0.5295	1.00	0.5424	0.4119
KCHOL	0.5446	0.4246	0.1444	0.5357	0.4379	0.4230	0.3202	-0.02314	0.6156	0.5655	0.5517	0.5424	1.000	0.4738
MIGRS	0.3834	0.3176	0.07033	0.4762	0.3451	0.3604	0.2912	-0.01802	0.4097	0.4532	0.4244	0.4119	0.4738	1.000

	PETKM	PTOFS	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	THYAO	TOASO	TSKB	TUPRS	ULKER	VAKEN	VESTL	YKBNK
Ortalama	-0.000321	0.000209	-0.00112	-0.00190	-0.000962	0.000620	-0.000461	0.000887	-0.00245	0.000448	-0.00103	-0.00178	-0.00208	-0.00154
Varyans	0.000678	0.000887	0.00109	0.00201	0.00310	0.00103	0.000703	0.000739	0.00166	0.000682	0.000681	0.00181	0.000659	0.00266
PETKM	1.00	0.3381	0.4777	0.2877	0.2096	0.3582	0.5345	0.4012	0.4911	0.3987	0.5759	0.3551	0.5599	0.3128
PTOFS	0.3381	1.000	0.2909	0.2250	0.1710	0.3030	0.3031	0.3246	0.2970	0.2158	0.3700	0.2850	0.3626	0.1990
SAHOL	0.4777	0.2909	1.000	0.3318	0.2635	0.3949	0.4679	0.4678	0.5157	0.4261	0.4984	0.3939	0.5148	0.3094
SISE	0.2877	0.2250	0.3318	1.000	0.1807	0.3277	0.3162	0.3494	0.3609	0.3182	0.3144	0.2691	0.3377	0.2233
SKBNK	0.2096	0.1710	0.2635	0.1807	1.00	0.2024	0.3191	0.2762	0.3759	0.2238	0.2850	0.2337	0.3377	0.1722
TCELL	0.3582	0.3030	0.3949	0.3277	0.2024	1.000	0.4454	0.4580	0.4974	0.3724	0.4343	0.3863	0.4338	0.2743
THYAO	0.5345	0.3031	0.4679	0.3162	0.3191	0.4454	1.00	0.4200	0.5404	0.3620	0.5369	0.3643	0.5174	0.2781
TOASO	0.4012	0.3246	0.4678	0.3494	0.2762	0.4580	0.4200	1.000	0.4360	0.4033	0.5029	0.4080	0.4928	0.2633
TSKB	0.4911	0.2970	0.5157	0.3609	0.3759	0.4974	0.5404	0.4360	1.00	0.4581	0.5396	0.3968	0.5947	0.3423
TUPRS	0.3987	0.2158	0.4261	0.3182	0.2238	0.3724	0.3620	0.4033	0.4581	1.00	0.4666	0.3544	0.4644	0.2413
ULKER	0.5759	0.3700	0.4984	0.3144	0.2850	0.4343	0.5369	0.5029	0.5396	0.4666	1.000	0.4276	0.5531	0.3173
VAKEN	0.3551	0.2850	0.3939	0.2691	0.2337	0.3863	0.3643	0.4080	0.3968	0.3544	0.4276	1.000	0.4501	0.2635
VESTL	0.5599	0.3626	0.5148	0.3377	0.3377	0.4338	0.5174	0.4928	0.5947	0.4644	0.5531	0.4501	1.00	0.3552
YKBNK	0.3128	0.1990	0.3094	0.2233	0.1722	0.2743	0.2781	0.2633	0.3423	0.2413	0.3173	0.2635	0.3552	1.000

Toplam 509 günden oluşan hisse senedi fiyatlarına, f_t fiyat ve r_t getiri olmak üzere

$$r_t = \log\left(\frac{f_t}{f_{t-1}}\right)$$

logaritmik dönüşüm yapılarak, 508 günlük 28 adet hisse senedi getiri serisi oluşturulmuştur. Uygulamada şu portföy seçim modellerinin performansları karşılaştırılmıştır: Ortalama-varyans (**MV**), ortalama-varyans-çarpıklık (**MVS**) ve ortalama-varyans-çarpıklık-entropi (**MVSE**). Bütün modellerin performansları, hisse senetlerinin uzun dönemde tutulmasına göre düzenlenen bir senaryoda test edilmiştir. Dolayısıyla modellere ağırlık vektörünün sıfırdan büyük değerler alacağı kısıtı getirilmiştir.

6. Portföy Performans Ölçüleri

Portföy modellerinin performansları Sharpe Oranı (SR), Treynor Oranı (TR) ve Jensen Alfası (JA) ile ölçülmüştür. Performans ölçüleri, optimizasyondan elde edilen \hat{p} yatırım araçlarının ağırlık vektör çözümü, $\hat{\mu}$ getiri ortalaması vektör çözümü olmak üzere Sharpe oranı,

$$SR = \frac{\hat{p}'\hat{\mu}}{\sqrt{\hat{p}'\Sigma\hat{p}}}$$

portföy getirisinin, portföy, standart sapmasına bölünmesiyle hesaplanmaktadır. Yüksek SR değerleri, yüksek performans anlamına gelmektedir. Çünkü bu durum her birim riske (standart sapma) karşılık daha yüksek getiri elde edildiğini göstermektedir.

Treynor oranı

$$TR = \frac{\hat{p}'\hat{\mu}}{\beta_p}$$

portföy getirisinin, β_p portföy beta katsayısına bölünmesiyle bulunur. SR'den farklı olarak paydada portföy standart sapması yerine sistematik risk olarak bilinen portföy beta katsayısı bulunmaktadır. Sıfırdan büyük TR değerleri riskten arındırılmış getiri oranını gösterdiği için, portföyün başarılı olduğu anlamına gelmektedir.

Bir diğer performans ölçüsü Jensen Alfası, Sermaye Yatırımlarını Fiyatlama (CAPM) modelini kullanarak, yatırımcının pazar indeksinden daha başarılı olup olmadığına bakmaktadır. Burada önemli bir nokta pazar indeksinin seçimidir çünkü portföyün başarısı bu indeks ile karşılaştırılmaktadır. Uygulamada söz konusu pazar indeksi İMKB-30 olarak seçilmiştir.

\bar{r}_m , pazar indeksinin getiri ortalaması olmak üzere Jensen alfası

$$JA = \hat{p}'\hat{\mu} - \bar{r}_m \times \beta_p$$

şeklinde hesaplanmıştır. JA değerlerinin yüksek olması, CAPM modeli tarafından yatırımlar için gerekli görülen getiri miktarının aşılması anlamına gelmektedir.

β_p , portföy beta katsayısı olmak üzere, market getirileri ile portföy getirileri arasında yapılan regresyondan elde edilmektedir ve portföyün market getirileri ile ne kadar ilişkide olduğunu göstermektedir. Finansal elastikiyet olarak bilinen bu katsayı portföy getirilerinin market getirilerine karşı hassasiyetinin ölçüsü olarak kabul edilmektedir ve

$$E(r_{pk}) = \hat{p}'\hat{\mu} + E(r_m) \times \beta_p$$

regresyon modelinden hesaplanmaktadır. Yüksek beta değerleri, portföy ile market getirilerinin ilişkisinin gücünü göstermektedir.

Uygulamada her üç yöntem kullanılarak farklı getiri düzeylerinde minimum risk sağlayan portföyler oluşturulmuştur. Getiri düzeyleri 0 ile 0.00085 değerleri arasında 0.00005'lik adımlarla değiştirilmiştir. Getiri aralığının bu kadar dar ve artışların bu kadar ufak verilmesinin nedeni İMKB-30'da yer alan hisse senetlerinin getirilerinin çok küçük olmasıdır. Modeller bu aralığın dışında uygun p ağırlıklarının bulunması için çalıştırıldığında optimizasyonlar sonuçlandırılmamıştır.

Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4 incelendiğinde **SR** değerleri bakımından, **MVS** yöntemi **MV** ve **MVSE**'den daha başarılı bulunmuştur. Bu sonuca **MVS** yönteminde kullanılan çarpıklık kısıtının, **SR** ile benzer fonksiyonel bir yapıya sahip olmasının neden olduğu düşünülmektedir. Portföy getiri düzeyleri sırasıyla 0.0008 ve 0.00085 değerlerine yükseltildiğinde **MVSE**'nin, **MV**'den daha iyi sonuçlar elde ettiği görülmesine rağmen diğer tüm getiri düzeyleri için **MV**, **MVSE**'den daha başarılı çıkmıştır. **TR** ve **JA** değerleri bakımından da **MVS** en başarılı model bulunmuştur. Bütün getiri düzeyleri için **MVS**'nin **TR** ve **JA** değerleri en iyi olmak üzere sıralama **MV** ve **MVSE** şeklinde olmuştur. Her üç performans ölçüsü değerleri bakımından **MVS**, **MV** ve **MVS** sıralamasının değişmemesi olmaması her üç portföyünde iyi çeşitlendirildiğini gösteren bir ölçü olarak kabul edilmiştir.

Tablo 5'te aynı getiri düzeyleri için her üç model ile oluşturulan portföylerin standart sapmaları karşılaştırıldığında **MVS**, **MV** ve **MVSE** göre çok daha az riskli portföyler oluşturduğu görülmüştür. Bu son derece önemlidir çünkü bu sonuç aynı getiri oranına sahip bir portföyü **MVS** ile daha az risk taşıyarak tahmin etmenin mümkün olduğunu söylemektedir. Tablo 5'te verilen portföy getirileri ve bu getiri düzeylerine karşılık gelen standart sapmalar kullanılarak Şekil 1'de verilen her üç model için etkin sınır grafiği elde edilmiştir. Tablo 5'de elde edilen sonuçlar şekil üzerinde daha net gözükmemektedir. Burada dikkat edilmesi gereken diğer bir nokta **MVSE**'nin 0.0008 ve 0.00085 getiri düzeyleri için

MV'den daha etkin bir portföy olmasıdır. Bu değerler ışığında **MVS** ve **MVSE** ile daha etkin portföylerin oluşturulabileceği sonucuna varılmıştır.

Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4 farklı getiri düzeylerinde her üç modelin portföy oluşturmak için hisse senetlerine verdikleri ağırlıkların grafikleri verilmiştir. Grafikler üzerinde yer alan numaralar Tablo 6'da verilen kodlamalar dikkate alınarak okunabilir.

Her üç model de MIGRS ve TOASO hisse senetlerini, getiri oranı arttığında, artan ağırlıklarla portföylerinde bulundurmışlardır. Grafikler incelendiğinde bu artışlar **MV** de daha keskin nispeten **MV** daha az ama özellikle **MVSE**'de daha da yumuşaktır. DENİZ ve FINBN hisse senetleri **MV** ve **MVS** modellerindeki ağırlıkları getiri düzeyi arttıkça keskin bir şekilde düşmektedir. PTOFS, TCELL ve TUPRS hisse senetleri **MV** ve **MVS** portföylerinde, GARAN ve TUPRS hisse senetleri ise **MVSE** portföyünde önemli ağırlıklar ile temsil edilmektedir. Ayrıca **MVSE** modeli hisse senetlerinin ağırlıklarının entropi ölçüsünden dolayı daha yumuşak artış ve düşüşlere sahip olduğu grafiklerden görülmektedir.

Tablo 2: Farklı Portföy Getiri Düzeyleri İçin Sharpe Oranlarının Karşılaştırması

	MV	MVS	MVSE
0.	-1.83285×10^{-18}	9.60598×10^{-19}	0.
0.00005	0.00337831	0.00353749	0.00269284
0.0001	0.00674198	0.00706332	0.00538877
0.00015	0.0100809	0.0105566	0.00807936
0.0002	0.0134427	0.0139472	0.0107554
0.00025	0.0166012	0.0173838	0.0134068
0.0003	0.0200076	0.0206536	0.0160225
0.00035	0.0232907	0.0238285	0.01859
0.0004	0.0250479	0.026592	0.0210957
0.00045	0.0275133	0.0292658	0.0235238
0.0005	0.0298511	0.0314728	0.0258568
0.00055	0.0320346	0.0333024	0.0280749
0.0006	0.0338721	0.0348275	0.0301565
0.00065	0.0352345	0.0361253	0.0320791
0.0007	0.0356448	0.0371191	0.0338229
0.00075	0.03661	0.0378925	0.0353765
0.0008	0.0362268	0.0383972	0.0367441
0.00085	0.0375938	0.0385567	0.0379324

Tablo 3: Farklı Portföy Getiri Düzeyleri İçin Treynor Oranlarının Karşılaştırması

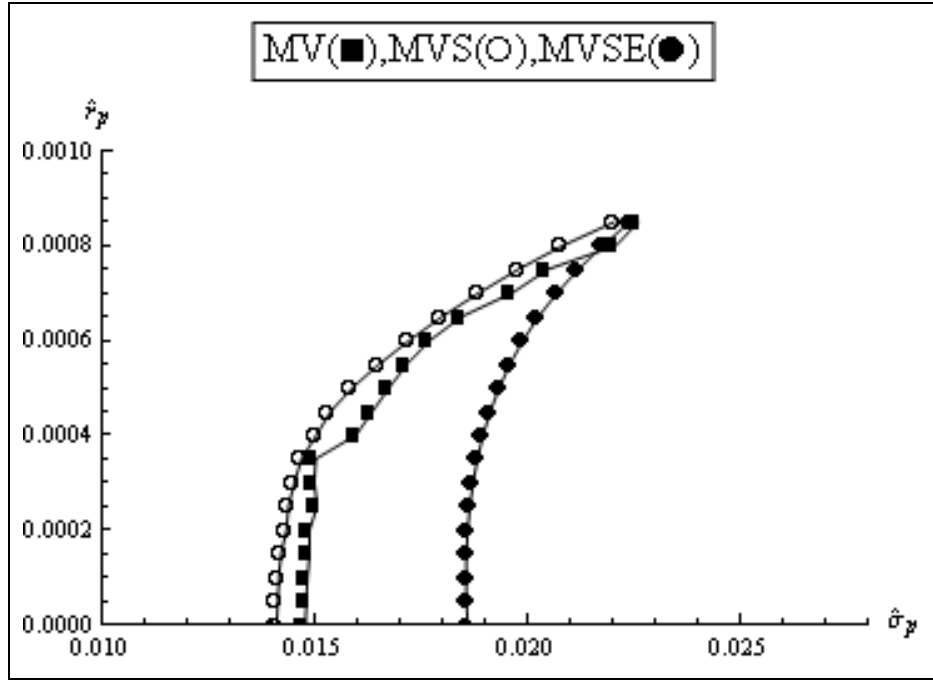
	MV	MVS	MVSE
0.	-4.86711×10^{-20}	2.92488×10^{-20}	0.
0.00005	0.0000898252	0.000107631	0.0000655155
0.0001	0.000179499	0.000215808	0.000131651
0.00015	0.00026903	0.000323826	0.00019828
0.0002	0.000362228	0.000426137	0.000265261
0.00025	0.000445738	0.000536718	0.000332431
0.0003	0.000551655	0.000637311	0.00039961
0.00035	0.000649999	0.000730411	0.000466596
0.0004	0.000673609	0.000795049	0.000533168
0.00045	0.000745121	0.000873396	0.000599091
0.0005	0.000817422	0.000932044	0.000664124
0.00055	0.000889657	0.000983934	0.000728044
0.0006	0.000953121	0.00103281	0.000790701
0.00065	0.00100006	0.00108094	0.000852132
0.0007	0.00100628	0.00112222	0.000912796
0.00075	0.0010569	0.00115529	0.000974096
0.0008	0.00107972	0.00118141	0.00103971
0.00085	0.00115064	0.00119971	0.00112032

Tablo 4: Farklı Portföy Getiri Düzeyleri İçin Jensen Alfasının Karşılaştırması

	MV	MVS	MVSE
0.	-0.0000755705	-0.0000628761	-0.000104114
0.00005	-0.0000255344	-0.0000130386	-0.0000535616
0.0001	0.000024402	0.0000371211	-3.07415×10^{-6}
0.00015	0.0000743404	0.0000871431	0.0000473438
0.0002	0.000125076	0.000136313	0.0000976872
0.00025	0.000173892	0.000186793	0.00014795
0.0003	0.000226205	0.000236123	0.000198127
0.00035	0.000276932	0.000284976	0.000248211
0.0004	0.00031942	0.000331729	0.000298195
0.00045	0.000368048	0.000380084	0.000348072
0.0005	0.000416996	0.000427204	0.000397837
0.00055	0.000466109	0.000474148	0.000447487
0.0006	0.000514577	0.000521168	0.00049703
0.00065	0.000561802	0.000568401	0.000546491
0.0007	0.000605605	0.000615357	0.000595937
0.00075	0.000653706	0.000661906	0.00064552
0.0008	0.000699457	0.000708112	0.000695588
0.00085	0.000749757	0.000753858	0.000747044

Tablo 5: Farklı Portföy Getiri Düzeylerinde MV, MVS ve MVSE Standart Sapmaları

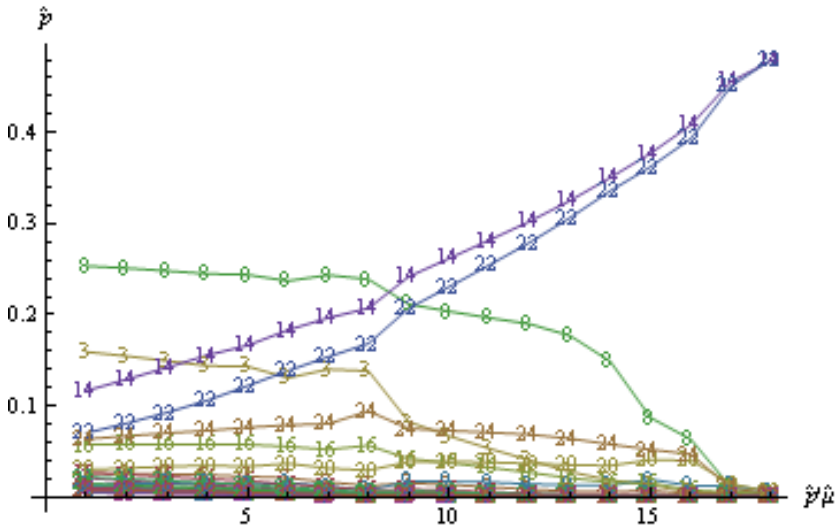
	MV	MVS	MVSE
0.	0.0147885	0.0141084	0.0185966
0.00005	0.0148003	0.0141343	0.0185678
0.0001	0.0148324	0.0141576	0.0185571
0.00015	0.0148796	0.0142092	0.0185658
0.0002	0.014878	0.0143398	0.0185953
0.00025	0.0150592	0.0143812	0.0186472
0.0003	0.0149943	0.0145253	0.0187237
0.00035	0.0150275	0.0146883	0.0188273
0.0004	0.0159694	0.0150421	0.0189613
0.00045	0.0163557	0.0153763	0.0191296
0.0005	0.0167498	0.0158867	0.0193373
0.00055	0.0171689	0.0165153	0.0195905
0.0006	0.0177137	0.0172278	0.0198962
0.00065	0.0184478	0.0179929	0.0202624
0.0007	0.0196382	0.0188582	0.020696
0.00075	0.0204862	0.0197929	0.0212005
0.0008	0.0220831	0.0208349	0.0217722
0.00085	0.0226101	0.0220455	0.0224083



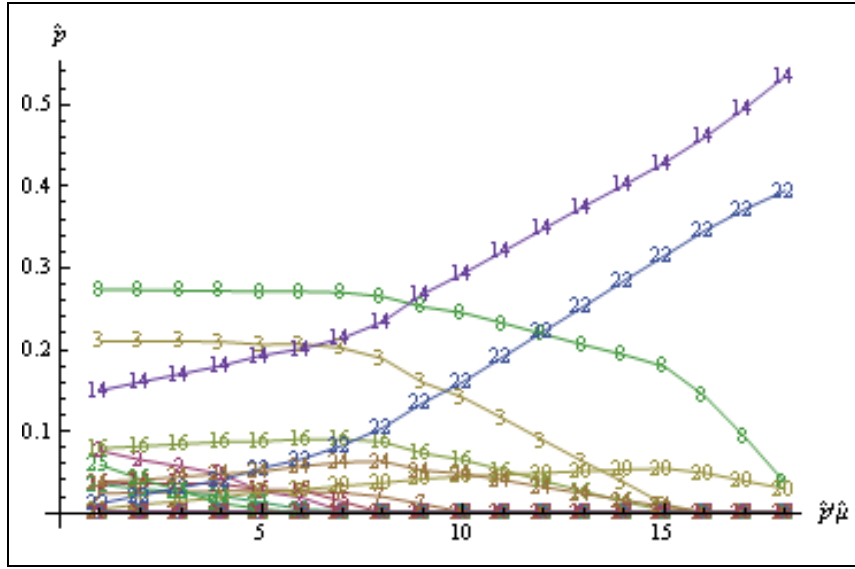
Şekil 1: MV, MVS ve MVSE'nin Etkin Sınırları

Tablo 6: Hisse Senetlerine Verilen Numaralar

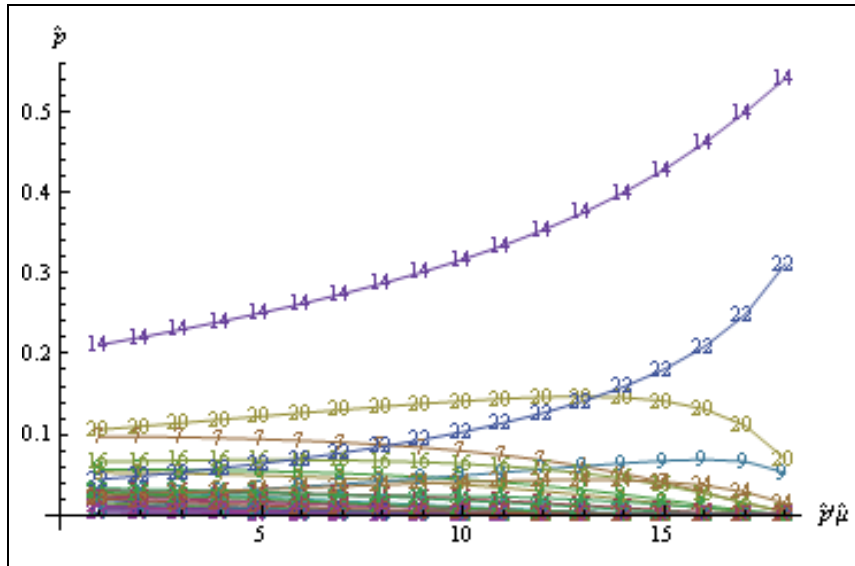
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
AKBNK	ARCLK	DENIZ	DOAS	DOHOL	DYHOL	EREGL	FINBN	GARAN	HURGZ	ISCTR	ISGYO	KCHOL	MIGRS
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
PETKM	PTOFS	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	THYAO	TOASO	TSKB	TUPRS	ULKER	VAKBN	VESTL	YKBNK



Şekil 2: Farklı Getiri Düzeylerinde MV ile Hesaplanmış Hisse Senedi Ağırlıkları



Şekil 3: Farklı Getiri Düzeylerinde MVS ile Hesaplanmış Hisse Senedi Ağırlıkları



Şekil 4: Farklı Getiri Düzeylerinde MVSE ile Hesaplanmış Hisse Senedi Ağırlıkları

7. Sonuç

MV yöntemi ile portföy seçimi sırasında amaç fonksiyonuna ilk iki momentin dışında özellikle üçüncü momentin (çarpıklığın) eklenmesi portföy optimizasyonunda eskiden beri süre gelen bir tartışma olmuştur. Özellikle son dönemde gelişmiş bilgisayarların da yardımıyla yapılan birçok amprik çalışmadan elde edilen bulgular **MV**'nin en iyi etkin sınır portföyü olmadığına dönük güçlü kanıtlar sunmaktadır. Üçüncü momentin portföy seçimine bir kısıt olarak eklenmesi çok sayıda değişken ve büyük örnekler söz konusu olduğunda çok ağır bir işlem yükünü de beraberinde getirmektedir. Bu yüzden çalışmalarda çarpıklığın bilinen formülü yerine genellikle lineer bir yaklaşımının kullanılması yaygınlık kazanmıştır. Bu çalışmamızda geleneksel çarpıklık formülü ve onun lineer yaklaşımlarını kullanmak yerine Pearson çarpıklık ölçüsünün başarıyla uygulanabileceği de gösterilmektedir. Elde edilen sonuçlar portföy getiri serisinin çarpıklığının Pearson çarpıklığı ile hesaplanmasının oldukça hızlı ve etkin bir yol

olabileceğine göstermektedir. Bir diğer önemli sonuç çarpıklığın yanı sıra entropi ölçüsünün **MVS** amaç fonksiyonuna eklenmesiyle elde edilen **MVSE** modelinin arzu edilen çeşitliliği sağlamasına rağmen etkin sınır eğrisinin diğer modellerinkinin daha sağında kaldığı diğer bir deyişle aynı getiri düzeyleri için daha fazla risk taşıdığıdır.

Kaynakça

- [1] H. Markowitz, Portfolio Selection, *Journal Of Finance*, 7, 77-91, (1952).
- [2] S.Y. Park, Essays On Entropy Principle With Applications To Econometrics And Finance, *University of Illinois*, p.51,(2007).
- [3] P. Jorion, Bayes-stein estimation for portfolio analysis, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 21:279-292, (1986).
- [4] K.B. Anil ve S.Y. Park Optimal Portfolio Optimization Using Maximum Entropy, *Econometric Review*, 27, 4-6, 484-512, (2008).
- [5] Y.B. Altaylıgil, Entropi Ölçüsü İle Portföy Seçimi, *İ.Ü. Sosyal Bilimler Dergisi*, Basım Aşamasında, 2, (2008).
- [6] P. Samuelson, The fundamental Approximation of Theorem of Portfolio analysis in terms of Means, Variance and higher Moments, *Review of Economic Studies*, 37, 537-542, (1970).
- [7] R. Merton, Optimum consumption and portfolio rules in continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413, (1971).
- [8] Y. Kroll, H. Levy, H. Markowitz, Mean-variance versus direct utility maximization, *Journal of Finance*, 39, 42-62, (1984).
- [9] H.Kono, T. Suzukia, D. Kobayashi, A branch and bound algoritm for solving mean-risk-skewness portfolio models, *Optimization Methods and Software*, (1998).
- [10] H. Kono, H. Shirakawa, H. Yamazaki, A mean absolute deviation skewness Portfolio Optimization Model, *Annals of Operations Research*, 45, 205-220, (1993).
- [11] M. Pornchai, D. Krishnan, H. Shahid ve J. P. Arun, Portfolio selection and skewness Evidence from from international Stock Markets, *Journal of Banking and Finance*, 21, 143-167, (1997).
- [12] S. Liu, S.Y. Wang ve W. Qui, Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs, *International Journal of Systems Science*, Vol. 34, March, (2003).
- [13] C.R. Harvey, J.C. Liechty, M.W. Liechty, Müller P. Portfolio Selection With Higer Moments, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=634141, 20 Temmuz, (2004).
- [14] K. Jana, T.K. Roy, S.K. Mazumder, Multi-objective mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization, *Advanced Modeling and Optimization*, 9, 1, (2007).
- [15] W.F. Sharpe, The Sharpe Ratio, *Journal of Portfolio Management*, 21, Fall, Issue 1 49-58 (1994).
- [16] C. Shannon, E. A Mahmematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423, (1948).
- [17] J.N. Kapur, H.K. Kesevan, *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, (1992).

EK 1 Portföy seçimi için Mathematica kodu

```
P = Map[Subscript[P, #] &, {"AKBNK", "ARCLK", "DENIZ", "DORS", "DOHOL", "DYHOL", "EREGL", "FINBN", "GARAN", "HURGZ", "ISCTR", "ISGYO", "KCHOL",
"MIGRS", "PETIKM", "PTOFS", "SAHOL", "SISE", "SKBNK", "TCELL", "THYAO", "TOASO", "TSKB", "TUPRS", "ULKER", "VAKBN", "VESTL", "YKBNK"}];
efnv = Table[0, {0}];
efmvs = Table[0, {0}];
efmvse = Table[0, {0}];
pfsvr = Table[0, {0}];
pftr = Table[0, {0}];
pfja = Table[0, {0}];
weightsmv = Table[0, {0}];
weightsmvs = Table[0, {0}];
weightsmvse = Table[0, {0}];
MK = 0.00085;
step = 0.00005;
For[nk = 0.0000, nk <= MK, nk = nk + step,
data = returns;
index = rimbk30;
μ = Mean[data];
Σ = SetPrecision[Covariance[data], 15];
resultsmv = FindMinimum[{P.Σ.P, μ.P == nk, Total[P] == 1, Apply[And, Thread[P >= Table[0, {1, 1, Length[P]}]]], P];
xoutputmv = Table[resultsmv[[2, i, 2]], {i, 1, Length[P]}];
Med[data_] := If[Mod[Length[data], 2] == 0, (Sort[data][[Length[data]/2]] + Sort[data][[Length[data]/2 + 1]])/2,
Sort[data][[Length[data] - Mod[Length[data], 2]]/2 + Mod[Length[data], 2]]];
resultsmvs = FindMinimum[{P.Σ.P, μ.P == nk, 3*(Mean[data.P] - Med[data.P])/√P.Σ.P < 0, Total[P] == 1, Apply[And, Thread[P >= Table[0, {1, 1, Length[P]}]]], P];
xoutputmvs = Table[resultsmvs[[2, i, 2]], {i, 1, Length[P]}];
resultsmvse = FindMinimum[{P.Σ.P + P.Log[P], μ.P == nk, (3*(Mean[data.P] - Med[data.P])/√P.Σ.P) < 0, Total[P] == 1, Apply[And, Thread[P >= Table[0, {1, 1, Length[P]}]]],
P];
xoutputmvse = Table[resultsmvse[[2, i, 2]], {i, 1, Length[P]}];
efnv = Append[efnv, {√xoutputmv.Σ.xoutputmv, nk}];
efmvs = Append[efmvs, {√xoutputmvs.Σ.xoutputmvs, nk}];
efmvse = Append[efmvse, {√xoutputmvse.Σ.xoutputmvse, nk}];
portfoliobetamv = Fit[Transpose[{index, data.xoutputmv}], {b}, b][[1]];
sratismv = (μ.xoutputmv)/√xoutputmv.Σ.xoutputmv;
tratismv = μ.xoutputmv/portfoliobetamv;
jensemvmv = μ.xoutputmv - Mean[index] + portfoliobetamv;
portfoliobetamvs = Fit[Transpose[{index, data.xoutputmvs}], {b}, b][[1]];
sratismvs = (μ.xoutputmvs)/√xoutputmvs.Σ.xoutputmvs;
tratismvs = μ.xoutputmvs/portfoliobetamvs;
jensemvmvs = μ.xoutputmvs - Mean[index] + portfoliobetamvs;
portfoliobetamvse = Fit[Transpose[{index, data.xoutputmvse}], {b}, b][[1]];
sratismvse = (μ.xoutputmvse)/√xoutputmvse.Σ.xoutputmvse;
tratismvse = μ.xoutputmvse/portfoliobetamvse;
jensemvmvse = μ.xoutputmvse - Mean[index] + portfoliobetamvse;
Print["n=", Dimensions[returns][[1]], ", ", "P_k' b_k=", nk];
pfsvr = Append[pfsvr, {sratismv, sratismvs, sratismvse}];
pftr = Append[pftr, {tratismv, tratismvs, tratismvse}];
pfja = Append[pfja, {jensemvmv, jensemvmvs, jensemvmvse}];
weightsmv = Append[weightsmv, xoutputmv];
weightsmvs = Append[weightsmvs, xoutputmvs];
weightsmvse = Append[weightsmvse, xoutputmvse];
Print["MV Weights"];
weightsmvttable = TableForm[Transpose[weightsmv], TableHeadings -> {P, Table[i, {i, 0, MK, step}]}];
Print[weightsmvttable];
Export["c:\\weightsmvttable.bmp", weightsmvttable, "BMP"];
Print["MVS Weights"];
weightsmvsstable = TableForm[Transpose[weightsmvs], TableHeadings -> {P, Table[i, {i, 0, MK, step}]}];
Print[weightsmvsstable];
Export["c:\\weightsmvsstable.bmp", weightsmvsstable, "BMP"];
Print["MVSE Weights"];
weightsmvsestable = TableForm[Transpose[weightsmvse], TableHeadings -> {P, Table[i, {i, 0, MK, step}]}];
Print[weightsmvsestable];
Export["c:\\weightsmvsestable.bmp", weightsmvsestable, "BMP"];
srtable = TableForm[pfsvr, TableHeadings -> {Table[i, {i, 0, MK, step}], {"MV", "MVS", "MVSE"}}];
Print[" P_k' b_k", " Sharpe Ratios"];
Print[srtable];
Export["c:\\srtable.bmp", srtable, "BMP"];
trtable = TableForm[pftr, TableHeadings -> {Table[i, {i, 0, MK, step}], {"MV", "MVS", "MVSE"}}];
Print[" P_k' b_k", " Treynor Ratios"];
Export["c:\\trtable.bmp", trtable, "BMP"];
Print[trtable];
jatable = TableForm[pfja, TableHeadings -> {Table[i, {i, 0, MK, step}], {"MV", "MVS", "MVSE"}}];
Print[" P_k' b_k", " Jansen Alpha"];
Print[jatable];
Export["c:\\jatable.bmp", jatable, "BMP"];
Print[" P_k' b_k", " σ"];
ef = TableForm[Transpose[{Transpose[efnv][[1]], Transpose[efmvs][[1]], Transpose[efmvse][[1]]}], TableHeadings -> {Table[i, {i, 0, MK, step}], {"MV", "MVS", "MVSE"}}];
Print[ef];
Export["c:\\ef.bmp", ef, "BMP"];
efgraph = ListPlot[{efnv, efmvs, efmvse}, Joined -> True, Frame -> False, PlotRange -> {{0.01, 0.028}, {0, 0.001}},
PlotStyle -> {{Thickness[0.003], Black}, {Thickness[0.003], Black}, {Thickness[0.003], Black}}, AxesLabel -> {"P_k", "P_k"}, PlotMarkers -> {■, ●, ○},
PlotLabel -> Style[Framed["MV (■), MVS (●), MVSE (○)"], 16, Black, Background -> Lighter[White]]];
Print[efgraph];
Export["c:\\efgraph.bmp", efgraph, "BMP"];
```