Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(ÖZEL SAYI-I),18-32
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 18-32
DOI: 10.18185/erzifbed.598364
Research Article

Dual Parametrik Eğrilerin Denklik Problemi

Nurcan DEMİRCAN BEKAR[1*], Ömer PEKŞEN[2]

[1] Türk Hava Kurumu Üniversitesi, Ankara, Türkiye
[2] Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Türkiye

Geliş / Received: 30/07/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

Öz

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $D=\{(a,a^*)=a+\varepsilon a^*, a,a^*\in\mathbb{R}, \varepsilon^2=0\}$ dual cebir olsun. D nin $D_1=\{(a,a^*), a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\}$ alt kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir grup oluşturur. Bir $A=a+\varepsilon a^*\in D_1$ elemanı ve $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümü için $S(A)=S_A=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}$ olmak üzere;

$ID_1^+=\left\{S_A=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}, a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$ ve $ID_1^-=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$ kümelerini tanımlayalım. $ID_1=ID_1^+\cup ID_1^-$ olsun. Ayrıca;

$\mathcal{M}ID_1^+=\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=S_AB+C, A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2\}$ ve

$\mathcal{M}ID_1^-=\left\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=(S_AW)B+C, A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2, W=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ olmak üzere;

$\mathcal{M}ID_1=\mathcal{M}ID_1^+\cup\mathcal{M}ID_1^-$ şeklinde tanımlayalım. $T=(a,b)$ $\mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olsun. Bir $\alpha:T\to\mathbb{R}^2$, $\forall t\in T$ için $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ şeklindeki $C^{(2)}$ *-fonksiyonuna* düzlemde bir parametrik eğri (yol) denir. G bir grup olsun. $\forall t\in T$ ve bir $F\in G$ için $\beta(t)=F\alpha(t)$ eşitliği sağlanıyorsa $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ iki parametrik eğriye (yollara) G *-denk eğriler* denir. $\alpha(t)\overset{G}{\sim}\beta(t)$ ile gösterilir. Bu çalışma $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayındaki parametrik eğriler (yollar) için $G=\mathcal{M}ID_1^+$, $\mathcal{M}ID_1$ gruplarına göre G *-denklik* probleminin çözümünü bulmaya yönelik bir çalışmadır.

Anahtar Kelimeler: Dual sayılar, parametrik eğri (yol), invariant.

The Equivalence Problem Of Dual Parametric Curves

Abstract

Let $\mathbb{R}$ be the field of real numbers and $D=\{(a,a^*)=a+\varepsilon a^*, a,a^*\in\mathbb{R}, \varepsilon^2=0\}$ be the algebra of dual numbers. The subset $D_1=\{(a,a^*), a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\}$ of D is an abelian group with respect to the multiplication operation in the algebra D. For an element $A=a+\varepsilon a^*\in D_1$ and a transformation $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ where

*Sorumlu Yazar: mdemircan@thk.edu.tr

$S(A)=S_A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}$, we define the sets $ID^+{}_1=\left\{S_A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}, a\neq 0, a, a^*\in\mathbb{R}\right\}$ and $ID^-{}_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a\neq 0, a, a^*\in\mathbb{R}\right\}$. Let us denote $ID_1=ID_1^+\cup ID_1^-$. Moreover, we denote the set

$\mathcal{MID}_1=\mathcal{MID}_1^+\cup\mathcal{MID}_1^-$ where

$\mathcal{MID}_1^+=\left\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=S_AB+C, A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2\right\}$ and

$\mathcal{MID}_1^-=\left\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=(S_AW)B+C, A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2, W=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. Let $T=(a,b)$ be an open interval of $\mathbb{R}$. A $C^{(2)}$*-function* $\alpha:T\to\mathbb{R}^2$ for $\forall t\in T$ where, $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ is called a parametrized curve (path) on the plane. Let G be a group. Two parametric curves (paths) $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are called G - *equivalent* if the equality $\beta(t)=F\alpha(t)$ is satisfied for an element $F\in G$ and all $t\in T$. Then, it is denoted by $\alpha(t)\overset{G}{\sim}\beta(t)$

This work is devoted to the solutions of problems of G-*equivalence* of parametric curves in Euclidean space $\mathbb{R}^2$ for the groups $G=\mathcal{MID}_1^+$, $\mathcal{MID}_1$.

Keywords: Dual numbers, parametric curve (path), invariant.

1. Giriş

İnvaryant teori ile ilgili çalışmalar 19. Yüzyılın ikinci yarısına dayanır ve invaryant teorinin gelişimi farklı alanları etkilemiştir. F. Klein, çalışması ile grup kavramının geometrilerin önemli yapı taşları olduğunu göstermiştir (Klein,1872). Bu çalışma verilen grup etkisi altında invaryant olan tüm özelliklerinden oluşmaktadır. Bunun yanında dual sayı kavramı William Kingdon Clifford tarafından ortaya çıkarılmış ve böylece yeni bir alanda bilimsel çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu çalışmanın temellerinden biri 2018 yılında yayınlanan 2-boyutlu Öklid Uzayı' nda Tüm Lineer Benzerlik Gruplar İçin Parametrik Eğrileri (yol) ve Eğrilerin Global İnvaryantları' çalışmasıdır (Khadjiev, vd. 2018). 2012 yılında 'Dual sayıların 2-boyutlu Dual Geometriye Uygulanması' başlıklı tez çalışmasında 2-boyutlu dual düzlem geometrisinin temel gruplarından biri olan ve grupları için denklik problemleri incelenmiş, önemli tanımlar yapılmış ve bulgular elde edilmiştir (Tomar, 2012). Bu çalışmalar ışığında dual cebir olmak üzere; nin alt kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir grup oluşturur. Buradan; $\mathcal{MID}_1$, $\mathcal{MID}_1^+$ grupları tanımlanmış bu gruplara göre iki parametrik eğrinin G-denklik kontrolü açısından basit ama etkili bir yöntemini bulmak amaçlanmıştır.

2. D Cebirinin Özellikleri

Tanım 2.1.

$D=\left\{(a,a^*)=a+\varepsilon a^*, a, a^*\in\mathbb{R}, \varepsilon^2=0\right\}$

kümesi üzerinde toplama işlemi

$(a,a^*)+(b,b^*)=(a+b,a^*+b^*)$ ile ve bir çarpma işlemi

$(a,a^*)\times(b,b^*)=(ab,ab^*+a^*b)$ ile

tanımlanırsa bu kümeye dual sayılar kümesi adı verilir. Bu küme bu iki işleme göre bir halka oluşturur. $A=(a,a^*)\in D$ dual sayısı $A=a+\varepsilon a^*$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Yani; $A=(a,a^*)=a+\varepsilon a^*$ dır. Ayrıca; $A=a+\varepsilon a^*\in D$ şeklindeki elemanlar

$A=\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}$ olarak da yazılırlar.

Tanım 2.2. $A=a+\varepsilon a^*\in D$ dual sayısı olsun. $|A|=a$ olarak tanımlanır. Burada $|.|$, D kümesinde lineer operatördür.

Önerme 2.1. $A=a+\varepsilon a^*\in D$ ve $B=b+\varepsilon b^*\in D$ olmak üzere; $|AB|=|A||B|$ dir.

Önerme 2.2. $A=a+\varepsilon a^*\in D$ ve $\overline{A}=a-\varepsilon a^*\in D$ 'ye A dual sayısının eşleniği denir ve $A+\overline{A}=2a\in\mathbb{R}$, $|A|^2=A\overline{A}=a^2\in\mathbb{R}$.

Önerme 2.3. $A=a+\varepsilon a^*\in D$, A^{-1} vardır. $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$. Ayrıca; $|A|\neq 0$, $A^{-1}=\dfrac{\overline{A}}{|A|^2}$ ve $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ dir.

$W=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere; $\overline{A}=WA=a-\varepsilon a^*$.

Önerme 2.4. $A=a+\varepsilon a^*\in D$ olmak üzere; $|WA|=|A|$ dır. $\forall A,B\in D$ olmak üzere; $|(WA)(WB)|=|A||B|=|AB|$ dir.

İspat: $A=a+\varepsilon a^*\in D$ olmak üzere; $|WA|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}\right|=a=|A|$ olup istenen elde edilir. Ayrıca; $\forall A,B\in D$ olmak üzere;

$$|(WA)(WB)|=\left|\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}\right)\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} ab \\ a^*b^* \end{pmatrix}\right|=ab=|A||B|=|AB|$$

elde edilir.

3. $\mathbb{R}^2$'de Bir Parametrik Eğrinin (Yolun) D_1 Grubuna Göre İnvaryantları

D nin $D_1=\{(a,a^*),a\neq 0,a,a^*\in\mathbb{R}\}$ alt kümesi $(a,a^*)\times(b,b^*)=(ab,ab^*+a^*b)$ ile tanımlanan çarpma işlemine göre bir değişmeli grup oluşturur.

Bir $A=a+\varepsilon a^*\in D_1$ elemanı için $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümü için $S(A)=S_A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}$ olmak üzere;

$$ID^+{}_1=\left\{S_A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}, a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$$ ve

$$ID^-{}_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, a\neq 0, a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $ID_1^+\cup ID_1^-$ kümesini ID_1 ile gösterelim. D_1 grubu

$$ID_1^+=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}, a\neq 0,\ a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$$ grubuna izomorftur. Öyle ki;

$$\varphi: D_1\to ID_1^+,\ a\neq 0, H=a+\varepsilon a^*\in D_1$$

$\varphi(H)=\varphi(a,a^*)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}$ olarak tanımlanan φ fonksiyonu bir grup izomorfizmasıdır. Aynı zamanda; $\forall B\in D$ olmak üzere; $S_AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab \\ a^*b+ab^* \end{pmatrix}$ dir.

Tanım 3.1. $A,B\in D$ olmak üzere; $B=HA$ olacak şekilde bir $H\in D_1$ varsa A ve B elemanlarına D_1- *denktir* denir ve $A\overset{D_1}{\sim}B$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. $A=\{A_1,B_1\}$ ve $B=\{B_1,B_2\}$ öyle ki; $B_1=HA_1$, $B_2=HA_2$ olacak şekilde $H\in D_1$ varsa A, B sistemlerine D_1-*denktir* denir ve $\{A_1, A_2\} \overset{D_1}{\sim} \{B_1, B_2\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.3. Bir $f : D^2 = D \times D \to D$ fonksiyonuna $\forall H \in D_1$ ve $\forall A_1, A_2 \in D$ için $f(HA_1, HA_2) = f(A_1, A_2)$ ise D_1- *invaryant fonksiyon* denir.

Tanım 3.4. Bir $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\forall H \in ID_1^+, \forall A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$ için $f(HA_1, HA_2) = f(A_1, A_2)$ ise f 'ye ID_1^+- *invaryant fonksiyon* denir.

Önerme 3.1. $\varphi : D^2 = D \times D \to D$ ve $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi(A_1, A_2) = f_1(A_1, A_2) + \varepsilon f_2(A_1, A_2)$ fonksiyonu D_1*-invaryanttır.* $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 ID_1^+ *-invaryanttır.*

Tanım 3.5. $A = a + \varepsilon a^* \in D$ $B = b + \varepsilon b^* \in D$ olmak üzere; $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a^* & b^* \end{pmatrix} = ab^* - a^* b = [AB]$ olarak gösterilir.

Önerme 3.2. $A, B \in D$, $A = a + \varepsilon a^*$ ve $|A| \neq 0$, $B = b + \varepsilon b^*$ olsun. Bu takdirde

$$i)\ BA^{-1} = \frac{|B|}{|A|} + \varepsilon \frac{[AB]}{|A|^2}$$

ve $S_{BA^{-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{|B|}{|A|} & 0 \\ \dfrac{[AB]}{|A|^2} & \dfrac{|B|}{|A|} \end{pmatrix}$ dır.

$$ii)\ \det(S_{BA^{-1}}) = \frac{|B|^2}{|A|^2} \text{ dır}$$

ve $\det(S_{BA^{-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$ dır.

İspat: $i)$ $|A| \neq 0$ olduğundan $a \neq 0$ dır. Dolayısıyla; A^{-1} vardır. $A^{-1} = \dfrac{\overline{A}}{|A|^2}$. $\overline{A} = a - \varepsilon a^*$ kullanılarak

$$BA^{-1} = \left(b + \varepsilon b^*\right) \frac{(a - \varepsilon a^*)}{a^2} = \frac{ab - \varepsilon b a^* + \varepsilon b^* a}{a^2}$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon(ab^* - a^* b)}{a} = \frac{|B|}{|A|} + \varepsilon \frac{[AB]}{|A|^2} \text{ elde edilir.}$$

$ii)$ $|A| \neq 0$ olduğundan

$S_{BA^{-1}} = \begin{pmatrix} \dfrac{|B|}{|A|} & 0 \\ \dfrac{[AB]}{|A|^2} & \dfrac{|B|}{|A|} \end{pmatrix}$ olup $\det(S_{BA^{-1}}) = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}$

elde edilir. $\det(S_{BA^{-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow |B|^2 \neq 0$ dır. Buradan $|B| \neq 0$ dır.

Önerme 3.3. $A \in D_1$, $B \in D$ olmak üzere;

$i)$ $f : D^2 \to D$

$$(A, B) \to f(A, B) = \frac{B}{A} = BA^{-1}$$

D_1 *-invaryanttır.*

$ii)$ $g : D^2 \to \mathbb{R}$

$$(A, B) \to g(A, B) = \frac{|B|}{|A|}$$

ID_1^+ *-invaryanttır.*

$iii)$ $h : D^2 \to \mathbb{R}$

$$(A, B) \to h(A, B) = \frac{[AB]}{|A|^2}$$

ID_1^+ *-invaryanttır.*

$iv)$ $k : D^2 \to \mathbb{R}$

$$(A, B) \to k(A, B) = \frac{[AB]^2}{|A|^4}$$

ID_1^+ *-invaryanttır.*

İspat: $i)$ $f : D^2 \to D$ ve $f(A, B) = \dfrac{B}{A}$, $A \in D_1$, $B \in D$ olmak üzere; $H \in D_1$ alalım. f fonksiyonunun D_1*-invaryantlığını* gösterelim:

$A \in D_1, B \in D, H \in D_1$ olmak üzere; $f(HA, HB) = \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{B}{A} = f(A, B)$ olup f fonksiyonu D_1*-invaryanttır.*

ii) ve *iii*) $A \in D_1, B \in D$ olmak üzere;

$$f(A,B) = \frac{B}{A} = BA^{-1} = \frac{|B|}{|A|} + \varepsilon \frac{[AB]}{|A|^2}$$ ve

$$f(HA,HB) = \frac{HB}{HA} = \frac{|HB|}{|HA|} + \varepsilon \frac{[(HA)(HB)]}{|HA|^2}$$

olur.

Biliyoruz ki; f fonksiyonu D_1 *-invaryanttır.* O halde; Önerme 2.1.' den $\dfrac{|B|}{|A|}$ ve $\dfrac{[AB]}{|A|^2}$ da ID_1^+ *-invaryanttır.*

iv) $\dfrac{[AB]}{|A|^2}$ ID_1^+ *-invaryant* ise; $\left(\dfrac{[AB]}{|A|^2}\right)^2$ ID_1^+ *-invaryanttır.*

Tanım 3.6. $A \in D_1, B \in D$ olmak üzere; $f: D^2 \to D$, $f(WA_1, WA_2) = f(A_1, A_2)$ ise f 'ye W *-invaryant* denir.

Önerme 3.4. *i*) $\forall A = a + \varepsilon a^* \in D$ için $|WA| = |A|$ ve $|WA|^2 = |A|^2$ dir.

ii) $A \in D_1, B \in D$ olmak üzere; $\dfrac{|WB|}{|WA|} = \dfrac{|B|}{|A|}$ dir.

iii) $A \in D_1, B \in D$ olmak üzere;

$$\frac{[(WA)(WB)]^2}{|WA|^4} = \frac{[AB]^2}{|A|^4}$$ dir.

İspat: *i*) Önerme 2.4. ten açıktır.

ii) Önerme 2.4. ve *i*) 'den açıktır.

iii) $\forall A = a + \varepsilon a^* \in D$ için $|WA| = |A|$ ve $(\det(W))^2 = 1$ kullanılarak;

$$\frac{[(WA)(WB)]^2}{|WA|^4} = \frac{\left(\det(W)[AB]\right)^2}{|A|^4}$$

$$= (det(W))^2 \frac{[AB]^2}{|A|^4} = \frac{[AB]^2}{|A|^4}$$ elde edilir.

Tanım 3.7. $A \in D_1, B \in D$ olmak üzere; $f(A,B)$ fonksiyonu D_1*-invaryant* ve W*-invaryant ise* $f(A,B)$ fonksiyonu $D_1 \cup W$*-invaryanttır.*

Önerme 3.5. *i*) $\dfrac{|B|}{|A|}$ fonksiyonu $D_1 \cup W$ *-invaryanttır.*

ii) $\dfrac{[AB]^2}{|A|^4}$ fonksiyonu $D_1 \cup W$ *-invaryanttır.*

İspat: *i*) Önerme 3.3. (ii) ve Önerme 3.4. (ii)' den açıktır.

ii) Önerme 3.3. (iv) ve Önerme 3.4. (iii)' den açıktır.

$G = ID_1^+$ *veya* ID_1 olmak üzere;

Tanım 3.8. $A = (A_1, A_2) \in D_1 \times D$, $B = (B_1, B_2) \in D_1 \times D$ olmak üzere; $B_1 = HA_1$, $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in G$ varsa A ile B 'ye $G-$*denk* denir ve $A \overset{G}{\sim} B$ ile gösterilir.

Tanım 3.9. Bir $f: D^2 = D \times D \to D$ fonksiyonuna $\forall H \in D_1$ ve $\forall A_1, A_2 \in D$ için $f(HA_1, HA_2) = f(A_1, A_2)$ ise G*-invaryant fonksiyon* denir.

Tanım 3.10. $T = (a,b)$ $\mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olsun. Bir $\alpha: T \to \mathbb{R}^2, \forall t \in T$ için $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ şeklindeki $C^{(2)}$*-fonksiyonuna* düzlemde bir parametrik eğri (T*-yol*) denir. $\alpha(t)$ bir T*-yol* ise $F \in G$ için $F\alpha(t)$ de $\mathbb{R}^2$ 'de bir T*-yoldur.*

Tanım 3.11. G bir grup olsun. $\forall t \in T$ ve bir $F \in G$ için $\beta(t) = F\alpha(t)$ olsun. Bu takdirde; $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ parametrik eğrilerine

G-*denk eğriler* denir ve $\alpha(t)\overset{G}{\sim}\beta(t)$ ile gösterilir.

Tanım 3.12. $\forall F\in G$, $\forall t\in T$ için $\alpha(t),\beta(t),...,\theta(t)$ sonlu sayıda T-*yollar* olmak üzere; eğer

$f(F\alpha(t),F\beta(t),...,F\theta(t))$

$=f(\alpha(t),\beta(t),...,\theta(t))$ sağlanıyorsa $\alpha(t),\beta(t),...,\theta(t)$ T-*yolların bir fonksiyonuna* G-*invaryant* denir.

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ $\mathbb{R}^2$'de bir T-*yol* olsun. $\alpha(t)$ 'nin 1. türevi $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$ dir. $\alpha(t)$ ve $\alpha'(t)$'nin determinantı

$$\det\begin{pmatrix} x(t) & x'(t)\\ y(t) & y'(t)\end{pmatrix}=\left[\alpha(t)\alpha'(t)\right] \text{dır.}$$

$\left|\alpha(t)\right|=x(t)$.

Tanım 3.13. $\mathbb{R}^2$'de bir T-*yol* $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ olsun. Eğer; $\forall t\in T$ için $\left|\alpha(t)\right|\neq 0$ ise yani $\forall t\in T$ için $x(t)\neq 0$ ise $\alpha(t)$'ye *c- regüler* denir.

Teorem 3.1. $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ $\mathbb{R}^2$'de bir *c-regüler* T-*yol* olsun.

i) $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t)$ T-*yolların* kümesi üzerinde D_1-*invaryanttır.*

ii) $\dfrac{\left|\alpha'(t)\right|}{\left|\alpha(t)\right|}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t)$ T-*yolların* kümesi üzerinde ID_1^+-*invaryanttır.*

iii) $\dfrac{\left[\alpha(t)\alpha'(t)\right]}{\left|\alpha(t)\right|^2}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t)$ T-*yolların* kümesi üzerinde ID_1^+-*invaryanttır.*

İspat:

$$ID^+_1=\left\{S_A=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}, a\neq 0, a, a^*\in\mathbb{R}\right\} \text{ ve}$$

Tanım 3.12 kullanılarak;

i) $f(\alpha(t))=\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ fonksiyonunun D_1-*invaryant* olduğunu gösterelim.

$F\in D_1$ olduğundan

$$F\alpha(t)=S_A\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \text{ yazılır.}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)\\ a^*x(t)+ay(t)\end{pmatrix}=ax(t)+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t))$$

$(F\alpha(t))'=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))$ dir.

$$f(F\alpha(t))=\frac{\left(F\alpha(t)\right)'}{\left(F\alpha(t)\right)}=\frac{ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))}{ax(t)+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t))}$$

$$=\frac{(ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t)))\left(ax(t)-\varepsilon(a^*x(t)+ay(t))\right)}{(ax(t)+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t)))\left(ax(t)-\varepsilon(a^*x(t)+ay(t))\right)}$$

$$=\frac{(ax'(t)+\varepsilon a^*x'(t)+\varepsilon ay'(t))(ax(t)-\varepsilon a^*x(t)-\varepsilon ay(t))}{a^2(x(t))^2}$$

$$=\frac{a^2x'(t)x(t)+\varepsilon a^2(y'(t)x(t)-x'(t)y(t))}{a^2(x(t))^2}$$

$$=\frac{a^2(x'(t)x(t)+\varepsilon(y'(t)x(t)-x'(t)y(t)))}{a^2(x(t))^2}$$

$$=\frac{x'(t)x(t)+\varepsilon(y'(t)x(t)-x'(t)y(t))}{(x(t))^2}$$

$\dfrac{x'(t)x(t)+\varepsilon(y'(t)x(t)-x'(t)y(t))}{(x(t))^2}$ ifadesinin

$\dfrac{(x(t)+\varepsilon y(t))'}{(x(t)+\varepsilon y(t))}$ olduğu görülür. Şöyle ki;

$$\frac{(x(t)+\varepsilon y(t))'}{(x(t)+\varepsilon y(t))}=\frac{x'(t)+\varepsilon y'(t)}{x(t)+\varepsilon y(t)}$$

$$=\frac{\left(x'(t)+\varepsilon y'(t)\right)\left(x(t)-\varepsilon y(t)\right)}{\left(x(t)+\varepsilon y(t)\right)\left(x(t)-\varepsilon y(t)\right)}$$

elde edilir.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{\left(F\alpha(t)\right)'}{\left(F\alpha(t)\right)}$$

$$= \frac{x'(t)x(t) + \varepsilon(y'(t)x(t) - x'(t)y(t))}{(x(t))^2}$$

$= \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = f(\alpha(t))$ olup istenen elde edilir ve $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ fonksiyonu D_1 -*invaryanttır.*

ii) $f(\alpha(t)) = \dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}$ fonksiyonunun

ID_1^+ -*invaryant* olduğunu gösterelim.

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ için $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ dir. $|\alpha(t)| = x(t)$ ve $|\alpha'(t)| = x'(t)$ dir.

$F \in ID_1^+$ olduğundan

$$F\alpha(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a^*x(t) + ay(t) \end{pmatrix} = ax(t) + \varepsilon(a^*x(t) + ay(t))$$

ve $|F\alpha(t)| = ax(t)$ dir. Aynı zamanda $F\alpha'(t) = ax'(t) + \varepsilon(a^*x'(t) + ay'(t))$ olup $|F\alpha'(t)| = ax'(t)$ dir.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{|F\alpha'(t)|}{|F\alpha(t)|} = \frac{ax'(t)}{ax(t)}$$

$= \dfrac{x'(t)}{x(t)} = \dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|} = f(\alpha(t))$ olup istenen elde edilir. Yani $\dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}$ fonksiyonu

ID_1^+ -*invaryanttır.*

iii) $f(\alpha(t)) = \dfrac{[\alpha(t)\alpha'(t)]}{|\alpha(t)|^2}$ fonksiyonunun

ID_1^+ -*invaryant* olduğunu gösterelim.

$F \in ID_1^+$ olduğundan $F\alpha(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

yazılır.

$$= \begin{pmatrix} ax(t) \\ a^*x(t) + ay(t) \end{pmatrix} = ax(t) + \varepsilon(a^*x(t) + ay(t))$$

ve $|F\alpha(t)| = ax(t)$ dir. Aynı zamanda; $F\alpha'(t) = ax'(t) + \varepsilon(a^*x'(t) + ay'(t))$,
$|F\alpha'(t)| = ax'(t)$ ve

$$f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha(t)\alpha'(t)]}{|\alpha(t)|^2} = \frac{\det\begin{pmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t) \end{pmatrix}}{(x(t))^2} \text{ dir.}$$

$$f(F\alpha(t)) = \frac{[(F\alpha(t))(F\alpha'(t))]}{|F\alpha(t)|^2}$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t) \\ a^*x(t) + ay(t) & a^*x'(t) + ay'(t) \end{pmatrix}}{\left(ax(t)\right)^2}$$

$$= \frac{aa^*x(t)x'(t) + a^2x(t)y'(t) - aa^*x'(t)x(t) - a^2x'(t)y(t)}{\left(ax(t)\right)^2}$$

$$= \frac{a^2(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))}{a^2(x(t))^2} = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{(x(t))^2}$$

$$= \frac{[\alpha(t)\alpha'(t)]}{|\alpha(t)|^2} = f(\alpha(t))$$

olup istenen elde edilir. Yani $\dfrac{[\alpha(t)\alpha'(t)]}{|\alpha(t)|^2}$ fonksiyonu ID_1^+ -*invaryanttır.*

Teorem 3.2. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ $\mathbb{R}^2$ 'de bir *c-regüler* T *-yol* olsun.

i) $\dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t)$ T *-yolların* kümesi üzerinde ID_1 *-invaryanttır.*

ii) $\dfrac{[\alpha(t)\alpha'(t)]^2}{|\alpha(t)|^4}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *c-regüler* $\alpha(t)$ T *-yolların* kümesi üzerinde ID_1 *-invaryanttır.*

İspat: $i)$ $f(\alpha(t))=\dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}$ fonksiyonunun ID_1*-invaryant* olduğunu gösterelim.

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$ ve $|\alpha'(t)|=x'(t)$ dir.

$F\in ID_1$ olduğundan;

$$F\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \text{ yazılır.}$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)\\ a^*x(t)-ay(t)\end{pmatrix}=ax(t)+\varepsilon(a^*x(t)-ay(t))$$

ve $|F\alpha(t)|=ax(t)$

$F\alpha'(t)=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)-ay'(t))$ olup $|F\alpha'(t)|=ax'(t)$ dir.

$$f(F\alpha(t))=\frac{|F\alpha'(t)|}{|F\alpha(t)|}=\frac{ax'(t)}{ax(t)}=\frac{x'(t)}{x(t)}$$

$$=\frac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}=f(\alpha(t))$$

olup istenen elde edilir ve $\dfrac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t)|}$ fonksiyonu ID_1*-invaryanttır.*

$ii)$ $f(\alpha(t))=\dfrac{[\alpha(t)\alpha'(t)]^2}{|\alpha(t)|^4}$ fonksiyonunun ID_1*-invaryant* olduğunu gösterelim.

$F\in ID_1$ olduğundan;

$$F\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \text{ yazılır.}$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)\\ a^*x(t)-ay(t)\end{pmatrix}=ax(t)+\varepsilon(a^*x(t)-ay(t)).$$

$|F\alpha(t)|=ax(t)$ ve $F\alpha'(t)=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)-ay'(t))$ dir.

$$f(\alpha(t))=\frac{[\alpha(t)\alpha'(t)]^2}{|\alpha(t)|^4}=\frac{\left(\det\begin{pmatrix} x(t) & x'(t)\\ y(t) & y'(t)\end{pmatrix}\right)^2}{(x(t))^4}$$

$$=\frac{\left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)^2}{(x(t))^4} \text{ dir. O halde;}$$

$$f(F\alpha(t))=\frac{[(F\alpha(t))(F\alpha'(t))]^2}{|F\alpha(t)|^4}$$

$$=\frac{\left(\det\begin{pmatrix} ax(t) & ax'(t)\\ a^*x(t)-ay(t) & a^*x'(t)-ay'(t)\end{pmatrix}\right)^2}{\left(ax(t)\right)^4}$$

$$=\frac{(aa^*x(t)x'(t)-a^2x(t)y'(t)-aa^*x'(t)x(t)+a^2x'(t)y(t))^2}{\left(ax(t)\right)^4}$$

$$=\frac{a^4(x'(t)y(t)-x(t)y'(t))^2}{a^4(x(t))^4}$$

$$=\frac{(x'(t)y(t)-x(t)y'(t))^2}{(x(t))^4}=f\alpha(t) \text{ olup istenen}$$

elde edilir ve $\dfrac{[\alpha(t)\alpha'(t)]^2}{|\alpha(t)|^4}$ fonksiyonu ID_1*-invaryanttır.*

4. $\mathbb{R}^2$'de Bir Parametrik Eğrinin (Yolun) $\mathcal{MID}_1^+$, $\mathcal{MID}_1$ Gruplarına Göre İnvaryantları

$$\mathcal{MID}_1^+=\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=S_AB+C,\ A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2\} \text{ ve}$$

$$\mathcal{MID}_1^-=\left\{F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(B)=(S_AW)B+C,\ A\in D_1, B,C\in\mathbb{R}^2, W=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

olmak üzere;

$\mathcal{MID}_1=\mathcal{MID}_1^+\cup\mathcal{MID}_1^-$

şeklinde tanımlayalım.

$G=\mathcal{MID}_1^+$, $\mathcal{MID}_1$ alalım.

Tanım 4.1. $\mathbb{R}^2$'de bir T*-yol*

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ olsun. Eğer; $\forall t\in T$ için $|\alpha'(t)|\neq 0$ yani; $\forall t\in T$ için $x'(t)\neq 0$ ise $\alpha(t)$ 'ye *d-regüler* denir.

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ $\mathbb{R}^2$ 'de bir T*-yol* olsun. $\alpha(t)$ 'nin 1. türevi $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$ ve $\alpha(t)$ 'nin 2. türevi $\alpha''(t)=(x''(t),y''(t))$ olur. $\alpha'(t)$ ve $\alpha''(t)$ için $\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t)\\ y'(t) & y''(t)\end{pmatrix}=\left[\alpha'(t)\alpha''(t)\right]$ ile gösterilir.

Teorem 4.1. $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ $\mathbb{R}^2$ 'de bir *d-regüler* T*-yol* olsun.

$i)$ $\dfrac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *d-regüler* $\alpha(t)$ T*-yolların* kümesi üzerinde $\mathcal{MID}_1^+$*-invaryanttır.*

$ii)$ $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *d-regüler* $\alpha(t)$ T*-yolların* kümesi üzerinde $\mathcal{MID}_1^+$*-invaryanttır.*

$iii)$ $\dfrac{\left[\alpha'(t)\alpha''(t)\right]}{|\alpha'(t)|^2}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *d-regüler* $\alpha(t)$ T*-yolların* kümesi üzerinde $\mathcal{MID}_1^+$*-invaryanttır.*

İspat: $i)$ $f(\alpha(t))=\dfrac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ fonksiyonunun $\mathcal{MID}_1^+$*-invaryant* olduğunu gösterelim.

$F\in\mathcal{MID}_1^+$ olduğundan

$$F\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)+c_1\\ a^*x(t)+ay(t)+c_2\end{pmatrix}$$

$$=ax(t)+c_1+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t)+c_2)$$

$(F\alpha(t))'=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))$ ve

$(F\alpha(t))''=ax''(t)+\varepsilon(a^*x''(t)+ay''(t))$ dir.

$$f(F\alpha(t))=\frac{\left(F\alpha(t)\right)''}{\left(F\alpha(t)\right)'}=\frac{ax''(t)+\varepsilon(a^*x''(t)+ay''(t))}{ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))}$$

$$=\frac{(ax''(t)+\varepsilon(a^*x''(t)+ay''(t)))\left(ax'(t)-\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))\right)}{(ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t)))\left(ax'(t)-\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))\right)}$$

$$=\frac{(ax''(t)+\varepsilon a^*x''(t)+\varepsilon ay''(t))(ax'(t)-\varepsilon a^*x'(t)-\varepsilon ay'(t))}{a^2(x'(t))^2}$$

$$=\frac{a^2x''(t)x'(t)+\varepsilon a^2(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t))}{a^2(x'(t))^2}$$

$$=\frac{a^2(x''(t)x'(t)+\varepsilon(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)))}{a^2(x'(t))^2}$$

$$=\frac{x''(t)x'(t)+\varepsilon(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t))}{(x'(t))^2}$$

$$\frac{x''(t)x'(t)+\varepsilon(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t))}{(x'(t))^2}$$

ifadenin $\dfrac{(x(t)+\varepsilon y(t))''}{(x(t)+\varepsilon y(t))'}$ olduğu görülür. Şöyle ki;

$$\frac{(x(t)+\varepsilon y(t))''}{(x(t)+\varepsilon y(t))'}=\frac{x''(t)+\varepsilon y''(t)}{x'(t)+\varepsilon y'(t)}$$

$$=\frac{\left(x''(t)+\varepsilon y''(t)\right)\left(x'(t)-\varepsilon y'(t)\right)}{\left(x'(t)+\varepsilon y'(t)\right)\left(x'(t)-\varepsilon y'(t)\right)}$$

olup dolayısıyla;

$$f(F\alpha(t))=\frac{\left(F\alpha(t)\right)''}{\left(F\alpha(t)\right)'}$$

$$=\frac{x''(t)x'(t)+\varepsilon(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t))}{(x'(t))^2}$$

$=\dfrac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}=f(\alpha(t))$ olup istenen elde edilir ve $\dfrac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ fonksiyonu $\mathcal{MID}_1^+$*-invaryanttır.*

$ii)$ $f(\alpha(t))=\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonunun

$\mathcal{M}ID_1^+$ -*invaryant* olduğunu gösterelim.

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$ ve $\alpha''(t)=(x''(t),y''(t))$ dir.

$|\alpha''(t)|=x''(t)$ ve $|\alpha'(t)|=x'(t)$ dir.

$F\in \mathcal{M}ID_1^+$ olduğundan

$$F\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)+c_1\\ a^*x(t)+ay(t)+c_2\end{pmatrix}$$

$$=ax(t)+c_1+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t)+c_2)$$

$F\alpha'(t)=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))$ olup $|F\alpha'(t)|=ax'(t)$ dir.

$F\alpha''(t)=ax''(t)+\varepsilon(a^*x''(t)+ay''(t))$ olup $|F\alpha''(t)|=ax''(t)$ dir.

$$f(F\alpha(t))=\frac{|F\alpha''(t)|}{|F\alpha'(t)|}=\frac{ax''(t)}{ax'(t)}=\frac{x''(t)}{x'(t)}=\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}=f(\alpha(t))$$

olup istenen elde edilir ve $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonu $\mathcal{M}ID_1^+$ -*invaryanttır.*

iii) $f(\alpha(t))=\dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}$ fonksiyonunun $\mathcal{M}ID_1^+$ -*invaryant* olduğunu gösterelim.

$F\in \mathcal{M}ID_1^+$ olduğundan

$$F\alpha(t)=\begin{pmatrix} a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ax(t)+c_1\\ a^*x(t)+ay(t)+c_2\end{pmatrix}$$

$$=ax(t)+c_1+\varepsilon(a^*x(t)+ay(t)+c_2)$$

$F\alpha'(t)=ax'(t)+\varepsilon(a^*x'(t)+ay'(t))$,

$F\alpha''(t)=ax''(t)+\varepsilon(a^*x''(t)+ay''(t))$,

$|F\alpha'(t)|=ax'(t)$ ve

$$f(\alpha(t))=\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=\frac{\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t)\\ y'(t) & y''(t)\end{pmatrix}}{(x'(t))^2}$$

dir.

$$f(F\alpha(t))=\frac{[(F\alpha'(t))(F\alpha''(t))]}{|F\alpha'(t)|^2}$$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t)\\ a^*x'(t)+ay'(t) & a^*x''(t)+ay''(t)\end{pmatrix}}{(ax'(t))^2}$$

$$=\frac{aa^*x'(t)x''(t)+a^2x'(t)y''(t)-aa^*x''(t)x'(t)-a^2x''(t)y'(t)}{(ax'(t))^2}$$

$$=\frac{a^2(x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t))}{a^2(x'(t))^2}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}$$

$$=\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=f\alpha(t)$$

olup istenen elde edilir ve $\dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}$ fonksiyonu $\mathcal{M}ID_1^+$ -*invaryanttır.*

Teorem 4.2. $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ $\mathbb{R}^2$ 'de bir *d-regüler* T *-yol* olsun.

i) $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *d-regüler* $\alpha(t)$ T *-yolların* kümesi üzerinde $\mathcal{M}ID_1$ *-invaryanttır.*

ii) $\dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]^2}{|\alpha'(t)|^4}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm *d-regüler* $\alpha(t)$ T *-yolların* kümesi üzerinde $\mathcal{M}ID_1$ *-invaryanttır.*

İspat: *i*) $f(\alpha(t))=\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonunun $\mathcal{M}ID_1$ -*invaryant* olduğunu gösterelim.

$\alpha(t)=(x(t),y(t))$ olmak üzere; $\alpha'(t)=(x'(t),y'(t))$ ve $\alpha''(t)=(x''(t),y''(t))$

dir.

$|\alpha''(t)| = x''(t)$ ve $|\alpha'(t)| = x'(t)$ dir.

$F \in \mathcal{MID}_1$ olduğundan;

$$F\alpha(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a^* x(t) - ay(t) + c_2 \end{pmatrix}$$
$$= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a^* x(t) - ay(t) + c_2)$$

$F\alpha'(t) = ax'(t) + \varepsilon(a^* x'(t) - ay'(t))$ olup $|F\alpha'(t)| = ax'(t)$ dir.

$F\alpha''(t) = ax''(t) + \varepsilon(a^* x''(t) - ay''(t))$ olup $|F\alpha''(t)| = ax''(t)$ dir.

$$f(F\alpha(t)) = \frac{|F\alpha''(t)|}{|F\alpha'(t)|} = \frac{ax''(t)}{ax'(t)} = \frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|} = f(\alpha(t))$$

olup istenen elde edilir ve $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ fonksiyonu $\mathcal{MID}_1$*-invaryanttır.*

ii) $f(\alpha(t)) = \dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]^2}{|\alpha'(t)|^4}$ fonksiyonunun $\mathcal{MID}_1$ *-invaryant* olduğunu gösterelim.

$F \in \mathcal{MID}_1$ olduğundan;

$$F\alpha(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a^* & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax(t) + c_1 \\ a^* x(t) - ay(t) + c_2 \end{pmatrix}$$
$$= ax(t) + c_1 + \varepsilon(a^* x(t) - ay(t) + c_2)$$

$F\alpha'(t) = ax'(t) + \varepsilon(a^* x'(t) - ay'(t))$,

$F\alpha''(t) = ax''(t) + \varepsilon(a^* x''(t) - ay''(t))$,

$|F\alpha'(t)| = ax'(t)$ ve

$$f(\alpha(t)) = \frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]^2}{|\alpha'(t)|^4} = \frac{\left(\det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}\right)^2}{(x'(t))^4}$$
$$= \frac{\left(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\right)^2}{(x'(t))^4}$$ dir. O halde;

$$f(F\alpha(t)) = \frac{[(F\alpha'(t))(F\alpha''(t))]^2}{|F\alpha'(t)|^4}$$
$$= \frac{\left(\det\begin{pmatrix} ax'(t) & ax''(t) \\ a^* x'(t) - ay'(t) & a^* x''(t) - ay''(t) \end{pmatrix}\right)^2}{\left(ax'(t)\right)^4}$$
$$= \frac{(aa^* x'(t)x''(t) - a^2 x'(t)y''(t) - aa^* x''(t)x'(t) + a^2 x''(t)y'(t))^2}{\left(ax'(t)\right)^4}$$
$$= \frac{a^4 (x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))^2}{a^4 (x'(t))^4}$$
$$= \frac{(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))^2}{(x'(t))^4} = f\alpha(t)$$ olup

istenen elde edilir ve $\dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]^2}{|\alpha'(t)|^4}$ fonksiyonu $\mathcal{MID}_1$*-invaryanttır.*

5. Regüler Parametrik Eğrilerin (Yolların) Tam İnvaryantlar Sistemi ve Regüler Parametrik Eğrilerin (Yolların) Teklik Teoremleri

$G = \mathcal{MID}_1^+$ olsun. Bu bölümde iki parametrik eğrinin denklik koşullarını parametrik eğrilerin *d-regüler* olması durumunda ifade eden aşağıdaki teoremi ispatlayarak başlayacağız.

Teorem 5.1. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$'de *d-regüler* T*-yollar* olsun. $\alpha(t) \overset{G}{\sim} \beta(t)$ dir. $\Leftrightarrow$ $\forall t \in T$ için

$$\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}=\frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|}$$
$$\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2} \quad (1)$$

dir. Ayrıca; $U\in ID_1^+$, $C\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere; bir tek $F\in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ vardır öyle ki $\beta(t)=F\alpha(t)=U\alpha(t)+C$ dir. Ve burada

$$U=\begin{pmatrix}\frac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|} & 0\\ \frac{[\alpha'(t)\beta'(t)]}{|\alpha'(t)|^2} & \frac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|}\end{pmatrix} \quad (2)$$

ve $C=\beta(t)-U\alpha(t)$ dir. Burada U ve C sabittir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha(t)\overset{G}{\sim}\beta(t)$ kabul edelim.

Teorem 3.1. 'den $\forall t\in T$ ve $F\in$ $\mathcal{M}ID_1^+$, $H\in D_1$ için $\beta(t)=H\alpha(t)+C$ dir. Buradan $\beta'(t)=H\alpha'(t)$ olur. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ *d-regüler T -yollar* olduğundan $|\alpha'(t)|\neq 0$ ve $|\beta'(t)|\neq 0$ dir. O halde; $\forall t\in T$ için Önerme 2.3. ten $(\alpha'(t))^{-1}$ ve $(\beta'(t))^{-1}$ vardır. Önerme 3.2. de $A=\beta'(t)$ ve $B=\beta''(t)$ alalım. O halde;

$$\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)}=\frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|}+\varepsilon\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2} \quad (*)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}=\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}+\varepsilon\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2} \quad (**)$$

elde edilir. $\beta'(t)=H\alpha'(t)$ ve $\beta''(t)=H\alpha''(t)$ den $\forall t\in T$ için $\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)}=\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ sağlanır. Bu eşitlik, (*) ve (**)' dan $\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}=\frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|}$, $\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2}$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki; (1) sağlansın. $\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}=\frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|}$, $\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2}$,

(*) ve (**) 'dan $\frac{\beta''(t)}{\beta'(t)}=\frac{\alpha''(t)}{\alpha'(t)}$ sağlanır.

Buradan $\beta''(t)\left(\beta'(t)\right)^{-1}-\alpha''(t)\left(\alpha'(t)\right)^{-1}=0$.

Bu eşitlik kullanılarak;

$$\frac{d(\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1})}{dt}=$$
$$=\beta''(t)(\alpha'(t))^{-1}-\beta'(t)\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-2}$$
$$=(\beta''(t)-\beta'(t)\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1})(\alpha'(t))^{-1}$$
$$=\beta'(t)(\beta''(t)(\beta'(t))^{-1}-\alpha''(t)(\alpha'(t))^{-1})(\alpha'(t))^{-1}$$
$$=0$$

elde edilir. Buradan; $\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}$ sabittir. $K=\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}$ olarak alalım. K sabit olduğundan $|K|$ de sabit olur. $\forall t\in T$ için $|\alpha'(t)|\neq 0$, $|\beta'(t)|\neq 0$ kullanılırsa Önerme 2.3. ten $|K|=\left|\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}\right|$ $=|\beta'(t)|\left|(\alpha'(t))^{-1}\right|=\frac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|}\neq 0$ 'dır. Böylece; $|K|$ hem sabittir hem de $|K|\neq 0$ 'dır. Dolayısıyla $K\in D_1$ dir.

$$\beta'(t)=\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}\alpha'(t)=(\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1})\alpha'(t)$$

$\beta'(t)=K\alpha'(t)$ elde edilir. Teorem 4.1. (*i*) kullanılarak

$$K=\beta'(t)(\alpha'(t))^{-1}=\frac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|}+\varepsilon\frac{[\alpha'(t)\beta'(t)]}{|\alpha'(t)|^2}$$

elde edilir. $K=U$ olduğu görülür. K sabit olduğundan U sabittir. Buradan $\beta'(t)=U\alpha'(t)=K\alpha'(t)$ yazılır. Buradan da integral alarak $\beta(t)=U\alpha(t)+C$ elde edilir. Böylece; $\alpha(t)$ ile $\beta(t)$ G-*denktir*.

$F\in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ ' nın tekliğini gösterelim. Bunun için $U\in ID_1^+$ ve $C\in\mathbb{R}^2$ 'nin tekliğini göstermemiz gerekir. O halde; $F\in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ olduğundan $\beta(t)=F\alpha(t)=U\alpha(t)+C$, $U\in ID_1^+$, $C\in\mathbb{R}^2$ sağlanır. Diyelim ki;

$E \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere; $V \in$ ID_1^+ var ve $\beta(t) = V\alpha(t) + E$ olsun. $\beta'(t) = V\alpha'(t)$ sağlanır. $|\alpha'(t)| \neq 0$ ve $\beta'(t) = V\alpha'(t)$ kullanılarak $V = \beta'(t)(\alpha'(t))^{-1} = K$. Böylece; $V = K = U$. Dolayısıyla; U tektir. $C = \beta(t) - U\alpha(t)$ olarak alalım. U 'nun tekliğinden $C = \beta(t) - U\alpha(t) = E$. Böylece; U ve C 'nin de tekliğinden $F \in \mathcal{M}ID_1^+$ ' nin tekliği de elde edilir.

Tanım 5.1. $\mathbb{R}^2$ 'de $\alpha(t)$ bir *T-yol* olmak üzere; $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t)\alpha''(t)] = 0$ ise $\alpha(t)$ *T-yoluna* tam dejenere denir.

$\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$ 'de *T-yollar* olsun. $\alpha(t)$ tam dejenere ve $G = \mathcal{M}ID_1^+$ olmak üzere; $\alpha(t) \overset{G}{\sim} \beta(t)$ ise $\beta(t)$ de tam dejeneredir.

Teorem 5.2. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$ 'de tam dejenere *d-regüler T-yollar* olsun.

$G = \mathcal{M}ID_1$ olmak üzere; $\alpha(t) \overset{G}{\sim} \beta(t)$ dir. $\Leftrightarrow$ $\forall t \in T$ için

$$\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|} = \frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|} \quad (3)$$

dir. Ayrıca; $U_1, U_2 \in$ $\mathcal{M}ID_1^+$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere sadece iki tane $F = F_1, F_2 \in \mathcal{M}ID_1$ vardır öyle ki $\beta(t) = F_1\alpha(t) = U_1\alpha(t) + C_1$ ve $\beta(t) = F_2\alpha(t) = (U_2W)\alpha(t) + C_2$. Burada

$$U_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|} & 0 \\ \dfrac{[\alpha'(t)\beta'(t)]}{|\alpha'(t)|^2} & \dfrac{|\beta'(t)|}{|\alpha'(t)|} \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{|\beta'(t)|}{|W\alpha'(t)|} & 0 \\ \dfrac{[W\alpha'(t)\beta'(t)]}{|W\alpha'(t)|^2} & \dfrac{|\beta'(t)|}{|W\alpha'(t)|} \end{pmatrix} \quad (4)$$

dir. $C_1 = \beta(t) - U_1\alpha(t)$, $C_2 = \beta(t) - U_2\alpha(t)$ dir. U_1, U_2, C_1, C_2 sabittir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $G = \mathcal{M}ID_1$ olmak üzere; $\alpha(t) \overset{G}{\sim} \beta(t)$ kabul edelim. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$ 'de tam dejenere *d-regüler T-yollar* olduğundan $\forall t \in T$ için $|\alpha'(t)| \neq 0$ ve $|\beta'(t)| \neq 0$ 'dır. Böylece; $\forall t \in T$ için $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ ve $\dfrac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|}$ vardır. Teorem 4.2. (i) 'den $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ $\mathcal{M}ID_1$ *-invaryanttır.* Teorem 5.1. 'den (3) elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki; (3) sağlansın. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$ 'de *d-regüler T-yollar* olduğundan $\forall t \in T$ için $|\alpha'(t)| \neq 0$ ve $|\beta'(t)| \neq 0$ 'dır. Böylece; $\forall t \in T$ için $\dfrac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}$ ve $\dfrac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2}$ vardır. $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ $\mathbb{R}^2$ 'de tam dejenere *T-yollar* olduğundan $\forall t \in T$ için $[\alpha'(t)\alpha''(t)] = [\beta'(t)\beta''(t)] = 0$ elde edilir. Buradan

$$\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2} = 0 \quad (5)$$

elde edilir.

(5) ve (3) denklemleri kullanılarak Teorem 5.1.' de yer alan denklemler elde edilir. Teorem 5.1. kullanılarak bir tek $F \in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ vardır öyle ki $\forall t \in T$ için $\beta(t) = F\alpha(t)$ 'dir. Buradan görülür ki; bir tek $U_1 \in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ ve bir tek $C_1 \in \mathbb{R}^2$ vardır ve $U_1 = U \in$ $\mathcal{M}ID_1^+$ 'dır. Öyle ki; $\beta(t) = F\alpha(t) = U_1\alpha(t) + C_1$ ve $C_1 = \beta(t) - U_1\alpha(t)$ 'dir. Teorem 5.1.' den U_1 ve C_1 sabittir.

$W\alpha(t)$ *T-yol* olsun. Önerme 3.4. (i) 'den $\dfrac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|}$ W *-invaryanttır.* Böylece; $\forall t \in T$ için

$$\frac{|W\alpha''(t)|}{|W\alpha'(t)|}=\frac{|\alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|} \quad \dots (6)$$

'dir. (6) ve (3) kullanılarak,

$$\frac{|W\alpha''(t)|}{|W\alpha'(t)|}=\frac{|\beta''(t)|}{|\beta'(t)|} \quad \dots (7)$$

elde edilir. Önerme 3.4. (i)'de $\forall t\in T$ için $|W\alpha'(t)|^2=|\alpha'(t)|^2$, $\det(W)=-1$ ve (5) kullanılarak;

$$\frac{[W\alpha'(t)W\alpha''(t)]}{|W\alpha'(t)|^2}=\frac{\det(W)[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}$$

$$=-\frac{[\alpha'(t)\alpha''(t)]}{|\alpha'(t)|^2}=-\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2}=0.$$

Böylece;

$$\frac{[W\alpha'(t)W\alpha''(t)]}{|W\alpha'(t)|^2}=\frac{[\beta'(t)\beta''(t)]}{|\beta'(t)|^2} \quad \dots (8)$$

elde edilir. $\forall t\in T$ için (7) ve (8) sistemi elde edilir. Teorem 5.1. kullanılarak bir tek $F\in \mathcal{M}ID_1^+$ vardır öyle ki $\forall t\in T$ için $\beta(t)=F(W\alpha(t))$'dir. $F\in \mathcal{M}ID_1^+$'nin tekliğinden $\forall t\in T$ için $\beta(t)=F\alpha(t)=(U_2W)\alpha(t)+C_2$ 'yi sağlayan bir tek $U_2\in \mathcal{M}ID_1^+$ ve bir tek $C_2\in\mathbb{R}^2$ vardır. Burada U_2 (4) şeklindedir ve $C_2=\beta(t)-(U_2W)\alpha(t)$ 'dir. Teorem 5.1.'den $U_2\in \mathcal{M}ID_1^+$ ve $C_2\in\mathbb{R}^2$ sabittir.

$F\in \mathcal{M}ID_1$ alalım. Öyle ki $\beta(t)=F\alpha(t)$ 'dir. $U_1,U_2\in ID_1^+$ ve $C_1,C_2\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere; $F\alpha(t)=U_1\alpha(t)+C_1$ veya $F\alpha(t)=(U_2W)\alpha(t)+C_2$ olduğunu gösterelim. $L\in ID_1$, $C_3\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere; $\beta(t)=F\alpha(t)=L\alpha(t)+C_3$ alalım. $L\in ID_1$ olduğundan $L\in ID_1^+$ veya $L\in ID_1^-$ olur. Kabul edelim ki $L\in ID_1^+$ olsun. Teorem 5.1.' deki teklik kullanılarak, $L=U_1$ ve $C_1=C_3=\beta(t)-U_1\alpha(t)$ elde edilir.

Kabul edelim ki; $L\in ID_1^-$ olsun. $P\in ID_1^+$ olmak üzere; $L=PW$ ve $C_3=\beta(t)-PW\alpha(t)$ şeklinde olur. Buradan $\beta(t)=(PW)\alpha(t)+C_3=P(W\alpha(t))+C_3$ elde edilir. Böylece; $\beta(t)$ ve $W\alpha(t)$ *T-yolları* $\mathcal{M}ID_1^+$-denktirler. Teorem 4.1.' deki teklik kullanılarak $\forall t\in T$ için $P=U_2$ ve $C_2=C_3=\beta(t)-(U_2W)\alpha(t)$ elde edilir.

(a) ve (d) durumunda, $U_1\in \mathcal{M}ID_1^+$, $C_1=\beta(t)-U_1\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t)=U_1\alpha(t)+C_1$ sağlanır. Burada U_1 (2) şeklindedir. (b) ve (c) durumunda, $U_2\in \mathcal{M}ID_1^+$, $C_2=\beta(t)-U_2W\alpha(t)$ olmak üzere; $F\alpha(t)=U_2W\alpha(t)+C_2$ sağlanır. Burada U_2 (4) şeklindedir. U_1,U_2,C_1,C_2 $t\in T$ sabittir.

6. Sonuç

Bu çalışmada, kullanılan yöntem ile parametrik eğrilerin G-denklik problemi ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Kullanılan yöntem ve sonuçlar dual parametrik eğrilerin (yolların) ve dual eğrilerin invaryant teorideki uygulamalarında yararlı olacaktır.

7. Kaynaklar

Khadijev D., Oren I., Peksen O. 2018. 'Global invariants of paths and curves for the group of all linear similarities in the two-dimensional Euclidean space', *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* Vol. 15.

Khadjiev D.,1988, ''Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves'' *Fan Publisher,* Tashkent.

Klein, F. 1872. "Vergleichende Betrachtungen Über Neuere Geometrische Forschungen",Erlangen: Verlag.

TOMAR, M. 2012. 'Applications of dual numbers and dual numbers to two-

dimensional dual geometry', Master's Thesis,
Science Institute, Trabzon.