



LQR KONTROLCÜ PARAMETRELERİNİN SİSTEM DAVRANIŞINA ETKİ ANALİZİ: ÇİFT ÇUBUKLU TERS SARKAÇ SİSTEMİ

¹Tuğçe YAREN, ²Selçuk KIZIR

Kocaeli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, TÜRKİYE

¹tugce.yaren@kocaeli.edu.tr, ²selcuk.kizir@kocaeli.edu.tr

(Geliş/Received: 04.07.2019; Kabul/Accepted in Revised Form: 17.08.2019)

ÖZ: Bu çalışmada ters sarkaç sistem türlerinden biri olan doğrusal tahrikli çift çubuklu ters sarkaç sisteminin doğrusal karesel regülatör (LQR) yöntemine dayanan durum geri besleme yöntemi ile kontrolüne yönelik benzetim sonuçları sunulmuştur. Tek çubuklu ters sarkaç sistemine göre çift çubuklu ters sarkaç sisteminin kontrolü kararsızlık, eksik tahrik ve doğrusalsızlık özellikleri nedeniyle daha zor bir problemdir. Dolayısıyla sistemin denge kontrolünü sağlamaya yönelik tasarımı yapılan LQR kontrolcü parametrelerinin sistem davranışına etkileri ayrıntılı olarak ele alınarak kontrol algoritması tasarım süreci iyileştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Tahrikli – Çok Çubuklu Ters Sarkaç Sistemleri, LQR, Optimal Durum Geri Beslemeli Kontrol

Impact Analysis of LQR Controller Parameters on System Dynamic: Double Inverted Pendulum

ABSTRACT: In this study, simulation results for the control of the cart – pole double inverted pendulum system which is an type of inverted pendulum system by the state feedback method using linear quadratic regulator (LQR) are presented. The control problem of the double inverted pendulum is more difficult than the control problem of the single inverted pendulum because of instability, nonlinearity characteristics. Therefore, the control algorithm design process has been improved by considering the effects of LQR controller parameters designed to provide stability control of the system on system dynamic in detail.

Key Words: Linear Driven – Multi Pendulum Inverted Pendulum Systems, LQR, Optimal State Feedback Control

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Kontrol sistemlerine ait çalışma ve uygulama alanları günümüzde her alanda karşımıza çıkmaktadır. İnsan müdahalesini en aza indirmek amacıyla geliştirilen otomasyon ve robotik sistemlerin endüstriyel alanlardaki uygulamalarının yaygınlaşması, endüstriyel sistem tasarımı imalat teknolojilerinin yanı sıra, kontrol teorisi ve kontrolcü geliştirilmesini de zorunlu kılmaktadır (Şen ve diğ., 2016). Bir sistemin işlevlerini yüksek doğruluk ve hassasiyette yerine getirebilmesinin temel koşullarından biri başarılı bir denetleyiciye sahip olmasıdır. Bu bağlamda, sistemlerin kontrolünde çeşitli yöntemlerin uygulandığı görülmektedir.

Kontrol yöntemleri, ilgili kontrol kuralı türetilirken sistem dinamiğinin kullanılıp kullanılmamasına bağlı olarak öncelikle model tabanlı ve model tabanlı olmayan kontrol yöntemleri olmak üzere iki ana grupta toplanabilir (Özkan, 2009). Sistem matematiksel modelinin elde edilmesi, kontrolör tasarımında istenen bir durumdur. Sistem dinamik davranışı çalışma koşullarının tamamında geçerli olacak şekilde tam olarak modellenemese ve parametreler için elde edilen veya kestirilen değerler bir miktar belirsizlik

içerse dahi, sistemin dinamik davranışını tanımlayan bir matematiksel model kullanılarak analitik yöntemlerle daha hassas kontrol sistemleri tasarlamak mümkündür. Kontrol sistemlerinde sıklıkla kullanılan model tabanlı kontrol yöntemlerinden biri de LQR (Linear Quadratic Regulator) kontrolüdür.

Kontrol algoritması geliştirme sürecinde kontrolcü parametrelerinin etkilerinin analizi oldukça önemlidir. Bu etkilerin bilinmesi, endüstriyel uygulamalardaki kararsız sistemler için kontrol teorilerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır. Bu çalışmada LQR kontrolcü tasarımı ve kontrolcü parametrelerinin sistem davranışına etkilerinin analizi; robotik, uzay-havacılık sistemleri, deniz sistemleri, esnek sistemler, mobil sistemler vb. olmak üzere geniş bir uygulama alanına sahip olan ve birçok endüstriyel sistemin kontrol çalışmalarındaki teorik altyapısını oluşturan ters sarkaç sistemi için gerçekleştirilmiştir.

Ters sarkaç sistemleri, doğrusal olmayan, kararsız, eksik tahrikli yapılarından dolayı kontrol alanındaki çalışmalarda kullanılmaya oldukça uygundur. Kontrol teorisi üzerine yapılan araştırma ve geliştirme çalışmalarında ters sarkaç sistemleri iyi bir test düzeneği olduğundan, bu sistemler farklı kontrol yöntemlerinin tasarımında ve uygulanmasında sıklıkla tercih edilmektedir (Yaren, 2018). Gerek yeni tasarlanan kontrolcü performansının gözlemlenmesi, gerekse mevcut kontrolcü performanslarının iyileştirilmesine yönelik literatürde oldukça fazla çalışma bulunmaktadır (Şen ve diğ., 2016). Ayakta duran insanın modellenmesinde, insan kolunun modellenmesinde, itme kuvvetinin alttan uygulandığı roket, füze vb. sistemlerde ve benzer birçok sistemde ters sarkaç ve çift ters sarkaç modelinden faydalanılmaktadır (Bilgiç ve diğ., 2015; Mifsud ve diğ., 2016; Suzuki, 2012; Colobert, 2006; Nagasaki ve diğ., 2003). Ayrıca, uçuş sistemlerinin kalkış ve iniş problemlerinin üstesinden gelinmesinde, gemilerdeki denge probleminin çözümünde, hava türbülansına giren uçakların dengede kalmasının sağlanmasında, çeşitli kuvvet ölçüm cihazlarında ve benzer daha birçok endüstriyel alanda çift sarkaç sistemi ve eş sarkaçlar kullanılmaktadır (Poorhossein ve Vahidian, 2010; Kizir, 2008; Boubaker, 2012; Wanli ve diğ., 2014)). Ters sarkaç sistemlerinin füze, vinç, araba, uçak, robot kontrolü gibi birçok kontrol sisteminin temelini oluşturduğu açıkça görülmektedir.

Zhang ve Zhang (2012), düzlemsel çift ters sarkaç sisteminin dengelenmesi için kendinden ayarlı LQR kontrolör yöntemini uygulamışlardır. Hem simülasyon ortamında hem de deneysel olarak sonuçları incelemiş ve kontrolörün farklı çalışma koşullarında hızlı yanıt verdiği ve iyi bir kararlılık sağladığı sonucuna varmışlardır. Li (Li, 2013), döner çift ters sarkacın dengelenmesi üzerine bir tez çalışması gerçekleştirmiştir. Sisteme uygulanacak LQR kontrolörünü tasarlamış ve Lyapunov yöntemi ile kararlılık analizi yapmıştır. LQR kontrolörünün performansının artırılması amacıyla doğrudan uyarlamalı bulanık mantık yöntemini geliştirmiştir. Bu iki kontrol algoritmasının benzetim sonuçlarını vermiş ve ters sarkacın artan gürbüzlüğünden doğrudan uyarlamalı bulanık mantık yönteminin LQR performansını arttırabildiği sonucuna varmıştır. Block (Block, 1996), iki sarkacın sabit bir yere monte edildiği ve sadece birinci ekleme tahrik uygulandığı Pendubot sisteminin kontrolünü gerçekleştirmiştir. Sarkaçların yükseltilmesinde kısmi geri beslemeli doğrusallaştırma yöntemini, dengelenmesinde ise LQR ve kutup yerleştirme yöntemlerini kullanmıştır. Bogdanov doğrusal arabalı çift ters sarkaç sisteminin optimal kontrolü için LQR, Bulanık Mantık, durumlara bağlı "Ricatti Eşitliği" ve kombinasyonlarından oluşan farklı kontrolcü yaklaşımları test etmiştir. Sonuçta, en iyi performansı LQR kontrol üzerinden durumlara bağlı Ricatti Eşitliği ile tasarladığı kontrolcüde elde etmiştir (Bogdanov, 2004).

Bu çalışmada, doğrusal tahrikli çift çubuklu ters sarkaç sisteminin denge kontrolünü sağlamaya yönelik tasarımı yapılan LQR kontrolcü parametrelerinin sistem davranışına etkileri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde, sistemin matematiksel modeli Lagrange yöntemine dayalı olarak elde edilmiş ve sistemin durum uzay modeli verilmiştir. Üçüncü bölümde, çift ters sarkaç sistemi için LQR tasarımı gerçekleştirilmiştir. Dördüncü bölümde ise LQR kontrolcü parametrelerinin, sistem performansı üzerindeki etkisinin belirlenmesi için farklı konfigürasyonda parametrelerle kontrolcü güncellenmiştir. Ayrıca LQR kontrolcü parametrelerinin sistemin kontrolü üzerindeki etkinliklerini inceleyebilmek amacıyla, MATLAB/Simulink ortamında sistemin benzetim çalışmaları yapılmış, sonuçlar tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Sonuç olarak LQR kontrolcü parametrelerinin etkileri detaylı bir şekilde ele alınarak kontrol algoritması tasarım süreci iyileştirilmiş ve birçok endüstriyel sistemin kontrol

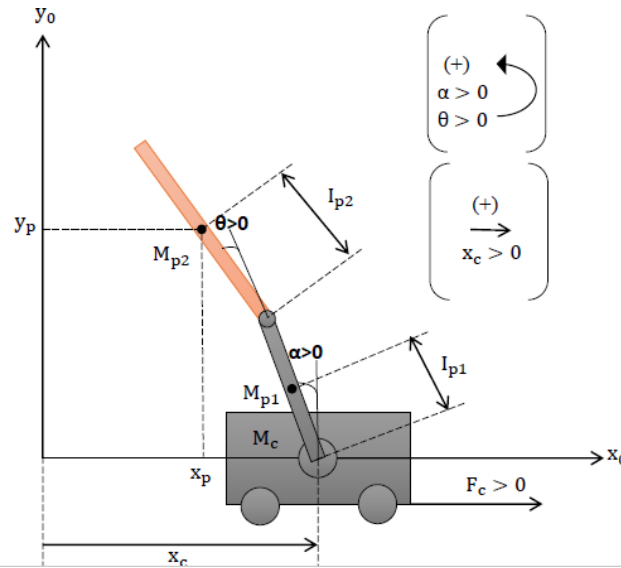
çalışmaları için teorik altyapı oluşturulmuştur. Böylelikle gerek tasarlanacak kontrolcü performansları, gerekse mevcut kontrolcü performanslarının iyileştirilmesi bakımından olumlu katkı sağlanmıştır.

MATEMATİKSEL MODELLEME (MATHEMATICAL MODELLING)

Sistemin matematiksel modelinin çıkartılmasında enerji tabanlı Lagrange yaklaşımı kullanılmıştır. Lagrange 'L' ifadesi, sistemin potansiyel enerjisi ve kinetik enerjisi arasındaki fark olarak tanımlanır. Buna göre öncelikle konum ve hız denklemlerinin yazılarak sistemin toplam kinetik ve potansiyel enerjilerinin hesaplanması gerekmektedir.

Hareket denklemlerinin bulunması için kullanılan Lagrange yöntemi Denklem (1)'de verilmiştir. Burada q_i sistem genelleştirilmiş koordinatı, \dot{q}_i genelleştirilmiş koordinatın zamana göre birinci türevi, τ_i i. değişkene hareket vermek için sistemin i. değişkenine uygulanan genelleştirilmiş tork ve L Lagrangian terimini ifade etmektedir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$



Şekil 1. Doğrusal tahrikli çift çubuklu ters sarkaç sistem diyagramı
Figure 1. The free body diagram of cart-pole double inverted pendulum system

Şekil 1'de serbest cisim diyagramı görülen doğrusal tahrikli çift çubuklu ters sarkaç sisteminin araba konumu (x_c) ve sırayla çubukların referans düzleme göre açılma konumları (α , θ) olmak üzere toplam üç çıkış değişkeni vardır. Diyagramdan görüldüğü üzere x_c 'nin pozitif yönü sağa, α ve θ 'nin pozitif yönü ise saat yönüne doğrudur. Sistem parametreleri Çizelge 1'de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Çubukların yatay ve dikey eksenlerdeki konumları sırasıyla Denklem (2)'de verilmiştir.

$$x_{p1} = x_c - l_{p1} \sin \alpha \quad (2a)$$

$$y_{p1} = l_{p1} \cos(\alpha) \quad (2b)$$

$$x_{p2} = x_c - L_{p1} \sin(\alpha) - l_{p2} \sin(\alpha + \theta) \quad (2c)$$

$$y_{p2} = L_{p1} \cos(\alpha) + l_{p2} \cos(\alpha + \theta) \quad (2d)$$

Çubukların hız denklemleri konum denklemlerinin türevi alınarak Denklem (3)'de verilmiştir.

$$\dot{x}_{p1} = \dot{x}_c - l_{p1} \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3a)$$

$$\dot{y}_{p1} = -l_{p1} \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3b)$$

$$\dot{x}_{p2} = \dot{x}_c - L_{p1} \cos(\alpha) \dot{\alpha} - l_{p2} \cos(\alpha + \theta) (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \quad (3c)$$

$$\dot{y}_{p2} = -L_{p1} \sin(\alpha) \dot{\alpha} - l_{p2} \sin(\alpha + \theta) (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \quad (3d)$$

Çizelge 1. Model parametreleri*Table 1. Model parameters*

Parametre Adı	Parametre Açıklaması	Parametrenin Sayısal Değeri
m_c	Arabanın kütlesi	1,095 kg
m_{p1}	Birinci çubuğun kütlesi	0,096 kg
m_{p2}	İkinci çubuğun kütlesi	0,120 kg
L_{p1}	Birinci çubuğun uzunluğu	0,310 m
L_{p2}	İkinci çubuğun uzunluğu	0,330 m
l_{p1}	Birinci çubuğun ağırlık merkezinden bağlı olduğu mafsala olan uzaklık	0,160 m
l_{p2}	İkinci çubuğun ağırlık merkezinden bağlı olduğu mafsala olan uzaklık	0,150 m
b_1	Birinci döner eklemdeki viskoz sürtünme katsayısı	0,000565 N/(rad/s)
b_2	Birinci ve ikinci çubuk arasındaki viskoz sürtünme katsayısı	0,000072 N/(rad/s)
$J_1 - J_2$	Her bir çubuğun atalet momenti	$J_1=0,022962$ $J_2=0,002972$ Nms ²
c	Araba ile yüzey arasındaki viskoz sürtünme katsayısı	0,001 Nms
c_1	Birinci döner eklemdeki Coulomb sürtünme katsayısı	0,0004512 N/(rad/s)
c_2	Birinci ve ikinci çubuk arasındaki Coulomb sürtünme katsayısı	0,0000452 N/(rad/s)
F	Sisteme uygulanan kuvvet	-

Sistemdeki toplam kinetik enerjiyi arabanın ve her bir çubuğun ayrı ayrı kinetik enerjileri oluşturur. Araba yatay ekseninde doğrusal hareket ettiğinden sadece bu ekseninde öteleme hareketinden kaynaklı bir kinetik enerjisi vardır. Çubuklar hem öteleme hem de dönme hareketi yaptığından toplam kinetik enerjilerini de bu hareketlerden kaynaklı öteleme ve dönme kinetik enerjisi oluşturmaktadır. Arabanın ve çubukların kinetik enerjileri:

$$KE_{araba} = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 \quad (4a)$$

$$KE_1 = \frac{1}{2} m_{p1} \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} (m_{p1} l_{p1}^2 + J_1) \dot{\alpha}^2 - m_{p1} \dot{x}_c l_{p1} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (4b)$$

$$KE_2 = \frac{1}{2} m_{p2} \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_{p2} L_{p1}^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{p2} l_{p2}^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 - m_{p2} \dot{x}_c L_{p1} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (4c)$$

$$- m_{p2} \dot{x}_c l_{p2} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos(\alpha + \theta) + m_{p2} L_{p1} \dot{\alpha} l_{p2} (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \cos(\theta c + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2$$

Araba yalnızca yatay ekseninde hareket ettiği için arabadan kaynaklanan potansiyel enerji sıfırdır. Sistemin potansiyel enerjisini sadece çubuklar oluşturur ve çubukların potansiyel enerjileri:

$$PE_{toplam} = PE_1 + PE_2$$

$$PE_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$PE_2 = m_2 g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

ÇTS sistemi genelleştirilmiş koordinatı (mafsal değişkenleri): $q = [x_c \ \alpha \ \theta]$ ve ÇTS sistemi genelleştirilmiş tork vektörü: $\tau = [\tau_1 \ 0 \ 0]$ şeklindedir. Belirlenen her bir sistem değişkeni için Denklem (1) uygulanır. Her bir değişken için bu eşitliğin uygulanması sonucu doğrusal olmayan üç denklem elde edilir. Bu denklemler sistemin dinamiğini veren diferansiyel denklemlerdir.

İlk olarak x_c durum değişkeni eşitliğe uygulanırsa Denklem (6)'daki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = F_c - c\dot{x}_c \quad (6)$$

L yerine yazılıp, Denklem (6) düzenlenirse:

$$\ddot{x}_c (m_c + m_{p1} + m_{p2}) - \ddot{\alpha} \cos \alpha (m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}) + \dot{\alpha}^2 \sin \alpha (m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}) - (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) \cos(\alpha + \theta) m_{p2}l_{p2} + \sin(\alpha + \theta) (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 m_{p2}l_{p2} = F_c - c\dot{x}_c \quad (7)$$

α ve θ durum değişkenleri için sırasıyla Denklem (1) uyguladığında Denklem (8) ve (9)'daki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha} (m_{p1}l_{p1}^2 + J_1 + m_{p2}L_{p1}^2 + m_{p2}l_{p2}^2 + J_2 + 2m_{p2}L_{p1}l_{p2} \cos \theta) \\ & - \ddot{x}_c (\cos \alpha (m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}) + m_{p2}l_{p2} \cos(\alpha + \theta)) \\ & + (m_{p2}l_{p2}^2 + J_2 + m_{p2}L_{p1}l_{p2} \cos \theta) \ddot{\theta} - 2m_{p2}L_{p1}l_{p2} \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - (m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}) g \sin \alpha - m_{p2}g l_{p2} \sin(\alpha + \theta) - m_{p2}L_{p1}l_{p2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ & = -b_1 \dot{\alpha} - c_1 \text{sign}(\dot{\alpha}) - b_2 (\dot{\alpha} - \dot{\theta}) - c_2 \text{sign}(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) \\ & \ddot{\theta} (m_{p2}l_{p2}^2 + J_2) - \ddot{x}_c \cos(\alpha + \theta) m_{p2}l_{p2} + (m_{p2}L_{p1}l_{p2} \cos \theta + m_{p2}l_{p2}^2 + J_2) \ddot{\alpha} \\ & + m_{p2}L_{p1}l_{p2} \dot{\alpha}^2 \sin \theta - m_{p2}g l_{p2} \sin(\alpha + \theta) = -b_2 (\dot{\theta} - \dot{\alpha}) - c_2 \text{sign}(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (9)$$

Denklem (7), (8) ve (9) sistemin matematiksel modelini oluşturmaktadır. Bu üç doğrusal olmayan denklem sistemin hareket denklemleridir. Sistemi tanımlayan denklemlerin doğrusal olmadıkları görülmektedir ve bu sebeple analiz, benzetim ve denetleyici tasarımının yapılabilmesi için denklemlerin doğrusallaştırılmaları gerekmektedir (Kizir, 2019). Sistemin kararlı ve kararsız olmak üzere iki denge noktası vardır: $\alpha = \pi$, $\theta = 0$ (çubuklar aşağı yönde ve sistem kararlı), $\alpha = 0$, $\theta = 0$ (çubuklar yukarı yönde ve sistem kararsız). Bu çalışmada ele alınan kontrol problemi kararsız denge noktasında geçerlidir. Dolayısıyla doğrusallaştırma bu denge noktası için Denklem (10)' da verilen küçük açı yaklaşımı kullanılarak yapılmış ve Denklem (11)'deki doğrusal model elde edilmiştir.

$$\sin \alpha \approx \alpha, \sin \theta \approx \theta, \sin(\alpha + \theta) \approx \alpha + \theta$$

$$\cos \alpha \approx \cos \theta \approx 1, \cos(\alpha + \theta) \approx 1 \quad (10)$$

$$\dot{\alpha}^2 \approx \dot{\theta}^2 \approx 0, (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 \approx 0$$

$$F_c = (m_c + m_{p1} + m_{p2}) \ddot{x}_c - (m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1} + m_{p2}l_{p2}) \ddot{\alpha} - m_{p2}l_{p2} \ddot{\theta} + c\dot{x}_c \quad (11a)$$

$$0 = -(m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1} + m_{p2}l_{p2}) \ddot{x}_c + (m_{p1}l_{p1}^2 + J_1 + m_{p2}L_{p1}^2 + m_{p2}l_{p2}^2 + J_2 + 2m_{p2}L_{p1}l_{p2}) \ddot{\alpha} + (m_{p2}l_{p2}^2 + J_2 + m_{p2}L_{p1}l_{p2}) \ddot{\theta} - g(m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}) \alpha - gm_{p2}l_{p2}(\alpha + \theta) + b_1 \dot{\alpha} + b_2 (\dot{\alpha} - \dot{\theta}) \quad (11b)$$

$$0 = (m_{p2}l_{p2}^2 + J_2) \ddot{\theta} - m_{p2}l_{p2} \ddot{x}_c + (m_{p2}l_{p2}^2 + J_2 + m_{p2}L_{p1}l_{p2}) \ddot{\alpha} - gm_{p2}l_{p2}(\alpha + \theta) + b_2 (\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \quad (11c)$$

Elde edilen doğrusal modelin matris formunda gösterimi Denklem (12)'de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & -(\alpha_1 + \alpha_2) & -\alpha_2 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) & (\alpha_3 + 2\alpha_4) & (\alpha_5 + \alpha_4) \\ -\alpha_2 & (\alpha_5 + \alpha_4) & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c - c\dot{x}_c \\ \alpha_1 g \alpha + \alpha_2 g(\alpha + \theta) - b_1 \dot{\alpha} - b_2 (\dot{\alpha} - \dot{\theta}) \\ \alpha_2 g(\alpha + \theta) - b_2 (\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$(a_0 = m_c + m_{p1} + m_{p2}, a_1 = m_{p1}l_{p1} + m_{p2}L_{p1}, a_2 = m_{p2}l_{p2}, a_3 = m_{p1}l_{p1}^2 + J_1 + m_{p2}L_{p1}^2 + m_{p2}l_{p2}^2 + J_2,$$

$$a_4 = m_{p2}L_{p1}l_{p2}, a_5 = m_{p2}l_{p2}^2 + J_2)$$

Arabalı çift ters sarkaç sisteminin durum değişkenleri araba konumu – hızı ve her iki çubuğun açısal konumu – hızıdır. Çıkış değişkenleri ise araba konumu ve çubukların açısal konumudur. Bu değişkenler Denklem (13)' de verilmiştir. Bu değişkenler arasında gerekli değişken dönüşümleri Denklem (14)'de verilen şekilde yapılmalı ve denklemler buna göre yeniden düzenlenmelidir.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ \alpha \\ \theta \\ \dot{x}_c \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad y = [x_c \quad \alpha \quad \theta] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \end{aligned} \quad (14)$$

Denklem (12), sistemin durum uzay formunda ifade edilebilmesi için Denklem (15)'de görülen hale getirilir.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \text{inv} \begin{bmatrix} \alpha_0 & -(\alpha_1 + \alpha_2) & -\alpha_2 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) & (\alpha_3 + 2\alpha_4) & (\alpha_5 + \alpha_4) \\ -\alpha_2 & (\alpha_5 + \alpha_4) & \alpha_5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_c - c\dot{x}_c \\ \alpha_1 g \alpha + \alpha_2 g(\alpha + \theta) - b_1 \dot{\alpha} - b_2(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) \\ \alpha_2 g(\alpha + \theta) - b_2(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Denklem (15)'den çıkarılan denklemler durum değişkenlerine göre düzenlenirse (Denklem (14)) ve sistem parametreleri yerine yazılırsa sistemin durum uzayı modeli Denklem (16)'da görüldüğü gibi elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,9351 & -1,0079 & -3,9269 & -0,0032 & 0,0008 \\ 0 & 73,4070 & -154,7904 & -24,5434 & -0,2501 & 0,0950 \\ 0 & -146,8140 & 533,3715 & 49,0868 & 0,7453 & -0,3125 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,9132 \\ 5,7078 \\ -11,4155 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [000] \quad (16)$$

SİSTEM KONTROLÜ (SYSTEM CONTROL)

Ters sarkaç sistemi doğrusal olmayan, kararsız, eksik tahrikli bir sistemdir. Bu özellikleri doğrultusunda kontrolü zor bir sistem olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla her denetleyici yapısı bu sistemin kontrolü için uygun olmamaktadır. Bu çalışmada arabalı çift ters sarkaç sistemine ait dengeleme kontrol problemi üzerine odaklanılmıştır. Dengeleme problemi için durum geri beslemeli kontrol uygun denetleyici yapıları arasındadır.

Durum geri beslemeli kontrol yapısının temelinde sistemin kapalı çevrim kararsız kutuplarının sistemi kararlı hale getirecek noktalara atanması vardır. Kutup atanmasının yapılabilmesi için sistemin durum değişkenlerinden ve kazanç matrisinden yararlanılmaktadır.

LQR Kontrolör (LQR Controller)

Durum geri beslemeli denetleyici tasarımında kritik noktalardan biri kazanç (K) matrisinin bulunmasıdır. LQR yöntemi bu amaçla kullanılan yöntemlerdendir. Bu yaklaşımda bir optimizasyon problemi çözülerek K matrisi elde edilmektedir. Denklem (17)'de verilen kontrol sinyalinin optimize edecek optimal geri besleme katsayıları maliyet fonksiyonunun (J) minimize edilmesi ile bulunmaktadır.

$$u(t) = -Kx(t) \quad (17)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (18)$$

Denklem (18)'de görülen maliyet fonksiyonu Q ve R olmak üzere iki parametreye bağlı olarak değişmektedir. Bu iki parametrenin seçimine bağlı olarak uygun kazanç matrislerinin elde edilmesi sağlanmaktadır. Q pozitif yarı – tanımlı bir matristir, R ise pozitif sabit bir sayıdır. Optimum kontrol sinyali, Denklem (19)'da verilen şekilde olmalıdır.

$$u(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t) = -Kx(t) \quad (19)$$

Bu denklemde görülen P cebirsel değeri ise Denklem (20)'de görülen Riccati diferansiyel denklemi yardımı ile elde edilir.

$$PA + A^T - PBR^{-1}P + Q = 0 \quad (20)$$

Riccati denkleminin çözümü olan P değeri ile artık K kazanç matrisi Denklem (21)'de görüldüğü gibi bulunabilir.

$$K = R^{-1} B^T P = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5 \quad k_6] \quad (21)$$

LQR Kontrolör Tasarımı – Ağırlık Matrislerinin Seçimi (LQR Controller Design – The Choice Of The Weighting Matrix)

Kontrol sistemlerinde oldukça önem taşıyan kontrolör performans kriterleri mevcuttur. Bunlardan ilki: sistemin referansa yani istenen duruma gitmesi için geçen zamandır. Bu kriter regülasyonun ne kadar hızlı olduğunu gösterir. İkinci kriter ise sistemin kontrolü için harcanan enerji miktarıdır. Bu iki kriterin çalışma mantığı birbirleriyle terstir. Çünkü bir sistemden hızlı cevap alınması istenirse, kontrol sinyalinin yüksek tutulması gerekir bu da harcanan enerji miktarının artması anlamına gelmektedir. Ya da harcanan enerjinin az olması isteniyorsa, sistemden istenen cevap daha uzun sürede alınacaktır.

Optimizasyon probleminin çözümü Q ve R parametrelerine bağlıdır. Bu parametrelerin seçiminin kontrolör performansına etkisi fazladır dolayısıyla seçimleri de oldukça önem taşımaktadır (Kizir, 2008).

Kontrolör tasarlanırken $Q = R$ seçilirse, sistemin kontrolü için harcanan enerji miktarı ile sistemin referansa gitmesi için geçen zaman eşit önemdedir. $Q > R$ ise sistemin referansa olabildiğince hızlı gitmesi daha önemlidir. Yani sistemden hızlı cevap alabilmek için harcanacak enerjinin fazla olması göz ardı edilmektedir. $Q < R$ durumunda ise harcanan enerji miktarının az olması istenmektedir. Az enerji harcanması için sistem cevabının yavaş olması sorun teşkil etmemektedir (Yaren, 2018). Q ve R ağırlık matrislerinin seçiminde bu durumlar göz önünde bulundurulmalıdır.

Kontrol sinyalinin durumu ise R parametresine göre değişmektedir. R parametresi ne kadar yüksek değerlikte seçilirse, üretilecek kontrol sinyali de o kadar düşük olacaktır. R 'nin seçimi kontrol sinyal genliğinin ayarlanmasında pratiklik sağlamaktadır.

Q matrisi, sistem durum değişkenlerinin her birinin ağırlık katsayısını içermektedir (Li, 2013). Bir durum değişkeninin ağırlık katsayısı ne kadar fazla ise o değişkenin kontrolü için o kadar fazla enerji gerekmektedir. Yani ağırlık katsayısı fazla olan değişkenin kontrolüne daha fazla ağırlık verilmektedir. Burada sistem özelliklerini bilmek önem taşımaktadır. Çünkü sistem durum değişkenlerinin özelliklerine göre hangi değişkene daha fazla ağırlık verilmesi gerektiği araştırmacı tarafından öngörülmelidir.

Optimal ve kararlı bir kontrolör sağlanmasına rağmen LQR, standart bir kontrol çözümü sağlayamaz. Optimizasyon probleminin birden fazla çözümü olabilir. Bu nedenle deneme yanılma yaparak istenen kontrol performansı elde edilebilir. Q ve R tasarım parametrelerinin farklı seçimleri, kapalı çevrim sistem için farklı kontrol performansları sağlamaktadır (Zhang ve Zhang, 2012).

LQR kontrolörün dezavantajı, sistem kontrolü için en uygun Q ve R 'yi verecek kesin bir yöntem bulunmamasıdır. Kullanılan yöntemler ise araştırmacı için doğru başlangıç noktasını belirlemeye yardımcı olmaktadır. Araştırmacı, başlangıç noktasından başlayarak en uygun $Q - R$ 'yi sistem modeli üzerinde testler gerçekleştirerek bulmaya çalışır. Tasarım kriterlerine en uygun kontrolörün elde edilebilmesi için ağırlık matrislerinde ayarlama yapar. Başlangıç noktasının doğru olması çözümü hızlı bir şekilde bulabilmek açısından araştırmacıya oldukça avantaj sağlamaktadır.

Tasarım hedeflerini karşılayabilecek bir ağırlık matrisi seçimi yapabilmek için kullanılan birkaç temel yöntem mevcuttur. Bunlardan ilki ve en basit olanı Q matrisinin, sistemin C durum matrisine bağlı olarak Denklem (22)'de görüldüğü gibi $C^T C$ şeklinde seçilmesidir.

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ağırlık matrisi seçiminde kullanılan bir diğer yöntem literatürde "Bryson's Rule" (Bryson ve Ho, 1975) olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemde Q ve R, Denklem (23)'de verilen ifadelerle seçilebilir. İlk yöntemde sadece sistem çıkışlarına ağırlık katsayısı verilmişti fakat sistemin sadece çıkışlarına değil tüm değişkenlerine ağırlık verilebilir. n durum değişkenli bir sistemde her bir durum değişkeninin ağırlık katsayısı o değişkenin maksimum kabul edilebilir hata miktarına göre belirlenebilmektedir. R değerinin belirlenmesi ise kontrol sinyalinin maksimum değerine bağlıdır.

$$Q_{ii} = \frac{1}{(x_{i\max})^2}, i = 1, 2, \dots, n \quad R = \frac{1}{(u_{\max})^2} \rho \quad (23)$$

Örneğin; bir sistemdeki araba konumu için maksimum kabul edilebilir hata miktarı 0.1 m olsun. Bu durumda "Bryson's Rule" yöntemine göre Q matrisinde araba konumunun ağırlık katsayısı 100 seçilebilir. Burada önemli olan değişkenlerin birimlerine dikkat ederek katsayıların belirlenmesidir. Ayrıca sisteme uygulanabilecek maksimum gerilim değerinin 7 V olduğunu varsayalım. Bu durumda R parametresi (1/49) olarak bulunabilir. Bu yöntem uygun kontrolör seçimi için olası başlangıç noktasını verir. Sistem çıkışına göre istenen çıkışın elde edilebilmesi için de parametre ayarı yapılır.

Durum Geri Besleme Kazancının Bulunması (Determination Of The State Feedback Gain)

Kontrolör tasarımı için sistem yapısının analizi gerekmektedir. Çift çubuklu ters sarkaç sistemine bakıldığında bazı kısıtlar olduğu görülmektedir. Arabanın yatayda hareket edeceği alan sınırlıdır. Arabanın hareket alanına göre kontrolörün davranış biçimi de değişecektir. Araba konumunun sınırı olduğu için bu sistem değişkeninin ağırlık katsayısı çok düşük tutulmamalıdır. Çubuk açılarının ve araba konumunun dengeleme probleminin çalışma aralığında bulunması gerekmektedir. Yani bu sistem çıkışlarının fiziksel sınırları mevcuttur. Fakat hız değişkenleri için bir sınırlama söz konusu değildir. Dolayısıyla pozisyon değişkenlerinin ağırlık katsayıları hız değişkenlerine göre çok yüksek tutulmalıdır.

Çubuklar düşmeye başlarsa buna bağlı olarak arabanın doğrusal hızı çok hızlı bir şekilde değişecektir. Bu istenmeyen bir durumdur. Bu nedenle bu durumun engellenmesi için araba hız değişkeninin ağırlık katsayısı olabildiğince düşük seçilmelidir.

Kontrolör tasarımı için çubukların açıları için kabul edilebilir maksimum hatanın 0,02 rad olduğunu varsayalım. Araba konumu ise 0,01 m olsun. Bu durumda Q matrisi Denklem (24)'deki gibi elde edilir.

$$Q_{11} = \frac{1}{(0,01)^2} = 10000, Q_{22} = Q_{33} = \frac{1}{(0,02)^2} = 2500$$

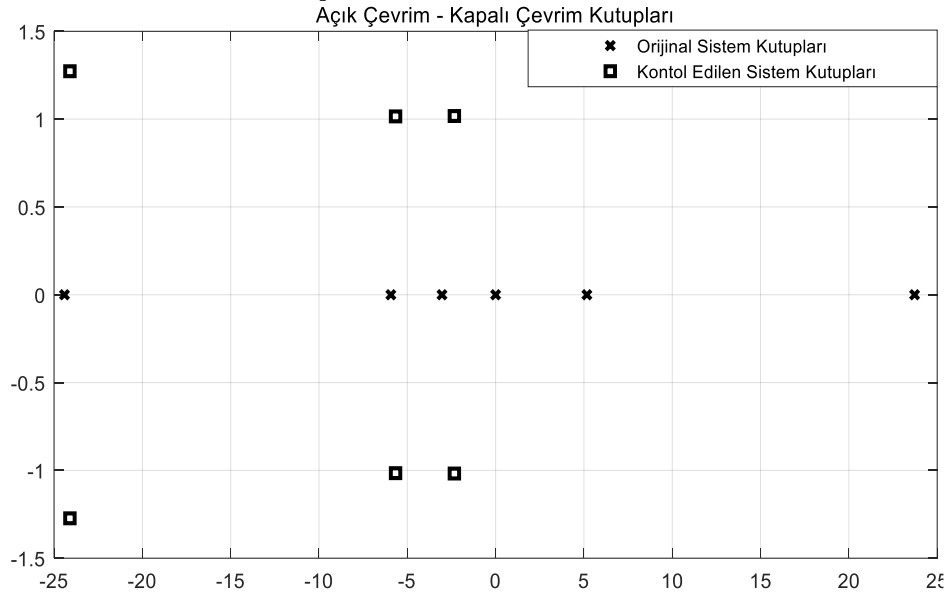
$$Q = \begin{bmatrix} 10000k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2500k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2500k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

k katsayısı (1/100) olarak seçilirse Q matrisinin güncel hali Denklem (25)'de görüldüğü gibi olur. Ayrıca R = 1 olarak seçilirse bu ağırlık matrislerine göre kontrolör performansı incelenebilir.

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R=1 \quad (25)$$

Denklem (25)'de verilen Q ve R parametrelerine göre elde edilen kazanç matrisi sistem Simulink modeline uygulanmış ve sistemin kontrolünün sağlandığı görülmüştür. Sisteme uygulanan kazanç matrisi Denklem (26)'da verilmiştir.

$$K=[10 \ -42,47 \ -202,34 \ 7,15 \ -15,99 \ -12,65] \quad (26)$$



Şekil 2. Kararlı – kararsız sistem kutupları

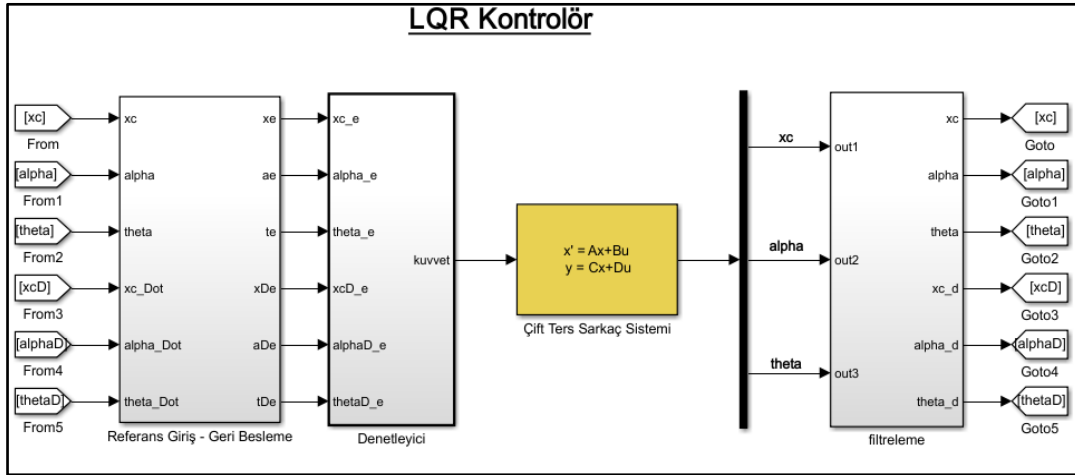
Figure 2. Stable – unstable system poles

Şekil 2'de orijinal sistem kutupları ile kontrol sonucu elde edilen kutuplar görülmektedir. Grafikten de anlaşılacağı üzere kutuplar kontrol sonucunda kararsız noktalardan kararlı noktalara taşınmıştır. Yani durum geri beslemeli kontrol yapısının temelinde olduğu gibi sistemin durum değişkenlerinden ve kazanç matrisinden yararlanılarak kontrol sonucu sistemin kararsız kutupları sistemi kararlı hale getirecek noktalara atanmıştır. Elde edilen kazanç matrisi ile sistem kararlı hale gelmiştir fakat bu çözüm kontrol probleminin tek çözümü değildir. Farklı Q ve R seçimleri ile farklı performansta denetleyiciler elde edilebilir. Farklı Q ve R seçimlerinin sistem kontrolü üzerinde etkileri benzetim modelinde incelenecektir.

BENZETİM SONUÇLARI (SIMULATION RESULTS)

LQR Simulink Modeli (LQR Simulink Model)

Durum uzayı modeli sistemin gerçek davranış biçimini içerdiğinden; Simulink ortamında arabalı çift ters sarkaç sisteminin durum uzay matrislerinin benzetim modelinin oluşturulması ile sistem analizi kolaylıkla yapılabilir. Ayrıca bu benzetim modeline kontrolör yapısının eklenmesi ile de tasarlanan kontrolörün performansı incelenebilir ve gerekli düzeltmeler kolaylıkla yapılabilir.



Şekil 3. LQR kontrolör Simulink modeli

Figure 3. LQR controller Simulink model

LQR kontrolör yapısının oluşturulduğu Simulink modeli Şekil 3’de görülmektedir. Çift ters sarkaç sisteminin üç çıkışı vardır. Bunlar: arabanın konumu, birinci ve ikinci sarkaç açılarıdır. Dolayısıyla Simulink modelindeki durum uzayı bloğunun çıkışından da bu üç çıkış değişkeni elde edilir. Fakat durum geri beslemeli kontrolcünün sisteme uygulanabilmesi için tüm değişkenlerin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle Simulink modelindeki filtreleme bloğunda, pozisyon bilgilerinin türevi ikinci dereceden alçak geçiren türev filtresi ile alınarak hız bilgileri elde edilmektedir. Böylece sistemin tüm durum değişkenleri erişilebilir durumdadır ve tam geri besleme sağlanabilmektedir. (Gerçek zamanlı uygulamalarda ölçüm gürültüleri, filtre gecikmeleri gibi kontrolör performansını olumsuz etkileyecek etkileri yok etme amacıyla filtreleme bloğu geliştirilebilir; fakat bu çalışmada ikinci dereceden alçak geçiren türev filtresi yeterlidir.)

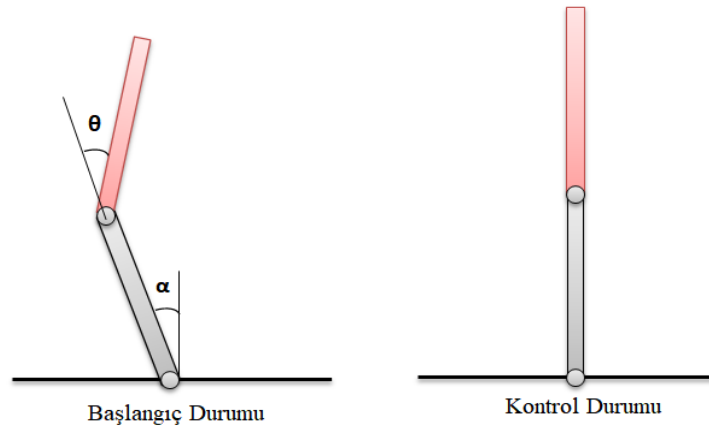
Geri beslenen durum değişkenlerinin referanslarla karşılaştırılması ile her bir durum için hata bilgisi elde edilir. Bu hata verileri de kazanç matrisi ile çarpılır. Kontrolörün performansı direkt olarak bu kazanç matrisi ile ilişkilidir. Kazanç matrisi de Q ve R ağırlık matrislerine bağlı olarak elde edilmektedir. Fakat ilk elde edilen kazanç matrisinin performansının çok iyi olması beklenemez. Çünkü daha önce bahsedilen ağırlık matrislerinin seçimi için izlenebilecek yollar sadece başlangıç noktasının belirlenmesine yardımcı olmaktadır. Bu başlangıç noktasından yola çıkılarak benzetim ortamında kontrolörün davranış biçimi incelenir ve iyileştirilmesi için ağırlık matrislerinde gerekli değişiklikler yapılarak, sonuçlar gözlenir.

Benzetim ortamında, ağırlık katsayılarındaki değişimlerin değişkenlerin davranış biçimini nasıl etkilediği, kontrol sinyalindeki değişimler, değiştirilen koşulların kontrolörün performansına etkisi kolay bir şekilde gözlenebilir. Gözlenen durumlara göre de kontrolör tasarımı iyileştirilebilir. Aynı zamanda gerçek zamanlı kontrol uygulamaları için de benzetim çalışmaları referans niteliğindedir. Çünkü benzetim ortamında kontrolörün davranış biçiminin analizi yapılır ve gerçek zamanlı uygulamada da bu davranış biçiminin görülmesi beklenir. Beklenen davranış biçimine göre sistem üzerinde gerekli düzenlemeler yapılır.

LQR Kontrolör Benzetim Sonuçları (Simulation Results Of LQR Controller)

Sistem belirli başlangıç koşulunda iken kontrolör farklı ağırlık matrisleri ile uygulanacaktır. Böylece farklı ağırlık matrislerinin kontrolör performansına etkisinin gözlenebilmesi amaçlanmıştır.

Başlangıç koşulu $[0 \ 0,1 \ -0,05 \ 0 \ 0 \ 0]$ şeklindedir. Birinci çubuğun başlangıç değeri 0,1 radyan, ikinci çubuğun başlangıç değeri -0,05 radyan, diğer durum değişkenlerinin ise 0’dır. Şekil 4’de sistemin bu koşullardaki başlangıç durumu ve kontrolörün devreye girmesiyle sistemin ne duruma geleceği görülmektedir.



Şekil 4. Sistemin $[0 \ 0,1 \ -0,05 \ 0 \ 0 \ 0]$ başlangıç koşulu ve kontrol durumu

Figure 4. Initial condition as $[0 \ 0,1 \ -0,05 \ 0 \ 0 \ 0]$ and control status of the system

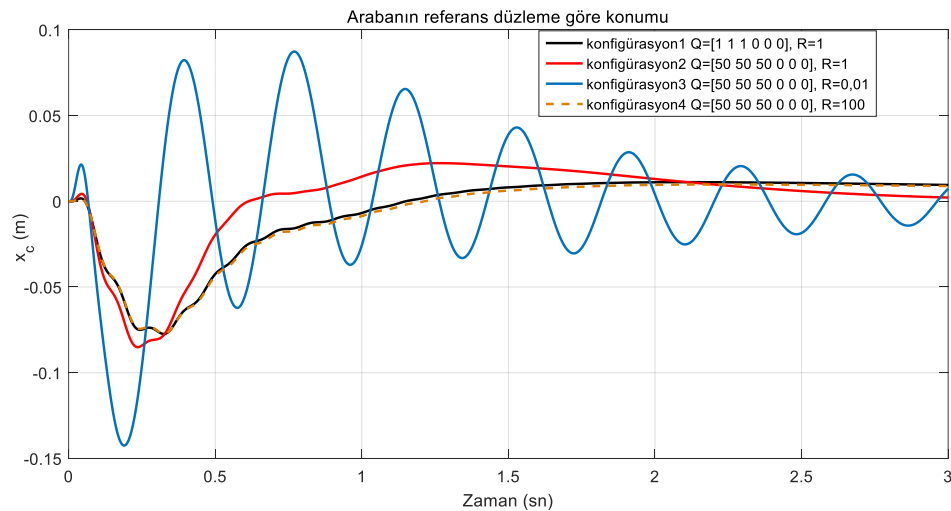
Farklı Ağırlık Matrisleri (Different Weight Matrices)

Farklı Q ve R matrisleri için verilen başlangıç koşulunda kontrolörün davranışı incelenecektir. Kontrolör tasarımında, en uygun olabilecek ağırlık matrislerine karar verilmişti, burada amaç ağırlık matrislerinin etkisini gözleyebilmektir. İncelenen konfigürasyonlar sırasıyla $\{(Q = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 1)$, $(Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 1)$, $(Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 0,01)$, $Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 100\}$ şeklindedir. Bu konfigürasyonlar altında tüm sistem değişkenlerinin yanıtı ve kontrol sinyalinin durumu ayrıntılı bir şekilde Şekil 5 – 11 arası çizdirilmiş ve gerekli karşılaştırmalar yapılmıştır. Ayrıca Çizelge 2’de elde edilen kazanç matrisleri verilmiştir.

Çizelge 2. Farklı konfigürasyonlardaki kazanç matrisleri

Table 2. Gain matrices in different configurations

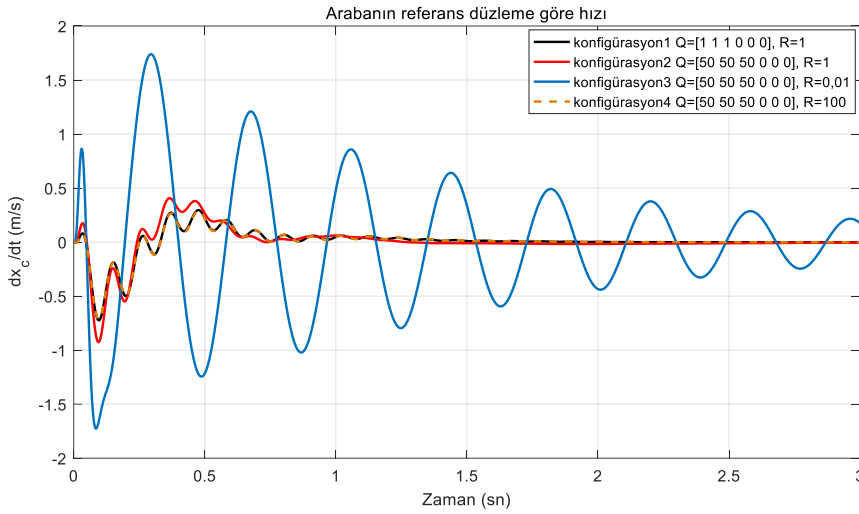
Konfigürasyon	K_{x_c}	K_α	K_θ	$K_{\dot{x}_c}$	$K_{\dot{\alpha}}$	$K_{\dot{\theta}}$
1	1.00	-22.3	-183.2	0.76	-11.48	-10.76
2	7.07	-36.97	-197.81	5.20	-14.75	-12.16
3	70.7	-195.4	-363.88	50.66	-49.47	-27.15
4	0.70	-21.63	-182.55	0.54	-11.32	-10.69



Şekil 5. x_c sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 5. Response of x_c system variable in different configurations

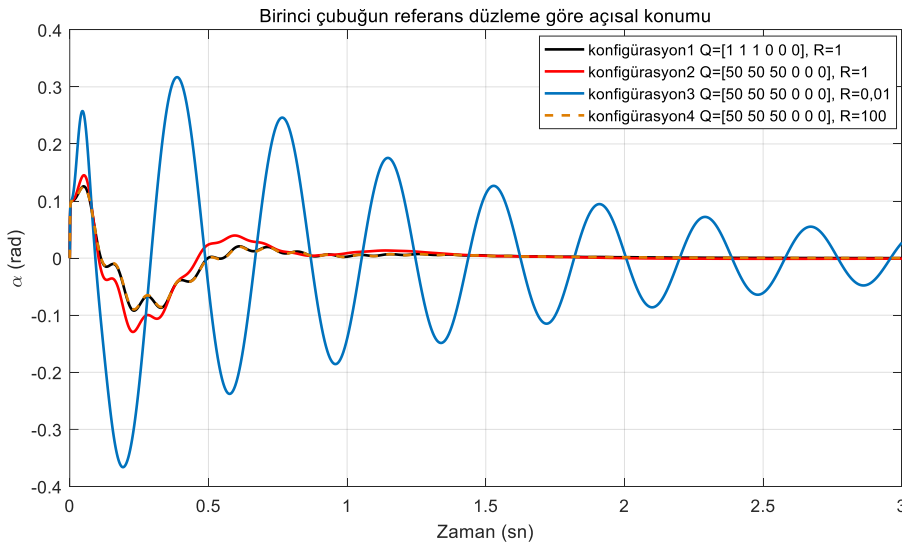
İlk olarak en basit şekilde $Q = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 1$ olarak seçilmiştir (konfigürasyon1). (Araba konumu ile sarkaçların açılarının ağırlıkları 1 alınmıştır.) Bu konfigürasyon için Şekil 5-10 arası sistem değişkenleri incelendiğinde her bir değişkenin belirli bir süre sonra referans noktasına (0) oturduğu gözlenmektedir. Yani Şekil 4’de görülen kontrol durumu elde edilmektedir. Çubukların denge konumuna gelirken fazla salınım yaptığı görülmektedir. Bu istenmeyen bir durumdur çünkü her salınımında kontrolör bu salınımı yok edecek şekilde kontrol sinyali üretir ve bu da sistemde harcanacak enerjinin fazla olmasına sebep olur. Arabanın ise denge konumuna gelme zamanı daha da azaltılabilir çünkü araba konumu için yerleşme zamanı fazladır. Ayrıca farklı ağırlık matrisleri ile çubukların açı grafiklerindeki aşım da azaltılabilir. Burada önemli olan performans kriterlerine göre en iyi performansı sağlayacak ağırlık matrislerini bulabilmektir.



Şekil 6. \dot{x}_c sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 6. Response of \dot{x}_c system variable in different configurations

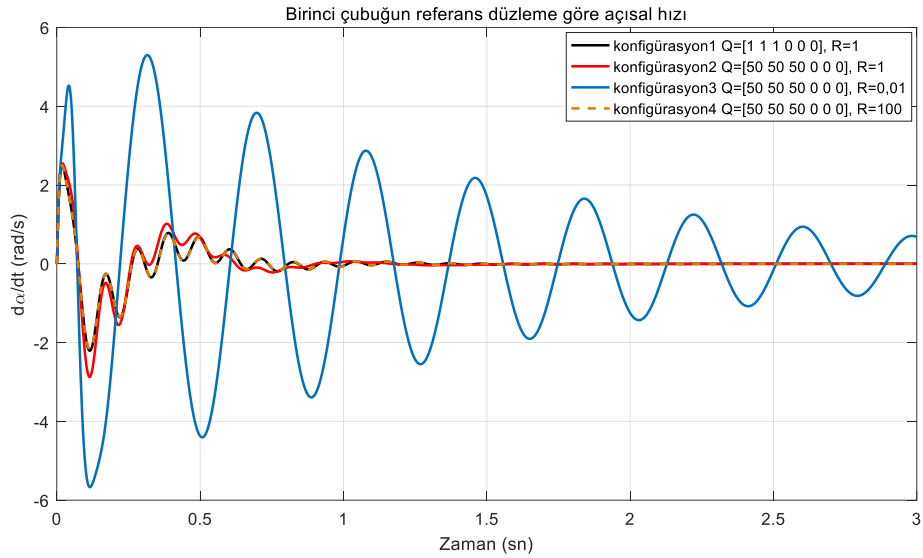
İkinci olarak $Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 1$ olarak seçilmiştir (konfigürasyon2). Sistem durum değişkenlerinin ağırlık katsayıları aynı derecede arttırılmış, R ise sabit kalmıştır. Burada sistem değişkenlerinin ağırlık katsayılarının etkisinin gözlenebilmesi amaçlanmıştır. x_c değişkeninin yanıtı ilk iki konfigürasyon için karşılaştırıldığında (Şekil 5), ağırlık katsayısının artması sonucu yerleşme zamanının önemli ölçüde azaldığı görülmektedir. Ayrıca aşım artmıştır fakat bu artış büyük miktarda olmamıştır.



Şekil 7. α sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 7. Response of α system variable in different configurations

Ağırlık katsayısının 50 olarak seçildiği durumda birinci ve ikinci çubukların pozisyon verilerine bakıldığında çubukların dengelenirken yaptığı salınımın ilk duruma göre azaldığı görülmektedir (Şekil 7 ve 9). İki durum arasında yerleşme zamanı açısından önemsenecek bir fark yoktur. Aşımında ise küçük bir miktar artış oluşmuştur.

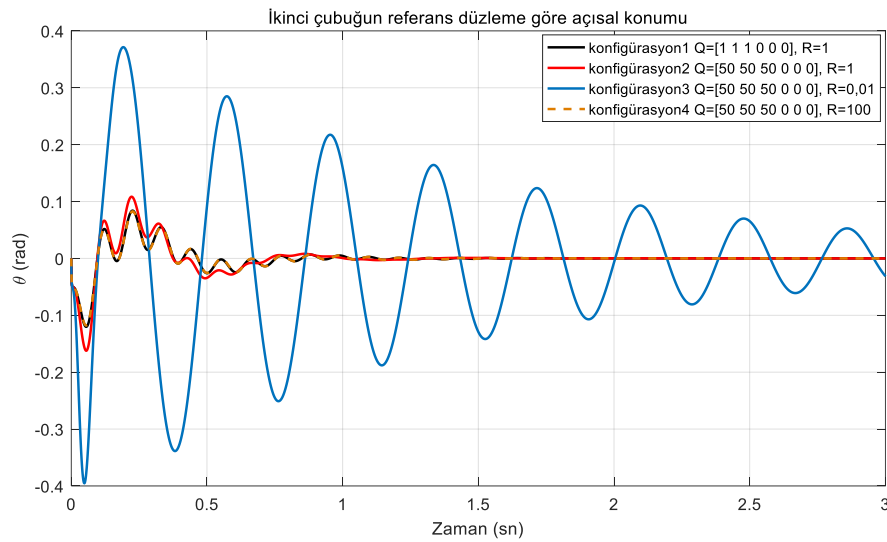


Şekil 8. $\dot{\alpha}$ sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 8. Response of $\dot{\alpha}$ system variable in different configurations

Hız bilgisi pozisyon bilgisine bağlı olarak üretilir. Dolayısıyla pozisyondaki değişiklikler hız bilgisine de yansyacaktır. Bu yüzden pozisyonda olduğu gibi hızda da ilk duruma göre salınım azalmıştır.

Q matrisi R'ye göre büyük seçildiğinde, denetleyicinin hızı ön plana çıkarılmaktadır. Yani sistemde hızlı regülasyon sağlamak için yüksek kontrol sinyali kullanılmasına tolerans gösterilmektedir. Her iki durumdaki kontrol sinyali incelendiğinde; $Q > R$ durumunda daha yüksek genlikli kontrol sinyalinin olduğu görülmektedir. Bahsedilen durum karşılaştırma ile gözlenmiştir.

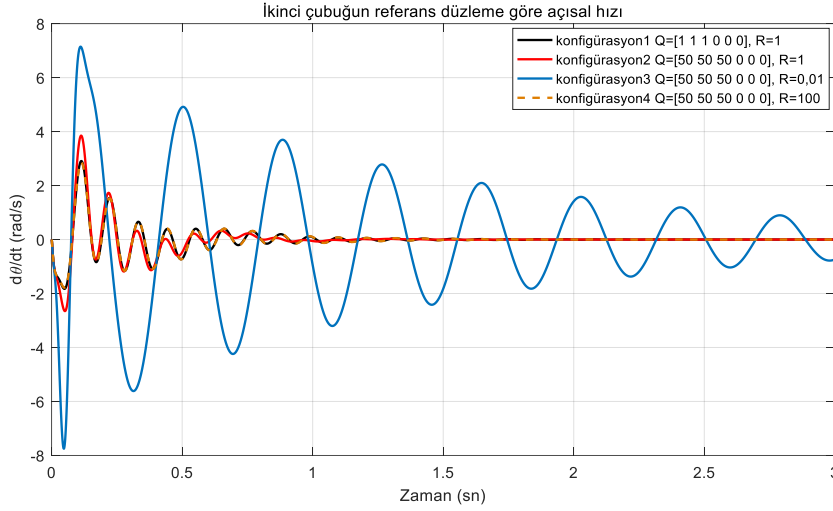


Şekil 9. θ sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 9. Response of θ system variable in different configurations

$Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 0,01$ olarak seçildiğinde ise (konfigürasyon3) daha önce verilen koşullarda elde edilen sonuçlara göre tüm sistem değişkenlerinde salınımın çok fazla arttığı

görülmektedir. Çubuklar dengelenirken büyük genlikli salınımlar yapmaktadır ve kontrolör bu salınımları yok etmek için daha fazla kontrol sinyali üretmektedir. Ayrıca sistem değişkenlerinin dengelenmesi için geçen süre yani yerleşme zamanı artmıştır ve bu artış istenmeyen bir durumdur. Elde edilen sonuçlara göre bu koşullarda kontrolör dengelemeyi başarsa bile performansının başarılı olmadığı söylenebilir.

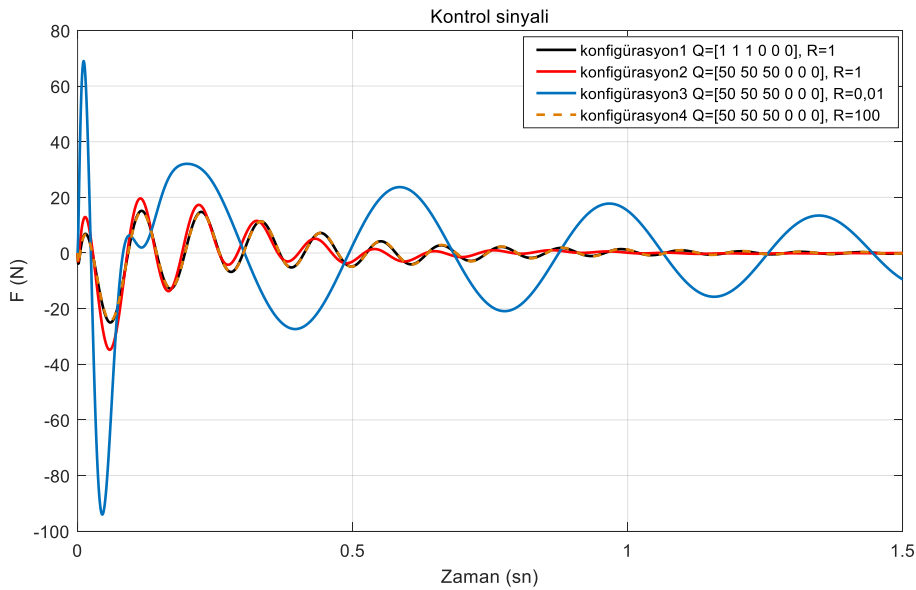


Şekil 10. θ sistem değişkeninin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 10. Response of θ system variable in different configurations

Son olarak $Q = \text{diag}(50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0)$ ve $R = 100$ olarak seçilmiştir (konfigürasyon4). $R > Q$ durumunda regülasyonun uzun olması yani sistemin yavaş dengeye oturması tasarımcı için bir problem teşkil etmemektedir. Bu durumda sistemde az enerji harcamak önemlidir ve diğer durumların etkisi ihmal edilir.

Önceki iki durumda elde edilen kontrol sinyalleri ile bu durumda elde edilen kontrol sinyali karşılaştırıldığında, daha küçük genlikli kontrol sinyali elde edildiği görülmüştür (Şekil 11). Ayrıca yerleşme zamanı diğer durumlara göre artmıştır.



Şekil 11. Kontrol sinyalinin farklı konfigürasyonlardaki yanıtı

Figure 11. Response of control signal in different configurations

Geçici ve kalıcı durum kontrol cevap parametrelerinin (yerleşme zamanı, yükselme zamanı, maksimum aşım, kalıcı durum hatası, pik değer vb.) incelenmesi ile etki analizinin detaylandırılması mümkündür. Detaylandırmaya örnek olarak Çizelge 3 hazırlanmıştır. Görüldüğü üzere her bir konfigürasyon için sistem çıkış değişkenlerinin bazı kontrol cevap parametreleri karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3. Sistem çıkış değişkenlerinin her bir konfigürasyondaki yanıt parametreleri

Table 3. Response parameters of system output variables in each configuration

Çıkış Değişkeni		Yükselme Zamanı	Yerleşme Zamanı	Maksimum Aşım	Pik
x_c	Konfigürasyon1	1.3081	3.9423	89.9864	0.0774
	Konfigürasyon2	0.0015	3.0948	6.2007e+04	0.0851
	Konfigürasyon3	0.0063	4.8555	3.6748e+03	0.1425
	Konfigürasyon4	1.4344	3.6078	55.5372	0.0772
α	Konfigürasyon1	1.7329e-05	1.7373	2.6851e+05	0.1257
	Konfigürasyon2	2.1619e-06	1.6309	1.6869e+06	0.1451
	Konfigürasyon3	9.2792e-05	4.8660	3.9988e+03	0.3662
	Konfigürasyon4	9.7204e-06	1.7318	4.7457e+05	0.1247
θ	Konfigürasyon1	2.7011e-09	1.1573	1.0682e+08	0.1202
	Konfigürasyon2	2.2201e-08	0.9636	1.7543e+07	0.1623
	Konfigürasyon3	1.9559e-04	4.8635	4.7499e+03	0.3953
	Konfigürasyon4	2.2259e-09	1.1623	1.2722e+08	0.1180

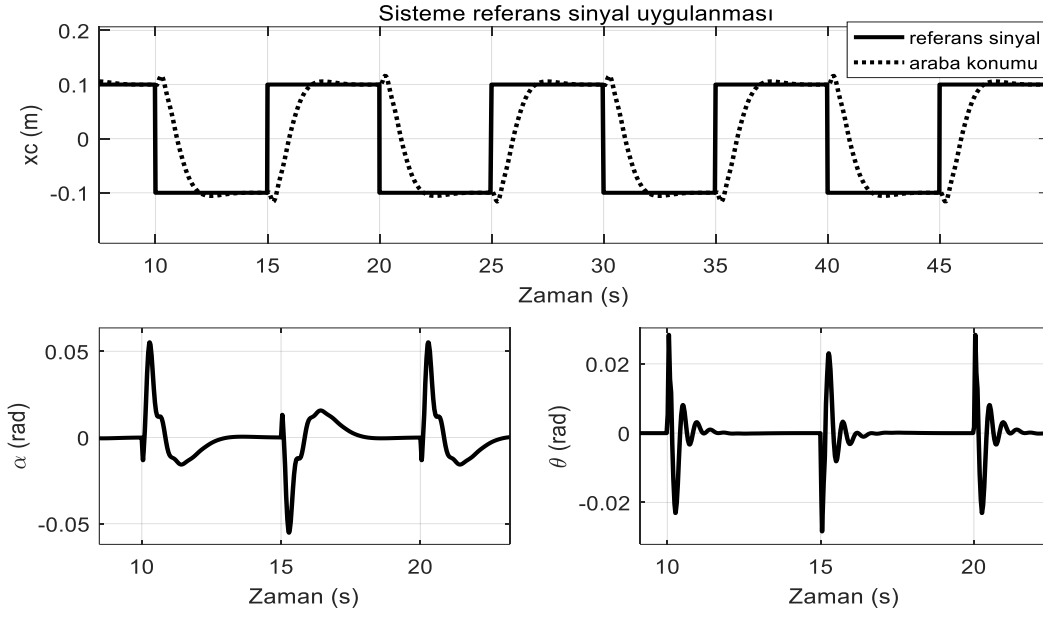
Kontrolör performans kriterlerine göre farklı Q ve R ağırlık matrisleri ile optimizasyon yapılabilir ve böylece daha iyi kontrolör performansı elde edilebilir. Yapılan karşılaştırmalarda görüldüğü gibi farklı durumların sistem üzerinde farklı etkileri vardır. Bu etkilerin istenen şekilde ortaya çıkması ise tasarımcının seçimine bağlıdır. Ayrıca ağırlık matrisleri seçimi başlığında bahsedildiği gibi sistemin davranış biçimine göre çubukların ağırlığı ile arabanın ağırlığı aynı değildir. Dolayısıyla değişkenlerin ağırlık katsayılarının ayrı ayrı değiştirilmesi ile sonuçlar gözlenerek kontrolör performansı daha da iyileştirilebilir.

Sistemin Referans Sinyali Takibi (System Reference Signal Tracking)

Sistem Denklem (26)'daki kazanç matrisinin uygulanması ile denge durumunda iken arabaya Şekil 12'de görülen referans sinyal uygulanmıştır. Kontrolörden istenen arabanın referans sinyali başarı ile takip etmesi ve bu takibi gerçekleştirirken çubukların dengesinin bozulmamasıdır. Sistem denge halinde iken arabanın hareket etmesi, çubuklar için bozucu etki oluşturacaktır. Önemli olan; oluşan bu bozucu etkiyi kontrolörün yok edebilmesidir.

Şekil 12'de referans sinyalin sisteme uygulanması sonucunda sistem çıkışlarının nasıl davrandığı görülmektedir. Görüldüğü üzere araba $\pm 0,1$ m. referans noktalara ulaşarak referans sinyali başarı ile takip etmekte ve belirlenen süre boyunca dengede kalmaktadır. Ayrıca grafikte sisteme uygulanan referans sinyal sonucunda çubukların konumlarındaki değişimler görülmektedir.

Çubuklar arabanın referans noktasına gitmek için harekete başladığı anda salınım yapmaktadırlar. Bu salınım arabanın hareketinden doğan bozucu etki sebebiyle oluşmaktadır. Kontrolör bu salınımları uygun kontrol sinyali ile yok ederek çubukların denge halinin bozulmasını engellemiştir. Grafikte salınımlardan sonra çubukların tekrar 0° denge konumlarına geldiği açıkça görülmektedir.



Şekil 12. Referans sinyal uygulanması sonucunda sistem çıktıları

Figure 12. System outputs as a result of reference signal implementation

SONUÇ (RESULT)

Bu çalışmada, kontrol sistemleri uygulamalarında oldukça tercih edilen ters sarkaç sistem türlerinden olan doğrusal tahrikli çift çubuklu ters sarkaç sisteminin Lagrange tabanlı modellenmesi detaylarıyla verilmiş, denge kontrolü tam durum geri besleme yöntemi, Bryson kuralı ve doğrusal karesel regülatör kullanılarak gerçekleştirilmiş ve benzetim çalışmaları MATLAB – Simulink ortamında gerçekleştirilmiştir. Benzetim sonuçları; gerçek zamanlı uygulanacak denge kontrol problemlerine zemin oluşturmuştur. Ayrıca LQR kontrolcü parametrelerinin etkileri detaylı bir şekilde ele alınarak kontrol algoritması tasarım süreci iyileştirilmiş ve birçok endüstriyel sistemin kontrol çalışmaları için teorik altyapı oluşturulmuştur. Böylelikle gerek tasarlanacak kontrolcü performansları, gerekse mevcut kontrolcü performanslarının iyileştirilmesi bakımından olumlu katkı sağlanmıştır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Bilgiç, H. H., Conker, Ç., Yavuz, H., Şen, M. A. 2015, "Sarkaç Tipi Bir Tepe Vincinin Kontrolüne Bulanık Yaklaşım," Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu, 14-17 Haziran 2015, İzmir.
- Block, D. J., 1996, "Mechanical Design and Control of the Pendubot," Yüksek Lisans Tezi, University of Illinois, Illinois.
- Bogdanov, A. 2004, "Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart," Oregon Health and Science University, Tech. Rep. CSE-04-006, OGI School of Science and Engineering, Beaverton, OR.
- Boubaker, O. 2012, "The Inverted Pendulum: A Fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics," In Education and e-Learning Innovations (ICEELI), 2012 International Conference, 1-3 July 2012, Sousse, Tunus, p. 1-6.
- Bryson, A. E., Ho Y.-C., 1975, "Applied optimal control: optimization, estimation, and control," Taylor & Francis Group.
- Colobert, B., 2006, "Force-Flate Based Computation of Ankle and Hip Strategies from Double-Inverted Pendulum Model," Clinical Biomechanics, vol. 21(4), p. 427-434.
- Kızır, S. 2008, "Doğrusal Olmayan Ters Sarkaç Sisteminin Tasarımı ve Kontrolü," Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.

- Kızir, S. 2019, "Denge Kontrol Sisteminin LQR ile Gerçek Zamanlı Durum Geri Beslemeli Kontrolü," Politeknik Dergisi.
- Li B., 2013, "Rotational Double Inverted Pendulum," Yüksek Lisans Tezi, University Of Dayton, Dayton, Unites States.
- Mifsud, A., Benallegue, M., Lamiroux, F. 2016, "Stabilization of a Compliant Humanoid Robot Using Only Inertial Measurement Units with a Viscoelastic Reaction Mass Pendulum Model," Rapport LAAS, 16063, hal-01285643.
- Nagasaki, T., Kajita, S., Yokoi, K., Kaneko, K., Hirukawa, H., Tanie, K. 2003, "Running Pattern Generation for a Humanoid Robot," Journal-Robotics Society of Japan, vol. 21(8), p.74-80.
- Özkan, B. 2009, "Mekatronik Sistemlerde Uygulanan Belli Başlı Kontrol Yöntemleri," Tubav Bilim Dergisi, Cilt:2, Sayı:3, Sayfa: 302-316.
- Poorhossein, A., Vahidian, K. A. 2010, "Design and Implementation of Sugeno Controller for Inverted Pendulum on a Cart System," In IEEE 8th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, 10-11September 2010, Subotica, Serbia, p. 641-646.
- Suzuki, Y., et al. 2012, "Intermittent Control with Ankle, Hip, and Mixed Strategies during Quiet Standing: A Theoretical Proposal Based on a Double Inverted Pendulum Model," Journal of Theoretical Biology, vol. 310, p. 55-79.
- Şen, M. A., Bilgiç, H. H., Kalyoncu, M. 2016, "Çift Ters Sarkaç Sisteminin Denge ve Konum Kontrolü için Arı Algoritması ile LQR Kontrolcü Parametrelerinin Tayini," Mühendis ve Makina, cilt 57, sayı 679, s. 53-62.
- Wanli, Z., Guoxin, L., Lirong, W. 2014, "Research on the Control Method of Inverted Pendulum Based on Kalman Filter," In Dependable, Autonomic and Secure Computing (DASC), IEEE 12th International Conference, 24-27 August 2014, Dalian, China, p. 520-523.
- Yaren, T. 2018, "Doğrusal Tahrikli Çift Çubuklu Ters Sarkaç Sisteminin Tasarımı ve Denge Kontrolü," Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.
- Zhang, J., Zhang W., 2012, "LQR Self-Adjusting Based Control for the Planar Double Inverted Pendulum," International Conference on Applied Physics and Industrial Engineering, 24, 1669 – 1676.