



## Free vibration analysis and damage localization in tapered beams with cracks using finite element method

Volkan Kahya<sup>1</sup>, Sebahat Karaca<sup>1</sup>, Sevgi Dilara Güneş<sup>1</sup>

Karadeniz Technical University, Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, 61080, Trabzon, Turkey

### Highlights:

- Effect of the number of cracks and the damage severity on modal characteristics
- Effect of taper ratio and boundary conditions on modal characteristics
- Damage localization by the modal curvature change

### Keywords:

- Tapered beam
- Finite element method
- Free vibration
- Modal curvature

### Article Info:

Received: 29.03.2020

Accepted: 20.10.2020

### DOI:

10.17341/gazimmfd.711044

### Correspondence:

Author: Volkan Kahya  
e-mail: volkan@ktu.edu.tr  
phone: +90 530 223 2169

### Graphical/Tabular Abstract

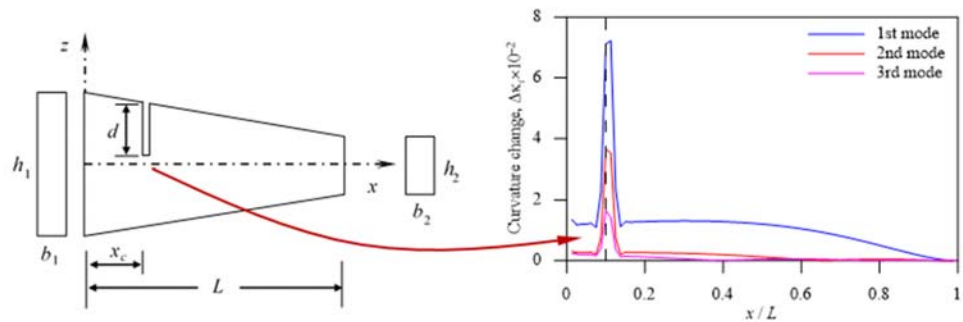


Figure A. Localization of damages by modal curvature changes

**Purpose:** A finite element model with two nodes and four degrees of freedom per node (horizontal and vertical translations, rotation, and curvature) is presented for free vibration analysis of damaged tapered beams.

### Theory and Methods:

Stiffness and mass matrices for Bernoulli-Euler beams with variable cross-sections are derived by using the Galerkin method. In the finite element formulation, linear Lagrange polynomials for extensional vibrations and fifth-order Hermitian polynomials for bending vibrations are chosen. Damage is introduced using a stiffness loss coefficient to the element stiffness matrix. The mass matrix is assumed to be unchanged due to the damage effect.

### Results:

The proposed element gives accurate results based on the comparisons with the available literature and ANSYS® finite element modal analysis results. Taper ratio and boundary conditions considerably affect the natural frequencies. Modal curvature changes are very successful in locating damages on the beam in comparison with the changes in mode shapes and modal slopes.

### Conclusion:

The finite element proposed in this study has very effective in determining the modal characteristics of tapered beams including multiple damages. Its results can be directly used to determine the crack locations very accurately since it provides the exact modal curvature values as a result of the eigenvalue problem.



## Sonlu elemanlar yöntemi ile çatlaklı konik kirişlerde serbest titreşim analizi ve hasar konumlarının belirlenmesi

Volkan Kahya\*<sup>ID</sup>, Sebahat Karaca<sup>ID</sup>, Sevgi Dilara Güneş<sup>ID</sup>

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080 Trabzon, Türkiye

### Ö N E Ç İ K A N L A R

- Çatlak sayısı ve uzunluğunun modal karakteristikler üzerindeki etkisi
- Koniklik oranı ve sınır şartlarının modal karakteristikler üzerindeki etkisi
- Modal eğrilik değişimi ile hasar konumlarının belirlenmesi

### Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 29.03.2020

Kabul: 20.10.2020

### DOI:

10.17341/gazimmfd.711044

### Anahtar Kelimeler:

Konik kiriş,  
Hasar,  
sonlu elemanlar yöntemi,  
serbest titreşim,  
modal eğrilik

### ÖZET

Bu çalışmada, hasarlı konik kirişlerin serbest titreşim analizleri için iki düğüm noktalı ve her bir düğüm noktasında dörder serbestliği (yatay ve dikey ötelenme, dönme ve eğrilik) bulunan bir sonlu eleman modeli sunulmuştur. Değişken kesitli Bernoulli – Euler kirişi için rijitlik ve kütle matrisleri Galerkin yöntemi ile elde edilmiştir. Sonlu eleman formülasyonunda, uzama titreşimleri için doğrusal Lagrange, eğilme titreşimleri için ise beşinci dereceden Hermit polinomları seçilmiştir. Hasarın tanımlanması için eleman rijitlik matrisi bir rijitlik kaybı katsayısı ile çarpılmıştır. Hasar sebebiyle eleman kütle matrisinde değişim olmadığı kabul edilmiştir. Önerilen elemanın doğruluğu, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırmalar yapılarak gösterilmiştir. Modal eğrilik değişiminin hasar (çatlak) konumlarının bulunmasındaki başarısını göstermek amacıyla bazı sayısal sonuçlar sunulmuştur.

## Free vibration analysis and damage localization in tapered beams with cracks using finite element method

### H I G H L I G H T S

- Effect of the number of cracks and the damage severity on modal characteristics
- Effect of taper ratio and boundary conditions on modal characteristics
- Damage localization by the modal curvature changes

### Article Info

Research Article

Received: 29.03.2020

Accepted: 20.10.2020

### DOI:

10.17341/gazimmfd.711044

### Keywords:

Tapered beam,  
Damage,  
finite element method,  
free vibration,  
modal curvature

### ABSTRACT

In this study, a finite element model with two nodes and four degrees of freedom per node (horizontal and vertical translations, rotation and curvature) is presented for free vibration analysis of tapered beams with damages. Element stiffness and mass matrices for Bernoulli-Euler beam with variable cross-section are derived by using the Galerkin method. In the finite element formulation, linear Lagrange polynomials for extensional vibrations and fifth-order Hermitian polynomials for bending vibrations are chosen. Damage is introduced by a stiffness loss coefficient to the element stiffness matrix. The element mass matrix is assumed to be unchanged due to the damage effect. The accuracy of the proposed element is shown by comparison with available literature. Some numerical results are presented to show the success of modal curvature change in finding damage (crack) locations.

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüz yapılarında güvenlik ve estetik açıdan en üst seviyeye en az maliyetle ulaşılmak istenilmesi, yapıdaki fazla malzemenin en aza indirilmesini gerektirmekte; bu da yapısal taşıyıcı elemanların (kiriş, kolon vb.) değişken kesitli olarak yapılması sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Değişken kesitli kirişler, inşaat, makine, havacılık ve gemi mühendisliğinde yapısal taşıyıcı elemanlar olarak yaygın kullanıma sahiptirler. Bu sebeple, bu tür yapısal elemanların dinamik özelliklerinin anlaşılması önemli bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kirişler, genelde çatlak tipi hasarların meydana geldiği taşıyıcı elemanlardır. Yapıda hasar, rijitlik kaybına sebep olmakta ve dolayısıyla sistemin genel davranışını önemli ölçüde etkilemektedir. Bu sebeple, yapısal hasarların tespiti ve bunlara karşı gerekli önlemlerin alınması can ve mal kayıplarının önüne geçilebilmesi için hayati öneme sahiptir. Yapısal hasarların tespitinde çeşitli yöntemler kullanılmakla birlikte, uygulama kolaylığı ve diğerlerine göre daha ekonomik olmaları sebebiyle titreşim karakteristiklerine (doğal frekans, mod şekli ve türevleri, sönüm) dayalı hasar tespiti son yıllarda oldukça cazip hale gelmiştir. Salawu [1], hasarın doğal frekanslar üzerindeki etkilerini değerlendirmiş ve hasar tespitinde doğal frekans değişimlerinin kullanılmasıyla ilgili çalışmaları özetlemiştir. Doebling vd. [2], Sinou [3], Farrar ve Worden [4], Dilena vd. [5] ve Das vd. [6], hasar tespitinde doğal frekansların yanı sıra mod şekilleri ve türevleri (eğim, eğrilik) ve sönüm oranına dayalı yöntemleri özetlemişler; kullanılan yöntemlerin avantaj ve dezavantajlarını irdelenmişlerdir. Ancak, titreşim özelliklerine dayalı hasar tespit yöntemlerinin verimli bir şekilde kullanılabilmesi için hasar etkisiyle dinamik davranıştaki değişimin detaylı bir şekilde incelenmesi gerekmektedir. Literatürde, değişken kesitli kirişlerde hasar sebebiyle serbest titreşim davranışında meydana gelen değişimlerin ele alındığı çalışmaların sayısı oldukça sınırlıdır. Zhen ve Fan [7], keyfi sayıda çatlak içeren değişken kesitli kirişlerin doğal frekanslarını değiştirilmiş Fourier serilerini kullanan analitik bir yöntem yardımıyla elde etmişlerdir. Viola ve Tornabene [8], tek bir çatlağı bulunan değişken kesitli dairesel kemerlerin düzlem içi serbest titreşimlerini genelleştirilmiş diferansiyel kareleme tekniği ile ele almışlardır. Kesitte çatlak dolayısıyla meydana gelen yerel esneklik, elastik dönel mafsal ile temsil edilmiştir. Kesitin üniform, sürekli değişken ve ani değişken olması durumları için çatlak konumu ve hasar şiddetinin doğal frekanslar ve mod şekilleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Mazanoğlu vd. [9,10], enerji tabanlı bir yöntem kullanarak üzerinde birden fazla çatlak bulunan değişken kesitli kirişlerin titreşim analizini gerçekleştirmişler; koniklik, sınırlar, çatlak sayısı ve konumlarının doğal frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Zhang ve Yan [11], deneysel olarak elde edilen titreşim verileri yardımıyla değişken kesitli konsol kirişte hasar tespiti için modal şekil değiştirmeye dayalı bir yöntem önermişlerdir. Tan vd. [12], üzerinde bir veya daha

fazla yay-kütle sistemi taşıyan değişken kesitli kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerinde hasar etkilerini sonlu eleman yöntemiyle incelemişler; ayrıca, hasar tespiti için genetik algoritma tabanlı güvenilir bir yöntem önermişlerdir. Tan vd. [13], birim uzunluğa gelen kütlesi ve atalet momenti polinom fonksiyonları olarak değişen, genel sınır koşulları altındaki hasarlı kirişlerin serbest titreşim analizi için analitik bir yöntem sunmuşlardır.

Değişken kesitli kirişlerde kesit özelliklerinin çubuk eksen boyunca değişmesi sebebiyle, titreşim problemini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemlerin kapalı formda çözümlerini elde etmek çoğu zaman uzun işlemler gerektiren son derece zor bir işlemdir. Bu sebeple, bu tür kirişlerin serbest titreşim analizi için çeşitli analitik [14-16] ve sayısal [17-22] yöntemler kullanılmıştır. Wu ve Chen [14], üzerinde, açıklığı boyunca keyfi noktalarda tekil kütleler asılı bulunan konik kirişlerin doğal frekansları ve mod şekilleri için kapalı formda çözümler elde etmişlerdir. Hsu vd. [15], çeşitli sınır şartları altındaki değişken kesitli Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim problemini analitik olarak incelemişlerdir. Tan vd. [16], kesiti keyfi değişen elastik kirişlerin eğilme titreşimleri için kesin çözüm sağlayan yeni bir yöntem önermişlerdir. Zhou ve Cheung [17, 18], değişken kesitli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizleri için sayısal bir yöntem önermişlerdir. Yazarlar, Rayleigh-Ritz yöntemiyle hareket denklemini elde etmişler; çözüm için kullanılacak yaklaşım fonksiyonunu ise kirişin statik yüklenme altında olması durumunda, uygulanan yükün Taylor serisine açılımıyla elde etmişlerdir. Cıvlek ve Öztürk [19], iki parametrelili elastik zemine gömülü konik kazıkların serbest titreşimini ayrık tekil evrişim yöntemi ile sayısal olarak incelemişlerdir. Yazarlar, yöntemin Winkler-Pasternak elastik zeminine gömülü konik kiriş-kolonların serbest titreşim analizi için oldukça kolay, doğru ve yüksek verimli olduğunu göstermişlerdir. Katı ve Gökdağ [20], burulmaya ve iki farklı düzlemde eğilmeye maruz ve ucuna, ağırlık merkezi bağlantı noktasıyla çakışmayan rijit bir kütle bağlanmış olan değişken kesitli kirişin serbest titreşim analizlerini çok adımlı diferansiyel dönüşüm yöntemiyle gerçekleştirmişlerdir. Sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri iki farklı sınır şartı (sol ucun ankastre veya serbest olma durumu) için elde edilmiştir. Ayrıca, kiriş uzunluğu, uç kütle boyutları, kesit daralma oranı gibi parametrelerin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi, diğer sayısal çözüm yöntemlerine göre uygulama kolaylığı sağlaması açısından araştırmacılar tarafından genellikle tercih edilmektedir [21-23]. He vd. [22], eksen doğrultusunda değişken kesit veya malzeme özelliklerine sahip kirişler için bir sonlu eleman modeli önermişlerdir. Tudjono vd. [23] ise değişken kesitli Timoshenko kirişleri için gerçek şekil fonksiyonlarını elde etmişler; değişken kesitli kirişler ile fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin yapılmış kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Hasar tespitinde amaç, hasar konumlarını ve şiddetlerini (rijitlik kaybı) belirlemektir. Mod şekli ile buna bağlı olarak türetilen modal eğim, modal

eğrilik ve modal esneklik gibi büyüklükler, hasar konumlarıyla ilgili bilgiyi taşıyan önemli hasar göstergeleridir. Bunlar arasında mod şeklinin ikinci türevi olan mod şekli eğriliğinin (veya modal eğrilik), rijitlik değişimlerine karşı son derece hassas olduğu Dessi ve Camerlengo [24], Qiao vd. [25] ve Lestari vd. [26] gibi araştırmacılar tarafından gösterilmiştir. Literatürdeki çalışmalara bakıldığında modal eğriliğin hesaplanmasında genellikle sonlu fark formüllerinin kullanıldığı görülür. Bu ise, özellikle sınırlı sayıda titreşim verisi (mod şekil koordinatı) mevcut iken eğrilik değişimlerinin doğru bir şekilde elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Bu sebeple çalışmada, hasarlı konik kirişlerin serbest titreşim analizleri için iki düğüm noktası ve her düğüm noktasında dört serbestlik derecesi (yatay ve düşey yer değiştirmeler, kesit dönmesi, eğrilik) bulunan bir sonlu eleman modeli önerilmiştir. Modelde eğriliğin bağımsız bir değişken olarak düşünülmesi, modal eğrilik değişimlerinin doğrudan elde edilebilmesine imkân vermektedir. Eleman kütle ve rijitlik matrisleri, Galerkin yöntemi ile elde edilmiştir. Kirişte hasar, eleman rijitlik matrisinin rijitlik kaybı katsayısı denilen bir sabitle çarpılması suretiyle tanımlanmıştır. Formülasyonda, hasar sebebiyle eleman kütle matrislerinin değişmediği kabul edilmiştir. Önerilen modelin doğrulanması için literatürdeki benzer çalışmalarla ve ANSYS® [27] programında oluşturulan üç boyutlu sonlu eleman modelleriyle karşılaştırmalar yapılmıştır. Modal eğriliğin, hasar konumlarının belirlenmesindeki başarısını göstermek amacıyla çeşitli koniklik oranları, sınır şartları ve hasar senaryoları için sayısal sonuçlar sunulmuş ve tartışılmıştır.

## 2. TEORİK FORMÜLASYON (THEORETICAL FORMULATION)

### 2.1. Problemin Tanımı ve Hareket Denklemleri (Problem Definition and Governing Equations)

Çalışmada göz önüne alınan kirişin geometrisi Şekil 1’de gösterilmiştir. Kiriş kesitinin uzunluk boyunca doğrusal değiştiği kabul edilmiştir. Kiriş, homojen, izotrop elastik malzemeden yapılmıştır. Kiriş genişliği ve yüksekliğinin uzunluk boyunca değişimi Eş. 1’de tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} b(x) &= b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{L} \\ h(x) &= h_1 + (h_2 - h_1) \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (1)$$

Burada 1 ve 2 indisleri, ilgili değerlerin sırasıyla kirişin sol ve sağ ucuna ait olduğunu göstermektedir. Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre uzama ve eğilme titreşimleri için hareket denklemleri sırasıyla Eş. 2 ve Eş. 3’te verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

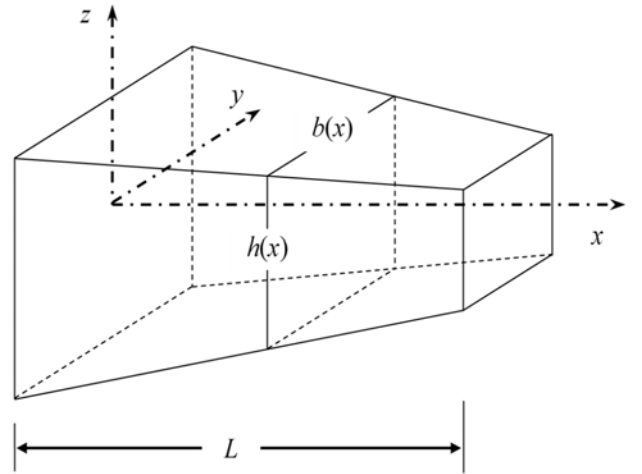
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Burada,  $E$  elastisite modülü,  $\rho$  kütle yoğunluğu,  $A(x)$  ve  $I(x)$  sırasıyla kirişin kesit alanı ve atalet momentidir.  $u = u(x,t)$  ve  $w = w(x,t)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  eksenleri doğrultusundaki yer değiştirme bileşenlerini,  $t$  ise zamanı göstermektedir.

Eş. 2  $\varphi(x)$  ile, Eş. 3 ise  $\psi(x)$  ile çarpılıp elde edilen ifadelerin kiriş uzunluğu boyunca integrali alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\int_0^L \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \int_0^L \varphi(x) \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx - \int_0^L \psi(x) \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = 0 \quad (5)$$



Şekil 1. Konik kirişin geometrisi ve koordinat eksenleri (Geometry of tapered beam and coordinate axes)

Burada  $\varphi(x)$  ve  $\psi(x)$  interpolasyon fonksiyonları olup ileride tanımlanacaklardır. Eş. 4’ün ilk terimine bir kez, Eş. 5’ün ilk terimine iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa, Eş. 6 ve Eş. 7’deki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^L EA(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx + \int_0^L \rho A(x) \varphi(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \\ = \rho(x) EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^L \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A(x) \psi(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx \\ = -\psi(x) EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_0^L + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} EI(x) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \Big|_0^L \end{aligned} \quad (7)$$

Bu ifadeler, Eş. 4 ve Eş. 5 ile verilen diferansiyel denklemlerin zayıf formda yazılmış hali olup; eşitliğin sağında görülen terimler, kirişin geometrik ve mekanik sınır şartlarını göstermektedir.

2.2. Sonlu Eleman Modeli (Finite Element Model)

Çalışmada, Şekil 2’de görülen iki düğüm noktalı ve her düğüm noktasında dörder serbestliği olan sonlu eleman modeli kullanılmıştır. Eleman düğüm noktası yer değiştirme vektörü Eş. 8’ de verilmiştir.

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad w_1 \quad \dots \quad w_6\}^T \quad (8)$$

Bu elemanda her bir düğüm noktasındaki bilinmeyenler; uzama, çökme, dönme ve eğrilik olarak göz önüne alınmıştır. (6) ve (7) eşitliklerinin sayısal çözümü için  $u(x,t)$  ve  $w(x,t)$  yer değiştirmeleri Eş. 9’deki gibi seçilsin:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a_0 + a_1x \\ w(x,t) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 \end{aligned} \quad (9)$$

Bu ifadelerdeki  $a_i$  ve  $b_i$  katsayılarının elde edilmesi için eleman düğüm noktalarında sınır şartları, Şekil 2 göz önüne alınarak Eş. 10’deki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1, \quad u(l,t) = u_2 \\ w(0,t) &= w_1, \quad w(l,t) = w_2 \\ w'(0,t) &= w_3, \quad w'(l,t) = w_4 \\ w''(0,t) &= w_5, \quad w''(l,t) = w_6 \end{aligned} \quad (10)$$

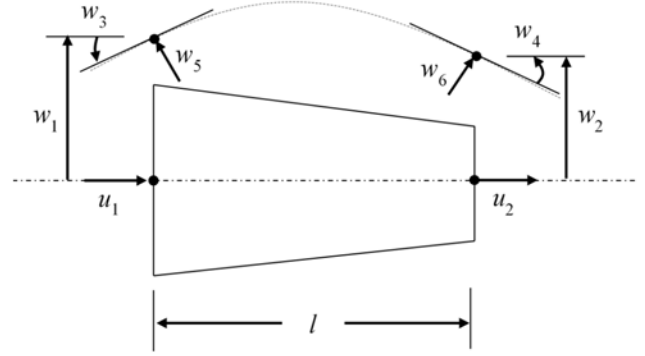
Eş. 10 ile verilen sınır şartları Eş. 9’a uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa yer değiştirmeler, Eş. 11’deki formda elde edilir.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^2 \varphi_i(x)u_i(t) \\ w(x,t) &= \sum_{i=1}^6 \psi_i(x)w_i(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Bu ifadelerde,  $\varphi(x)$  doğrusal Lagrange interpolasyon polinomları,  $\psi_i(x)$  ise beşinci dereceden Hermit interpolasyon polinomları olup Eş. 12’de tanımlanmışlardır.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \xi, \\ \varphi_2 &= \xi, \\ \psi_1 &= 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5, \\ \psi_2 &= 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5, \\ \psi_3 &= l(\xi - 6\xi^3 + 8\xi^4 - 3\xi^5), \\ \psi_4 &= l(-4\xi^3 + 7\xi^4 - 3\xi^5), \\ \psi_5 &= \frac{l^2}{2}(\xi^2 - 3\xi^3 + 3\xi^4 - \xi^5), \\ \psi_6 &= \frac{l^2}{2}(\xi^3 - 2\xi^4 + \xi^5) \end{aligned} \quad (12)$$

Bu ifadelerde,  $\xi = x/l$  olup  $l$  eleman uzunluğudur. Eş. 11 ve Eş. 12, Eş. 6 ve Eş. 7’de yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Eş. 13 ile verilen matris denklem elde edilir.



Şekil 2. 8-serbestlik dereceli sonlu eleman modeli (8-degree-of-freedom finite element model)

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (13)$$

Burada,  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{k}$  sırasıyla eleman kütle ve rijitlik matrisleri olup Eş. 14 ile verilmişlerdir.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{2 \times 2}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{6 \times 6}^w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{2 \times 2}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{6 \times 6}^w \end{bmatrix} \quad (14)$$

Eş. 14’te görülen  $\mathbf{m}^u$ ,  $\mathbf{m}^w$ ,  $\mathbf{k}^u$  ve  $\mathbf{k}^w$  alt matrislerinin elemanları Eş. 15 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} m_{ij}^u &= \rho \int_0^l A(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \quad (i, j = 1, 2) \\ m_{ij}^w &= \rho \int_0^l A(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx \quad (i, j = 1, 6) \\ k_{ij}^u &= E \int_0^l A(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \quad (i, j = 1, 2) \\ k_{ij}^w &= E \int_0^l I(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx \quad (i, j = 1, 6) \end{aligned} \quad (15)$$

Hasarlı elemanlarda, eleman rijitlik matrisi Eş. 16’deki gibi yazılır:

$$\mathbf{k}^D = (1 - \beta)\mathbf{k}^U \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (16)$$

Bu ifadede  $\beta$ , rijitlik kaybını ifade eden bir reel sayıdır.  $D$  ve  $U$  indisleri ise sırasıyla hasarlı ve hasarsız durumları göstermektedir.  $\beta = 0$  elemanda hasar olmaması,  $\beta = 1$  ise eleman tamamen hasarlı olması durumlarına karşılık gelmektedir. Hasar sebebiyle kütle matrisinin değişmediği, sadece rijitlik terimlerinde değişiklik olduğu kabul edilmektedir.

$N$  adet elemana ayrılmış değişken kesitli kiriş için hareket denklemi Eş. 17’deki gibi elde edilir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (17)$$

Burada,  $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{m}$  ve  $\mathbf{K} = \Sigma \mathbf{k}$  sırasıyla sistem kütle ve rijitlik matrisleridir.  $\mathbf{U}$  vektörü, düğüm noktası bilinmeyenlerini içermektedir. (17) eşitliğinin çözümü  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 e^{i\omega t}$  şeklinde kabul edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Eş. 18 ile verilen standart öz değer problemi elde edilir.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U}_0 = \mathbf{0} \quad (18)$$

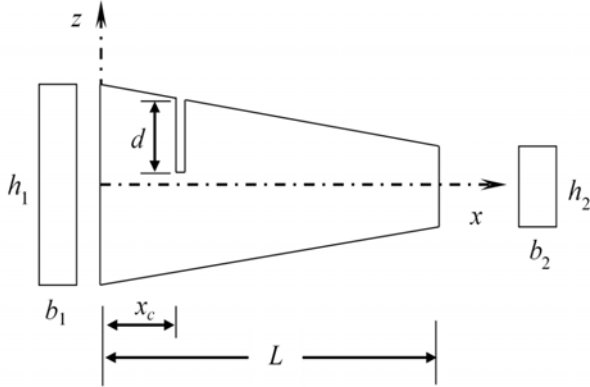
Burada,  $\omega$  kirişin doğal frekanslarını,  $\mathbf{U}_0$  ise mod şekillerini göstermektedir. Eş. 18'in sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için Eş. 19 ile verilen şart sağlanmalıdır.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (19)$$

Bu eşitlikten elde edilecek denklemin sıfırdan farklı kökleri, kirişin doğal frekanslarına karşılık gelmektedir. Her bir doğal frekans (18) eşitliğinde yerine konularak buna karşılık gelen mod şekilleri kolayca elde edilir.

### 3. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA (NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION)

Bu bölümde, hasarlı konik kirişlerin serbest titreşimlerine ait sayısal sonuçlar sunulmuştur. Kirişte hasarın, aksi belirtilmediği sürece, Şekil 3'te görüldüğü gibi yükseklik boyunca çatlak şeklinde olduğu kabul edilmiş; bir veya daha fazla çatlak bulunması durumunda doğal frekanslar, mod şekilleri, modal eğim ve modal eğrilik değişimleri incelenmiştir. Sayısal sonuçların elde edilmesinde Fortran dilinde yazılan sonlu eleman programı kullanılmıştır. Bu programda, kütle ve rijitlik matrislerinin elde edilmesinde kullanılacak olan integraller (Eş. 15), sekiz noktalı Gauss integrasyonu ile sayısal olarak hesaplanmıştır. Modal karakteristikler üzerinde sınır şartlarının, koniklik oranının ( $\alpha_b = b_2 / b_1$  ve  $\alpha_h = h_2 / h_1$ ), çatlak konumu ( $\hat{x} = x_c / L$ ) ve uzunluğunun ( $\hat{d} = d / h_1$ ) etkisi araştırılmıştır.



**Şekil 3.** Tek çatlaklı konik kirişin geometrisi ve koordinat eksenleri  
(Geometry and coordinate system of a tapered beam with a single crack)

Şekil 3'te görülen tek çatlaklı konik kirişte,  $d$  uzunluğundaki çatlakın genişliği kirişinkiyle aynı olarak kabul edilsin. Hasar sebebiyle hem kesit alanı hem de atalet momenti azalacaktır. Buna göre, rijitlik matrisinde  $\mathbf{k}^u$  ve  $\mathbf{k}^w$  alt matrislerinin terimleri için  $\beta$  hasar kaybı katsayısı farklı olur. Hasar etkisiyle kesit kaybının göz önüne alınması durumunda rijitlik kaybı katsayısı için Eş. 20'deki tanımlama yapılabilir:

$$\beta^A = 1 - \frac{A^D(\hat{x})}{A^U(\hat{x})} \quad (20)$$

$$\beta^I = 1 - \frac{I^D(\hat{x})}{I^U(\hat{x})}$$

Burada,  $\beta^A$  ve  $\beta^I$  sırasıyla  $\mathbf{k}^u$  ve  $\mathbf{k}^w$  matrisleri için rijitlik kaybı katsayılarıdır.  $D$  ve  $U$  indisleri sırasıyla kesitin hasarlı olması ve olmaması durumlarını,  $A$  ve  $I$  ise kesit alan ve atalet momentlerini ifade etmektedir. Yüksekliği boyunca çatlak bulunan dikdörtgen kesitli konik kiriş için bu ifadeler Eş. 21'deki gibi yazılabilirler.

Buna göre hasarlı elemanda rijitlik matrisi, Eş. 22'deki gibi ifade edilir.

$$\beta^A = 1 - \frac{b(\hat{x})[h(\hat{x}) - d]}{b(\hat{x})h(\hat{x})} = 1 - \frac{h(\hat{x}) - d}{h(\hat{x})}$$

$$= \frac{\hat{d}}{1 + (\alpha_h - 1)\hat{x}}$$

$$\beta^I = 1 - \frac{b(\hat{x})[h(\hat{x}) - d]^3}{b(\hat{x})h^3(\hat{x})} = 1 - \left[ \frac{h(\hat{x}) - d}{h(\hat{x})} \right]^3 \quad (21)$$

$$= 1 - \left[ 1 - \frac{\hat{d}}{1 + (\alpha_h - 1)\hat{x}} \right]^3$$

$$\mathbf{k}^D = \begin{bmatrix} (1 - \beta^A)\mathbf{k}^u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (1 - \beta^I)\mathbf{k}^w \end{bmatrix} \quad (22)$$

#### 3.1. Ağ Yakınsama Analizi ve Sonlu Eleman Modelinin Doğrulanması (Convergence Analysis and Verification of Finite Element Model)

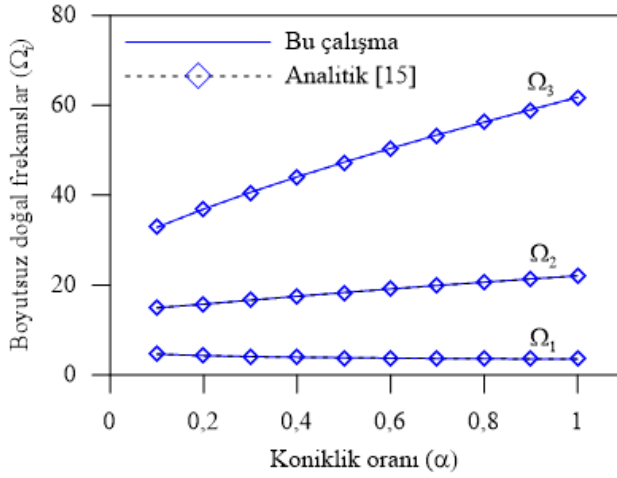
Sonlu eleman analizlerinde yeter doğrulukta sonuçlar elde edebilmek amacıyla önce ağ yakınsama analizleri yapılmıştır. Tablo 1'de, sırasıyla bir ve iki çatlaklı olan iki ucu ankastre (A-A) kirişin ilk üç boyutsuz doğal frekansının eleman sayısı ile değişimi sunulmuştur. Kiriş malzemesi için elastisite modülü  $E = 210$  GPa, Poisson oranı  $\nu = 0,3$  ve yoğunluk  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup> olarak alınmıştır. Birinci hasar senaryosunda çatlak, kiriş açıklığının ortasında yer almakta; ikincisinde ise çatlakın biri sol mesnet yakınında diğeri ise açıklık ortasında bulunmaktadır. Her iki senaryo için de çatlak uzunluğu kesit yüksekliğinin %50'si olarak kabul edilmiştir. Sayısal sonuçlar,  $L/h_1 = 15$  ve  $\alpha_b = \alpha_h = 0,5$  değerleri için elde edilmiş, doğal frekanslar,  $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A_1 / EI_1}$  şeklinde boyutsuz olarak verilmiştir.

Daha önce de belirtildiği üzere, 1 indisi kirişin sol ucundaki kesit özelliklerini ifade etmektedir. Görüldüğü üzere, eleman sayısı arttıkça boyutsuz doğal frekanslar hızla azalmakta ve sabit bir değere doğru yakınsamaktadır. Tablo değerlendirildiğinde, çalışmanın bundan sonrası için

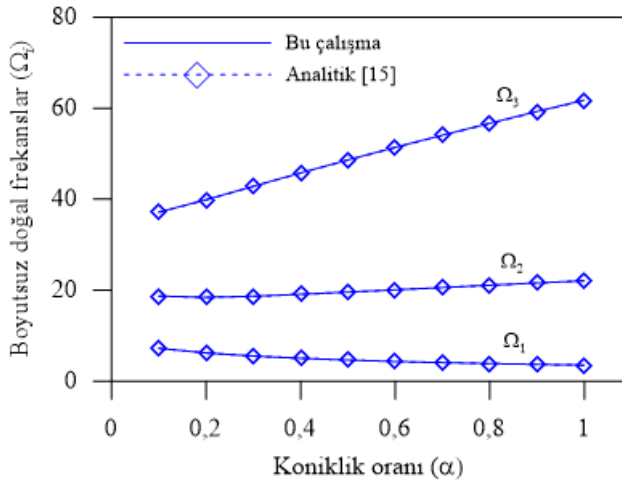
**Tablo 1.** İki ucu ankastre hasarlı konik kiriş için sonlu eleman yakınsama analizi sonuçları  
(Convergency analysis results for the damaged tapered beam with clamped-clamped ends)

N	Tek çatlaklı kiriş ( $\hat{x} = 0,5$ )			İki çatlaklı kiriş ( $\hat{x}_1 = 0,1, \hat{x}_2 = 0,5$ )		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
10	16,5410	46,3558	87,9693	16,3651	46,2734	87,7691
0	16,5190	45,6618	88,1103	16,4147	45,6008	88,0928
40	16,5030	45,3786	88,2811	16,4454	45,3346	88,2754
80	16,4922	45,2659	88,3356	16,4620	45,2397	88,3309
100	16,4898	45,2640	88,3423	16,4654	45,2243	88,3381

gerçekleştirilecek sonlu eleman analizlerinde  $N = 80$  eleman kullanılmasının yeterli olacağı görülmektedir.



**Şekil 4.** Hasarsız konsol kirişin ilk üç boyutsuz doğal frekansının koniklik oranıyla değişimi,  $\alpha_b = 1, \alpha_h = \alpha$   
(Variation of the first three dimensionless natural frequencies of cantilever intact beams with the taper ratio)



**Şekil 5.** Hasarsız konsol kirişin ilk üç boyutsuz doğal frekansının koniklik oranıyla değişimi,  $\alpha_b = \alpha_h = \alpha$   
(Variation of the first three dimensionless natural frequencies of cantilever intact beams with the taper ratio)

Şekil 4 ve Şekil 5'te, değişken kesitli hasarsız konsol kirişin ilk üç boyutsuz doğal frekansının koniklik oranı ile değişimi

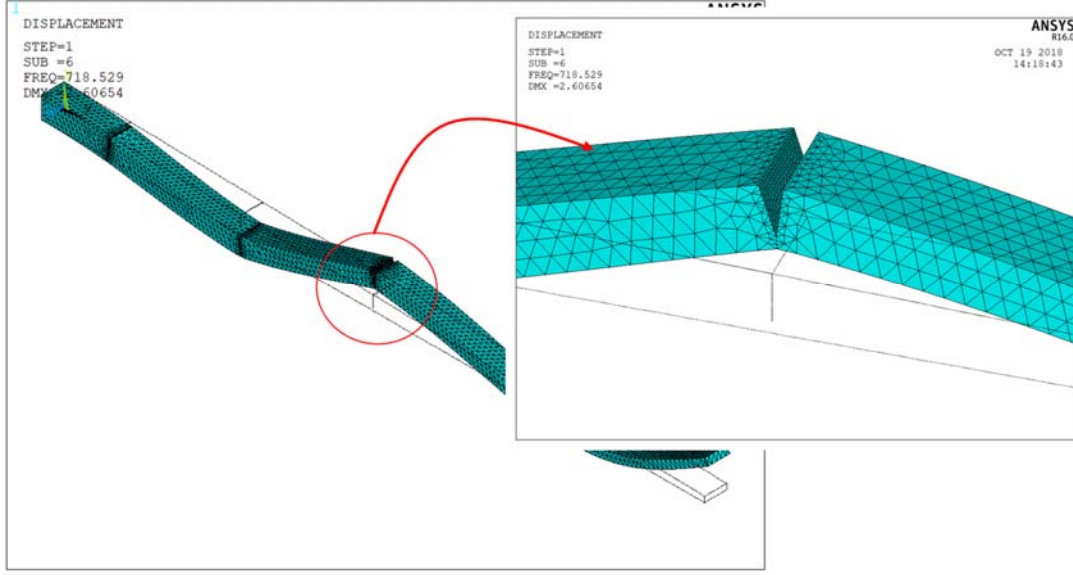
verilmiştir. Malzeme özellikleri, ağ yakınsama analizinde kullanılanlar ile aynıdır. Boyutsuz doğal frekanslar,  $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A_i / EI_1}$  şeklinde verilmiştir. Şekil 4'te, kiriş kesiti yükseklik boyunca doğrusal değişmekte olup genişlik sabittir. Şekil 5'te ise kiriş kesiti her iki doğrultuda (yükseklik ve genişlik) doğrusal olarak değişmektedir. Şekillerden görüleceği üzere, çalışmada önerilen sonlu eleman modeli ile elde edilen boyutsuz doğal frekanslar, Hsu vd. [15] tarafından verilen analitik sonuçlarla çok iyi örtüşmektedir.

Değişken kesitli konsol kirişin hasarsız ve çeşitli hasar durumları için çalışmada önerilen sonlu eleman modeli ve ANSYS® programıyla elde edilen ilk beş doğal frekansı (Hz) Tablo 2'de sunulmuştur. ANSYS® sonlu eleman modelleri SOLID186 katı elemanı kullanılarak oluşturulmuştur. Çoklu hasar durumlarında tüm çatlakların uzunlukları eşit olarak düşünülmüştür. Kirişin fiziksel özellikleri,  $L = 0,6$  m,  $b_1 = b_2 = 0,02$  m,  $h_1 = 0,02$  m,  $h_2 = 0,005$  m olarak göz önüne alınmıştır. Şekil 6'da, üç çatlaklı bulunan değişken kesitli kirişin ANSYS® sonlu eleman modeli ve çatlak detayı örnek olarak gösterilmiştir. Tablodan da görüleceği üzere, çalışmada önerilen sonlu eleman modeli ile ANSYS® programından elde edilen sonuçlar oldukça iyi uyum içerisindedir.

Tablo 3'te, konsol konik kirişin hasarsız halde ve çeşitli hasar durumlarında bu çalışmada önerilen yöntem ile elde edilen ilk dört doğal frekansının Zhang ve Yan [11] tarafından deneysel olarak elde edilenlerle karşılaştırması verilmiştir. Burada göz önüne alınan kirişin uzunluğu  $L = 130$  mm, yüksekliği  $h = 1,8$  mm ve açıklık boyunca sabit, genişliği sol (ankastre) uçta 12 mm ve sağ (serbest) uçta 22 mm'dir. Kirişte elastisite modülü  $E = 97$  GPa, kütle yoğunluğu  $\rho = 8900$  kg/m<sup>3</sup> ve Poisson oranı  $\nu = 0,27$  olarak alınmıştır. Bu problemde çatlak, genişlik boyunca olup boyutsuz hasar uzunluğu  $\hat{d}_i = d_i / b_i$  şeklinde tanımlıdır. Tablodan görüleceği üzere sonlu eleman sonuçları deneysel sonuçlarla son derece uyumlu olup aradaki fark %4'ü aşmamaktadır.

### 3.2. Parametrik Çalışma (Parametric Study)

Bu bölümde, konik kirişin çeşitli sınır şartları, koniklik oranları ve hasar durumları için doğal frekanslarındaki değişimler incelenmiştir. Modal eğrilik değişimleriyle



**Şekil 6.** Üç çatlaklı konik kirişin ANSYS® sonlu eleman modeli ve çatlak bölgesi detayı  
(ANSYS® finite element model of a tapered beam with three cracks and detailed view of the cracked region)

**Tablo 2.** Konik konsol kirişin ilk beş doğal frekansının (Hz) ANSYS® sonuçlarıyla karşılaştırması  
(Comparison of the first five natural frequencies (Hz) of the tapered cantilever beam with ANSYS® results)

$d_i/h$	Yöntem	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
<i>Hasarsız</i>						
	Bu çalışma	54,3663	214,5786	514,1293	958,0858	1548,351
	ANSYS®	55,3371	214,1357	511,7005	950,0612	1528,468
<i>Tek çatlaklı kiriş, <math>\bar{x}_1 = 0,1</math></i>						
0,15	Bu çalışma	54,8769	213,3584	512,8516	957,5848	1548,312
	ANSYS®	55,0031	213,2607	510,7032	949,5886	1528,449
0,30	Bu çalışma	53,9080	211,0396	510,4797	956,6573	1548,240
	ANSYS®	53,7684	210,1802	507,3006	947,9342	1528,402
0,50	Bu çalışma	50,2012	203,2271	502,9858	953,7341	1547,963
	ANSYS®	49,8543	201,7011	498,5692	943,6033	1528,047
<i>İki çatlaklı kiriş, <math>\bar{x}_1 = 0,1, \bar{x}_2 = 0,3</math></i>						
0,15	Bu çalışma	54,4172	213,3577	510,2291	950,1183	1544,657
	ANSYS®	54,0897	211,0134	503,6495	934,1835	1508,401
0,30	Bu çalışma	52,4313	211,0292	501,3734	932,6731	1536,842
	ANSYS®	51,6389	207,7436	493,2627	913,9643	1498,408
0,50	Bu çalışma	44,0536	202,5796	455,7454	863,7425	1508,885
	ANSYS®	43,9644	198,2299	453,7426	852,7938	1469,038
<i>Üç çatlaklı kiriş, <math>\bar{x}_1 = 0,1, \bar{x}_2 = 0,3, \bar{x}_3 = 0,5</math></i>						
0,15	Bu çalışma	54,0626	211,3418	507,6169	944,8394	1527,701
	ANSYS®	53,7419	209,5299	501,2385	930,2806	1495,596
0,30	Bu çalışma	51,0552	202,5744	492,5681	908,5262	1474,857
	ANSYS®	50,2487	200,4695	484,1233	893,3722	1441,773
0,50	Bu çalışma	33,0813	141,2448	438,6071	768,3908	1312,761
	ANSYS®	37,8306	157,0905	434,6491	718,5286	1289,336

hasarlı kesitlerin belirlenmesine yönelik sonuçlar sunulmuş; modal eğriliğin mod şekli ve modal eğim değişimlerine göre üstünlüğü gösterilmiştir. Kiriş malzemesi için elastisite modülü  $E = 210$  GPa, Poisson oranı  $\nu = 0,3$  ve yoğunluk  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup> olarak göz önüne alınmıştır. Değişken kesitli hasarsız kirişin ilk üç doğal frekansının koniklik oranı ile

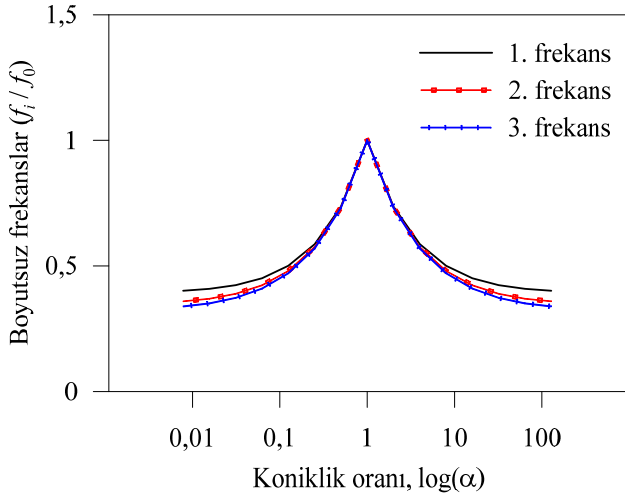
değişimi Şekil 7'de iki ucun da ankastre tutulu; Şekil 8'de ise sol ucun ankastre tutulu, sağ ucun serbest olması durumları için sunulmuştur. Burada göz önüne alınan kiriş için narinlik oranı  $L/h_{\max} = 20$  olup  $h_{\max} = \max(h_1, h_2)$  şeklindedir. Böylece, kirişin Bernoulli-Euler teorisine uygunluğu sağlanmıştır. Kiriş kesiti hem yükseklik hem de



**Tablo 3.** Konik konsol kirişin ilk dört doğal frekansının (Hz) deneysel sonuçlarla karşılaştırılması  
(Comparison of the first four natural frequencies (Hz) of the tapered cantilever beam with the experimental results)

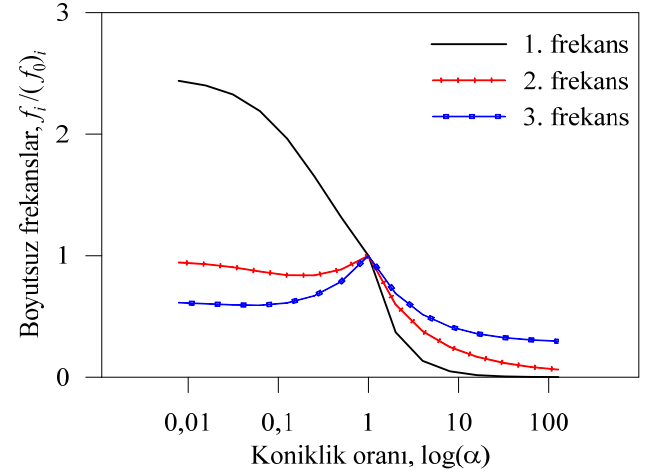
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
<i>Hasarsız</i>				
Bu çalışma	47,201	336,723	979,403	1937,340
Deneysel [11]	46,625	336,030	992,345	1866,505
Fark (%)	1,24	0,21	1,30	3,80
<i>Tek çatlaklı kiriş, <math>\hat{x}_1 = 0,32</math>, <math>\hat{d}_1 = 0,1</math></i>				
Bu çalışma	47,162	336,560	978,275	1937,011
Deneysel [11]	46,600	336,015	992,040	1865,475
Fark (%)	1,21	0,16	1,39	3,83
<i>İki çatlaklı kiriş, <math>\hat{x}_1 = 0,03</math>, <math>\hat{d}_1 = 0,1</math>, <math>\hat{x}_2 = 0,50</math>, <math>\hat{d}_2 = 0,25</math></i>				
Bu çalışma	47,034	334,644	977,849	1927,371
Deneysel [11]	46,505	335,000	990,850	1862,900
Fark (%)	1,14	0,11	1,31	3,46

genişlik boyunca doğrusal olarak değişmektedir (çift doğrultulu konik).  $\alpha = 1$  üniform kesitli,  $\alpha \rightarrow +\infty$  sola doğru sivrilen,  $\alpha \rightarrow 0$  ise sağa doğru sivrilen kirişi ifade etmektedir. Görsel uygunluk açısından yatay eksenle koniklik oranının değişimi logaritmik olarak verilmiştir. Grafiklerdeki eğriler,  $f_i/(f_0)_i$  şeklinde boyutsuz doğal frekansların değişimini göstermektedir. Burada,  $(f_0)_i$  üniform kirişin doğal frekanslarıdır. Şekil 7’de görüldüğü üzere, iki ucu ankastre kirişte en büyük doğal frekanslar üniform halde elde edilmektedir.  $h_2 < h_1$  iken – kiriş sağa doğru sivri – koniklik oranı azaldıkça doğal frekanslar da azalmaktadır.  $h_2 > h_1$  iken – kiriş sola doğru sivri – koniklik oranı arttıkça doğal frekanslar azalmaktadır. İki ucu ankastre kirişte, konikliğe bağlı olarak elde edilen eğrilerin simetrik olduğu görülmektedir. Bu durum, kirişin sınır şartlarına göre simetrik olmasından kaynaklanmaktadır.

**Şekil 7.** Hasarsız iki ucu ankastre kirişte ilk üç frekansın koniklik oranı ile değişimi (Variation of the first three frequencies of clamped intact beams with taper ratio)

Şekil 8’de, sol ucu tutulu değişken kesitli konsol kiriş için koniklik-frekans eğrileri verilmiştir. İki ucu ankastre kiriştekinin aksine burada eğrilerin simetrik olmadığı

görülmektedir. Ayrıca, temel frekansın (birinci doğal frekans) koniklik ile değişimi farklıdır.  $h_2 < h_1$  iken, koniklik oranı azaldıkça birinci doğal frekans artmaktadır. Diğer doğal frekanslar ise önce bir miktar azalmakta sonra hafifçe artmaktadır.  $h_2 > h_1$  iken ise, ankastre kirişte olduğu gibi, koniklik oranı arttıkça, doğal frekanslar azalmaktadır. Göz önüne alınan her iki kiriş için  $\alpha \rightarrow +\infty$  ve  $\alpha \rightarrow 0$  için eğrilerin bir asimptota yaklaştığı görülmektedir.

**Şekil 8.** Hasarsız konsol kirişte ilk üç frekansın koniklik oranı ile değişimi  
(Variation of the first three frequencies of cantilever intact beams with taper ratio)

Modal eğrilik değişimlerinin hasar konumlarının tespitinde, mod şekli ve modal eğim değişimlerine göre üstünlüğünü incelenmek amacıyla sol ucundan ankastre mesnetli konik konsol kiriş, Tablo 4’te görülen hasar senaryoları altında ele alınmıştır. Burada, çoklu hasar durumlarında sığ ve derin çatlaklar bir arada olacak şekilde hasar şiddetleri farklı seçilmiştir. Tablo 4’ün son iki sütununda hasarlı elemanlar için rijitlik kaybı katsayıları (%) görülmektedir. Kiriş için  $L/h_1 = 20$  ve koniklik oranı  $\alpha_b = \alpha_h = 0,5$  olarak dikkate alınmıştır. Tablo 5’te, göz önüne alınan hasar senaryoları için konik konsol kirişin doğal frekansları sunulmuş ve

hasarsız durumla karşılaştırılmıştır. Görüleceği üzere, hasar sebebiyle doğal frekanslar azalmaktadır. Bu azalma, daha çok temel doğal frekansta kendini göstermektedir. Mod numarası büyüdükçe doğal frekanslardaki azalma miktarının azaldığı görülmektedir. Hasar-1 senaryosunda görüleceği üzere ( $d/h_1 = 0,05$ ), özellikle sığ çatlaklar için doğal frekanslardaki azalma dikkate alınarak – temel frekansta binde 2,5 değişim – kırışte hasar olup olmadığı hakkında bir yorum yapmak güçleşmektedir. Ayrıca, doğal frekanslardaki değişimler göz önüne alınarak hasar konumları ile ilgili bir bilgiye ulaşılamamaktadır. Şekil 9’da, göz önüne alınan hasar senaryoları için konik konsol kırışin ilk üç mod şekli, hasarsız durumla karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu şekillerden de görüleceği üzere, hasar şiddetinin çok küçük olması (sığ çatlak) durumunda hasarlı ve hasarsız mod şekilleri arasındaki fark, gözle görülemeyecek kadar küçüktür.

Şekil 10-Şekil 12’de, göz önüne alınan hasar senaryoları için kırışte ilk üç mod şekli, modal eğim ve modal eğrilikteki değişimler görülmektedir. Bu değişimler, kırış üzerinde hasar konumları ile ilgili bilgiyi taşımakta olup, hasarın bulunduğu kesitlerde, değişim eğrilerinde ani sıçramaların olması beklenmektedir. Literatürdeki çalışmalarda, modal eğim ve modal eğriliğin belirlenmesinde genelde modal yer değiştirmelere sonlu fark formülleri uygulanmakta ve

yaklaşık değerler elde edilmektedir. Çalışmada sunulan sonlu eleman modeli ise yer değiştirme, eğim ve eğriliği bağımsız düğüm noktası serbestlikleri olarak göz önüne alındığından (Şekil 2), kırış eksenı boyunca düğüm noktası yer değiştirmeleri ile eğim ve eğrilik değerleri, Eş. 18 ile verilen öz değer probleminin çözümüyle doğrudan elde edilebilmektedir. Bu özelliği, çalışmada önerilen sonlu eleman modelinin önemli bir avantajı olup, sonlu fark formüllerinin kullanımını ortadan kaldırdığından hesap hacmi açısından ekonomi sağlamaktadır. Şekil 10-Şekil 12’ye dikkat edilecek olursa, göz önüne alınan her üç hasar senaryosu için hasar konumlarının tespitinde modal yer değiştirmelerdeki değişimlerin dikkate alınması, özellikle çoklu hasar senaryoları için, başarılı sonuçlar vermemiştir. Sadece, kırış üzerinde tek çatlakın bulunduğu Hasar-1 senaryosu için 1. modal yer değiştirmeye ait değişim eğrisinde hasarlı kesitte küçük bir sıçrama olduğu görülmektedir. Diğer hasar senaryoları için ise değişimler fark edilemeyecek kadar küçüktür. Hasar konumlarının belirlenmesinde modal eğimdeki değişimlerin, mod şekli değişimlerine göre daha başarılı sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu yöntemle, göz önüne alınan üç hasar senaryosu için de hasar konumları tespit edilebilmiştir. Ancak, çoklu hasar durumlarında, çatlak uzunluğu azaldıkça yöntemin hassasiyeti azalmakta ve eğrilerdeki ani değişimlerin çok büyük mertebelerde olmadığı

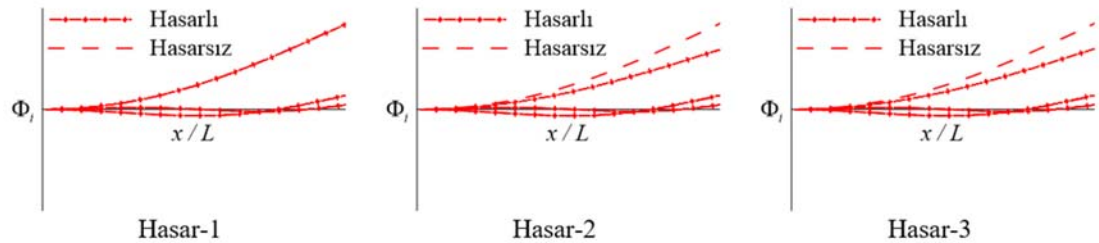
**Tablo 4.** Göz önüne alınan hasar senaryoları (Damage scenarios considered)

Hasar durumu	Çatlak sayısı	$x_c/L$	$d/h_1$	$\beta^A$ (%)	$\beta^I$ (%)
Hasar-1	1	0,1	0,05	5,26	14,97
Hasar-2	2	0,1	0,30	31,58	67,97
		0,3	0,05	5,88	16,63
		0,1	0,30	31,58	67,97
Hasar-3	3	0,3	0,15	17,65	44,15
		0,5	0,05	6,67	18,69

**Tablo 5.** Çeşitli hasar senaryoları için konik konsol kırışin ilk üç doğal frekansı (First three natural frequencies of the tapered cantilever beam for various damage scenarios)

Hasar durumu	$f_1$ (Hz)	$\Delta$ (%)	$f_2$ (Hz)	$\Delta$ (%)	$f_3$ (Hz)	$\Delta$ (%)
Hasarsız	55,1884	-	233,2938	-	579,8110	-
Hasar-1	55,0485	0,25	232,9471	0,15	579,5163	0,05
Hasar-2	53,7179	2,66	229,6684	1,55	575,8814	0,68
Hasar-3	53,2286	3,55	229,0958	1,80	573,1622	1,15

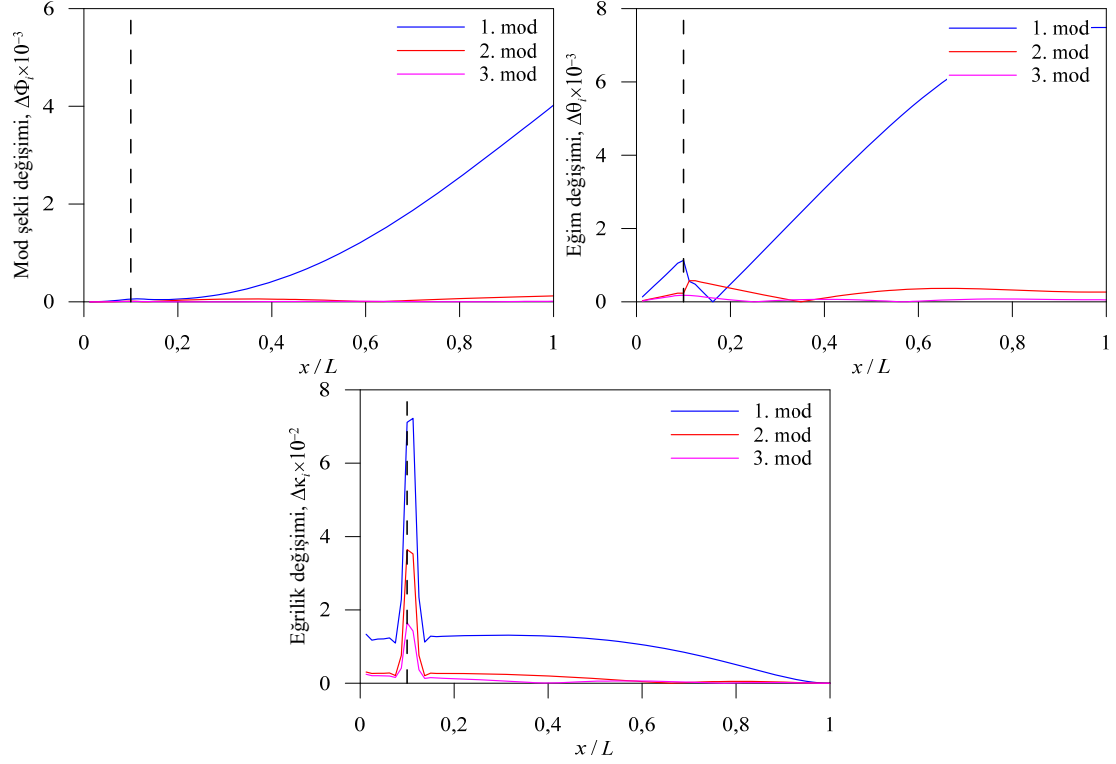
$$\Delta = \left| \frac{\text{Hasarlı durum} - \text{Hasarsız durum}}{\text{Hasarsız durum}} \right| \times 100$$



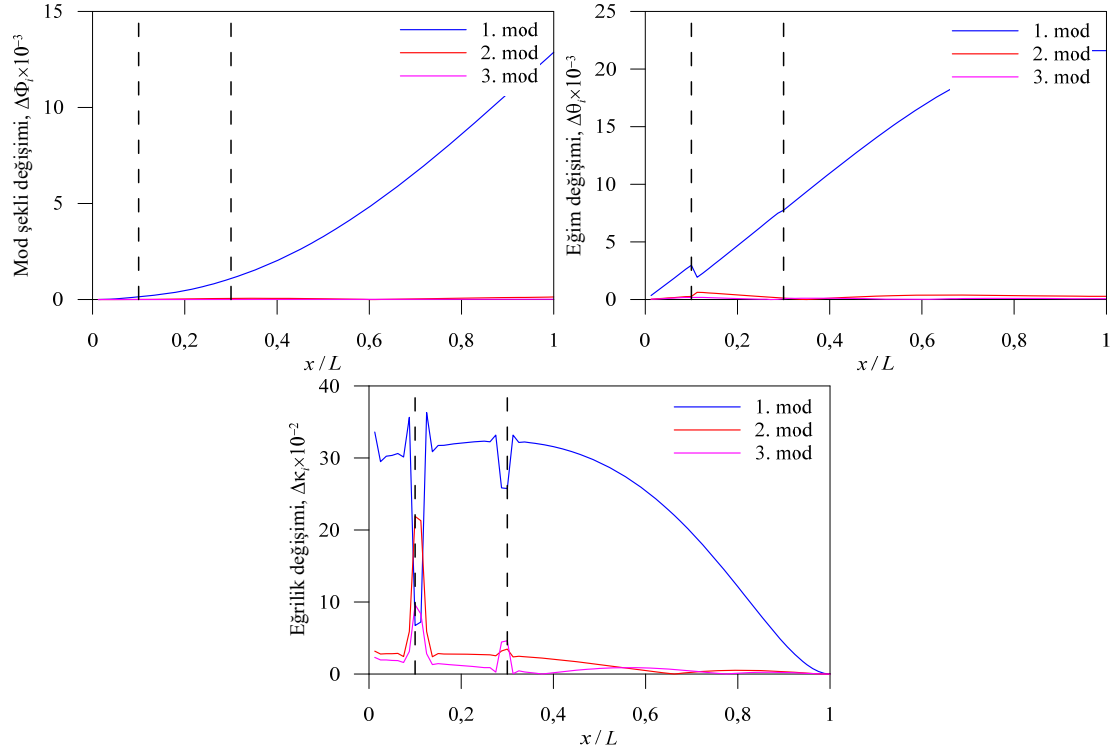
**Şekil 9.** Göz önüne alınan hasar senaryoları için konik kırışin ilk üç mod şekli (First three mode shapes of the tapered beam for the damage scenarios considered)

görülmektedir. Çoklu hasar senaryoları için hasar uzunluklarının farklı olduğu durumlarda, modal eğim

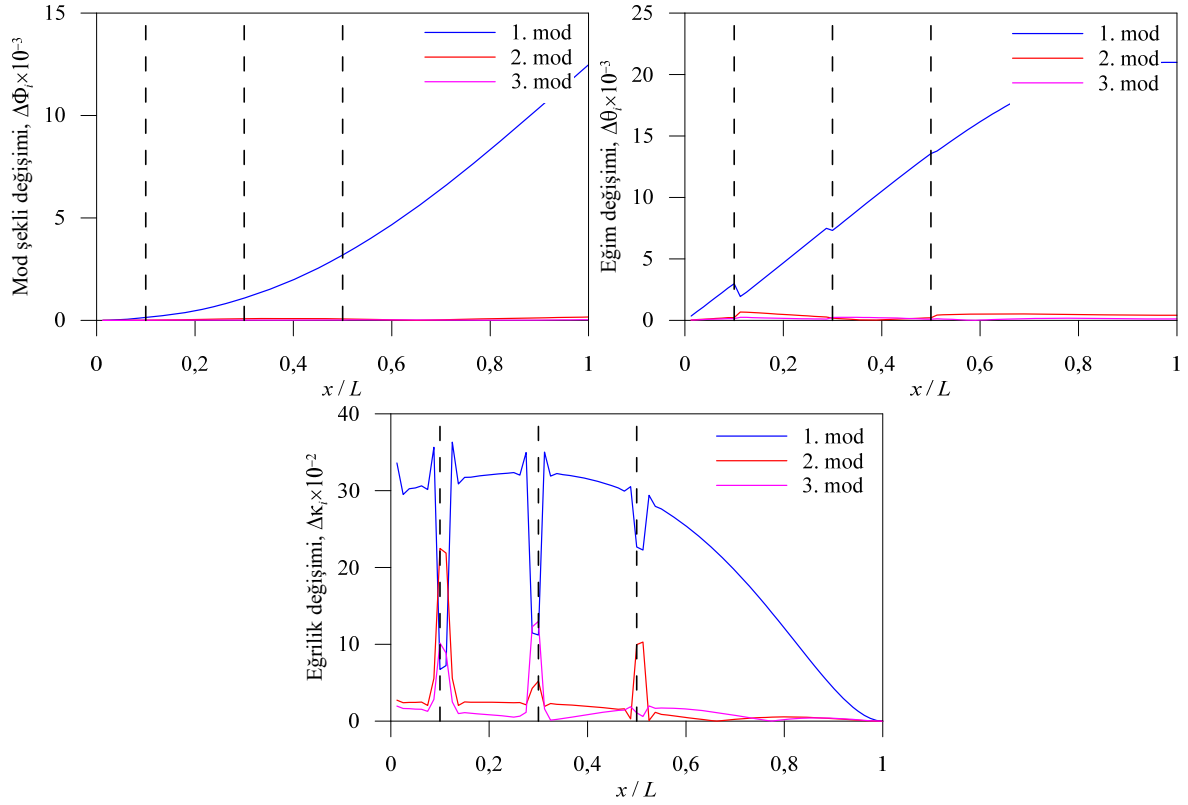
değişimi ile sığ çatlakların yerlerinin tespiti zorlaşmaktadır. Şekil 10-Şekil 12'de modal eğrilik değişimlerine dikkat



**Şekil 10.** Hasar-1 durumu için konik kirişte mod şekli, modal eğim ve modal eğrilik değişimleri  
(Changes in mode shapes, modal slopes and curvatures of the tapered beam for Damage-1)



**Şekil 11.** Hasar-2 durumu için konik kirişte mod şekli, modal eğim ve modal eğrilik değişimleri  
(Changes in mode shapes, modal slopes and curvatures of the tapered beam for Damage-2)



**Şekil 12.** Hasar-3 durumu için konik kirişte mod şekli, modal eğim ve modal eğrilik değişimleri  
(Changes in mode shapes, modal slopes and curvatures of the tapered beam for Damage-3)

edilirse, göz önüne alınan üç hasar senaryosu için de, çatlak uzunluğu ne olursa olsun, hasar konumlarının başarıyla belirlenebildiği görülmektedir. Modal eğrilik değişimlerine ait eğrilerde, hasarlı kesitlerde meydana gelen ani sıçramalar, diğer iki yöntemin aksine, tüm modlar için net bir şekilde görülebilmektedir. Buradan, modal eğrilik değişimlerinin hasar konumlarının belirlenmesinde mod şekli ve modal eğim değişimleri göre çok daha başarılı sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

#### 4. SİMGELER (SYMBOLS)

$b(x)$	: Herhangi bir kesitte kiriş genişliği
$h(x)$	: Herhangi bir kesitte kiriş yüksekliği
$l$	: Eleman uzunluğu
$t$	: Zaman
$u$	: Yatay yer değiştirme
$w$	: Düşey yer değiştirme
$\mathbf{k}$	: Eleman rijitlik matrisi
$\mathbf{m}$	: Eleman kütle matrisi
$\mathbf{u}$	: Eleman düğüm noktası yer değiştirme vektörü
$A(x)$	: Kesit alanı
$E$	: Elastisite modülü
$L$	: Kiriş uzunluğu
$I(x)$	: Atalet momenti
$\mathbf{K}$	: Sistem rijitlik matrisi
$\mathbf{M}$	: Sistem kütle matrisi
$\mathbf{U}$	: Sistem düğüm noktası bilinmeyenler vektörü

$\mathbf{U}_0$	: Mod şekilleri vektörü
$\hat{d} = d / h_1$	: Boyutsuz çatlak uzunluğu
$\hat{x} = x_c / L$	: Boyutsuz çatlak konumu
$\alpha_b = b_2 / b_1$ ,	: Koniklik oranları
$\alpha_h = h_2 / h_1$	
$\beta$	: Rijitlik kaybı katsayısı
$\rho$	: Yoğunluk
$\nu$	: Poisson oranı
$\varphi_i(x)$	: Doğrusal Lagrange interpolasyon polinomları
$\psi_i(x)$	: Beşinci dereceden Hermit interpolasyon polinomları
$\omega$	: Doğal frekans
$\Omega_i = \omega_i L^2$	: Boyutsuz doğal frekanslar
$\sqrt{\rho A_1 / EI_1}$	

#### 5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, kesiti açıklık boyunca doğrusal değişen konik kirişlerde bir veya birden fazla hasar olması durumunda modal parametrelerin (doğal frekans ve mod şekilleri) belirlenmesi için her birinde dördü serbestliği (yatay ve düşey ötelenme, dönme, eğrilik) olan iki düğüm noktalı bir sonlu eleman modeli önerilmiştir. Bernoulli-Euler kirişi için eleman rijitlik ve kütle matrisleri Galerkin yöntemiyle elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar, Fortran dilinde yazılan bir

program yardımıyla elde edilmiştir. Çeşitli koniklik oranları, sınır şartları ve hasar senaryoları için konik kirişlerin modal parametrelerindeki değişimler incelenmiş; hasar konumlarının belirlenmesinde doğal frekans, mod şekli, modal eğim ve modal eğrilik değişimlerinin başarısı tartışılmıştır. Çalışmadan çıkarılan sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- Koniklik oranı doğal frekanslar üzerinde önemli etkiye sahiptir. Sınır şartlarının simetrik olup olmamasına, kesitin sağa veya sola doğru azalmasına bağlı olarak koniklik oranının doğal frekanslar üzerindeki etkisi farklılık göstermektedir.
- Modal eğrilik değişimleri, hasar konumlarının belirlenmesinde mod şekli ve modal eğim değişimlerinden daha başarılıdır. Çatlak sayısı ve uzunluğu ne olursa olsun, modal eğrilik değişimleri yardımıyla hasar konumları tam olarak belirlenebilmektedir.
- Çalışmada önerilen sonlu eleman modeli, yer değiştirme, eğim ve eğriliği bağımsız düğüm noktası serbestlikleri olarak göz önüne almakta ve kiriş eksenini boyunca düğüm noktası yer değiştirmeleri ile eğim ve eğrilik değerlerinin doğrudan elde edilebilmesine imkân vermektedir. Bu özelliği sayesinde, modal eğim ve eğrilik hesabı için sonlu fark formüllerinin kullanımını ortadan kaldırmakta ve hesap hacmi açısından ekonomi sağlamaktadır.

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Salawu O.S., Detection of structural damage through changes in frequency: A review, *Eng Struct*, 19, 718–723, 1997.
2. Doebling S.W., Farrar C.R., Prime M.B., A summary review of vibration-based damage identification methods, *Shock Vib Dig*, 30, 91–105, 1998.
3. Sinou J.J., A Review of Damage Detection and Health Monitoring of Mechanical Systems from Changes in the Measurement of Linear and Non-Linear Vibrations, *Mechanical Vibrations: Measurements, Effects and Control*, Editor: Sapri R.C., Nova Science Publishers, Inc., 643–702, 2009.
4. Farrar C.R., Worden K., An introduction to structural health monitoring, *CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*, 365 (1851), 303–315, 2010.
5. Dilena M., Morassi A., Limongelli M., Vibration based methods for damage localization in bridges, *EVACES'13 – Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures*, Ouro Preto, Brazil, 329–338, 28-30 October 2013.
6. Das S., Saha P., Patro S.K., Vibration-based damage detection techniques used for health monitoring of structures: A review, *J Civ Struct Heal Monit*, 6, 477–507, 2016.
7. Zheng D.Y., Fan S.C., Natural frequencies of a non-uniform beam with multiple cracks via modified Fourier series, *J Sound Vib*, 242, 701–717, 2001.
8. Viola E., Tornabene, F., Vibration analysis of damaged circular arches with varying cross-section, *SDHM Struct. Durab. Health Monit.*, 1 (2), 155–169, 2005.
9. Mazanoglu K., Yesilyurt I., Sabuncu M., Vibration analysis of multiple-cracked non-uniform beams, *J Sound Vib*, 320, 977–989, 2009.
10. Mazanoglu K., Sabuncu M., Vibration analysis of non-uniform beams having multiple edge cracks along the beam's height, *Int J Mech Sci*, 52, 515–522, 2010.
11. Zhang K., Yan X., Multi-cracks identification method for cantilever beam structure with variable cross-sections based on measured natural frequency changes, *J Sound Vib*, 387, 53–65, 2017.
12. Tan G., Liu Z., Shan J., Wu C., Direct and inverse problems on free vibration analysis of cracked non-uniform beams carrying spring-mass systems by finite element method, *Vibroengineering Procedia*, 14, 7–12, 2017.
13. Tan G., Liu Y., Gong Y., Shen Y., Liu Z., Free vibration of the cracked non-uniform beam with cross section varying as polynomial functions, *KSCE J Civ Eng*, 22, 4530–4546, 2018.
14. Wu J.S., Chen D.W., Bending vibrations of wedge beams with any number of point masses, *J Sound Vib*, 262, 1073–1090, 2003.
15. Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K., Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beams by the Adomian modified decomposition method, *J Sound Vib*, 318, 965–981, 2008.
16. Tan G., Wang W., Jiao Y., Flexural free vibrations of multistep nonuniform beams, *Math Probl Eng*, Article ID 7314280, 1–12, 2016.
17. Zhou D., Cheung Y.K., Free vibration of a type of tapered beams, *Comput Methods Appl Mech Eng*, 188, 203–216, 2000.
18. Zhou D., Cheung Y.K., Vibrations of tapered Timoshenko beams in terms of static Timoshenko beam functions, *J Appl Mech*, 68, 596–602, 2001.
19. Civalek Ö., Öztürk B., Free vibration analysis of tapered beam-column with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic foundation, *Geomech Eng*, 2 (1), 45–56, 2010.
20. Katı H.D., Gökdağ H., Multi-step differential transform method for free vibration analysis of beams with tip mass, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 34 (4), 1679–1693, 2019.
21. Bazoune A., Khulief Y.A., Stephen N.G., Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element, *J Sound Vib*, 259, 473–480, 2003.
22. He P., Liu Z., Li C., An improved beam element for beams with variable axial parameters, *Shock Vib*, 20, 601–617, 2013.
23. Tudjono S., Han A., Nguyen D.K., Kiryu S., Gan B.S., Exact shape functions for Timoshenko beam element, *IOSR J Comput Eng*, 19, 12–20, 2017.
24. Dessi D., Camerlengo G., Damage identification techniques via modal curvature analysis: Overview and comparison, *Mech Syst Signal Process*, (52–53), 181–205, 2015.
25. Qiao P., Lu K., Lestari W., Wang J., Curvature mode shape-based damage detection in composite laminated plates, *Compos Struct*, 80, 409–428, 2007.

26. Lestari W., Qiao P., Hanagud S., Curvature mode shape-based damage assessment of carbon/epoxy composite beams, *J Intell Mater Syst Struct*, 18, 189–208, 2007.
27. ANSYS. Mechanical APDL Release 16.0 2014.