www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 3 (2010) 69-85

İstatistikçiler Dergisi

Dinamik finansal analiz: Hayat dışı sigorta şirketi için sayısal örnek

Hakan Yılmaz

Tapu ve Kadastro Genel Müdürlüğü
Strateji Geliştirme Daire Başkanlığı
06100 Bakanlıklar, Ankara
hakanyilmaz82@gmail.com

Murat Büyükyazıcı

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800 Beytepe, Ankara
muratby@hacettepe.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, bir *dinamik finansal analiz* modeli ve bu modelde yer alan stokastik değişkenler hakkında genel açıklamalara yer verilmiştir. Ayrıca bu değişkenler arasındaki ilişkilerden yararlanarak genel bir model kurulmuş ve bu modelin benzetimi yapılmıştır. Sayısal örnekte, varsayımsal bir hayat dışı sigorta şirketinin farklı yatırım stratejilerine göre beklenen iflas olasılıkları ve artık miktarları hesaplanmıştır. Çalışmadaki stokastik değişkenlerin modellenmesinde bazı istatistiksel dağılımlar ve finansal modeller kullanılmıştır. Sayısal örnekten elde edilen sonuçlar incelendiğinde, riskli yatırım tercihlerinin beklenen artık miktarını ve iflas olasılığını nasıl etkilediği görülmektedir. Çalışmada kurulan genel modelin Türk sigorta piyasasına katkıda bulunacağı düşünülmüş, modelin geliştirilebilmesine ilişkin önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar sözcükler: *Dinamik finansal analiz; Varlık-yükümlülük yönetimi; Stokastik benzetim; Faiz oranı modeli; Hasar ödeme modeli.*

Abstract

Dynamic financial analysis: A numerical example for a nonlife insurance company

This study presents an overview of a dynamic financial analysis model with stochastic variables. Furthermore, a general model was set up by using the relationships between that variables and this model was simulated. In that simulation, expected ruin probabilities and economic surplus are evaluated by various investment strategies of the fictious nonlife insurance company. To model the stochastic variables in this study, some statistical distributions and financial models were used. Effects of the risky investment strategies on the expected surplus and ruin probability can be seen by examining the numeric example results below. It is thought that the general model in this study will contribute to the Turkish insurance market and some proposals are made concerning the development of the model.

Keywords: Dynamic financial analysis*; Asset-liability management; Stochastic simulation; Interest rate model; Payment patterns.*

1. Giriş

Dinamik finansal analiz (DFA), finansal dünyanın eskiye göre daha riskli hale gelmesi nedeniyle geliştirilmiş olan bir yöntemdir. 1970'li yıllardan itibaren döviz kuru ve faiz oranlarındaki oynaklığın (volatilite) artması yönündeki eğilim, DFA'nın geliştirilmesini zorunlu kılmıştır [1]. DFA, farklı mali stratejilerin ve sigortacıların maruz kalabileceği finansal risklerin değerlendirilmesinde kullanılabilen etkin bir yöntemdir. Bu yöntem, şirket için olumsuz sonuçlar yaratabilecek finansal koşulların belirlenmesini ve şirket yöneticilerinin bu koşulları önlemek için gereken önlemleri alabilmesini sağlar. Buna göre DFA, olası bazı senaryolara göre finansal sonuçların üretildiği ve bu sonuçların, şirket içi ve şirket dışı koşullardan nasıl etkilenebileceği üzerine kurulan sistematik bir yaklaşım olarak tanımlanabilir [6]. Diğer bir deyişle, farklı stratejilerin şirket üzerindeki finansal etkisini ölçmeye yarayan bir yöntemdir.

DFA, hayat dışı sigorta ve reasürans şirketlerinin finansal modellemeleri için de kullanılabilen büyük çaplı bilgisayar benzetim tekniklerine dayalı sistematik bir yaklaşımdır. DFA modellemesi sayesinde, şirkete ait risklerin sınıflandırılmasına ilişkin uygun biçimde seçilmiş rasgele değişkenler görülebilir. Burada ana fikir, şirketin geleceğe ait yükümlülüklerini karşılayabilip karşılayamayacağını olasılıksal olarak ölçülendirmektir [11].

Literatürde çok sayıda DFA araştırmaları ve uygulamaları mevcuttur. Dünya çapında en büyük mesleki aktüerya organizasyonlarından biri olan Hasar Aktüerleri Derneği (CAS), bir DFA kurulu oluşturmuştur. Bu kurul 1990'lı yılların sonlarından itibaren, varlık-yükümlülük analizlerinde kullanılmak üzere benzetim modelleri geliştirmeye başlamıştır. Kurulun elde ettiği sonuçlar, bir DFA el kitabında yayımlanmıştır [3]. Blum ve Dacarogna v.d. [2], DFA'nın temel unsurlarına ve uygulamalarına ilişkin örnekler kullanarak bazı incelemelerde bulunmuştur. Lowe ve Stanard [10] ile Kaufmann, Gadmer ve Klett [9], DFA için birer genel model kurmuşlar ve bu modelin uygulamasını yapmışlardır. D'Arcy ve Gorvett [4], varlık-yükümlülük sigortası alanında bir optimal büyüme oranı belirleyebilmek amacıyla DFA uygulamalarına başvurmuşlardır. Schmeiser [13], bir Alman hayat dışı sigorta şirketine ait veriler kullanarak varlık-yükümlülük sigortası ile ilgilenen sigortacılar için bir risk yönetimi yaklaşımı geliştirmiştir.

Bu çalışmada; DFA yöntemi aracılığıyla, bir hayat dışı sigorta şirketinin yükümlülüklerine ve yatırım planlamalarına ilişkin riskleri, karşılıklı etkileşimleri ile birlikte stokastik benzetim tekniklerini kullanarak analiz edilmiş ve şirket yöneticilerine, alacakları finansal kararlarda yardımcı olacak bir sayısal örnek yapılmıştır. Benzetim programının yazılmasında Matlab programından yararlanılmıştır.

2. Sigortacılıkta DFA bileşenleri

Sigortacılık uygulamalarında DFA, finans ve aktüerya biliminde kullanılan bazı model ve teknikleri bir dinamik benzetim modeli içerisinde ele alır. DFA'nın şirketler tarafından uygulanmasının başlıca sebebi, geleceğe ilişkin yükümlülüklerin karşılanabilip karşılanamayacağını görebilmektir. Hayat dışı sigorta şirketlerinin, faiz oranlarındaki oynaklığın artması yönündeki eğilimle birlikte yükümlülükleri çok değişkenlik göstermeye başlamıştır. Dolayısıyla bu şirketlerin yükümlülüklerinin klasik aktüeryal yöntemlerle modellenmesi yetersiz kalmaya başlamıştır. Bu nedenle hayat dışı sigorta şirketlerinin nakit akış analizlerinde stokastik benzetim teknikleri kullanılmaktadır. Sigorta şirketlerinin varlıklarını tehdit eden risklerin birbirinden bağımsız olarak incelenmesi yerine, bu risklerin birbirleriyle etkileşimlerinin ve riskleri etkileyen dış faktörlerin incelenmesi gerekliliği DFA'nın geliştirilmesine neden olmuştur. DFA; çok sayıda rasgele senaryonun üretildiği, şirketlerin her bir senaryoya karşı reaksiyonlarının hesaplandığı ve her bir senaryo sonucunun istatistiksel olarak incelendiği stokastik benzetim tekniklerine dayalı bir yöntemdir. Bu yöntem sayesinde şirketlerin karlılığı ve finansal istikrar yönetimi sağlanır.

Bu bölümde, hayat dışı bir sigorta şirketi için örnek bir DFA modelinin bileşenleri sunulmaktadır. Her bir bileşen için bu bölümde ele alınan matematiksel modeller, seçenek çok sayıda modelden sadece birkaç tanesidir. Araştırmacılar, burada ele alınan her bir DFA bileşeni için uygun başka modeller kullanabilecekleri gibi, bu çalışmada kullanılmamış başka bileşenleri de modellerine ekleyebilirler.

2.1. Faiz oranı modeli

Faiz oranlarındaki değişim, modern finans sektörünü yakından ilgilendiren önemli bir konudur. Özellikle bankalar ve sigorta şirketleri gibi finansal aracı kurumlar, faiz oranlarındaki dalgalanmalardan etkilenirler. Çünkü bu kurumlara ilişkin varlık ve yükümlülükler, faiz oranı hareketleriyle doğrudan ilişkilidir [1]. Faiz oranlarındaki değişimlerin olası etkileri göz önüne alındığında, bu değişimlere ait modeller geliştirmek önem kazanmıştır.

Birçok DFA modelinde faiz oranları; yatırım gelirlerini, hasar şiddetini, varlık getirilerini ve sigorta kazançlarını etkileyen önemli bir faktördür. Faiz oranı modelleri, sigorta şirketlerinin varlık ve yükümlülüklerini değerlendirme açısından kritik bir role sahiptir. Sigortacılar fiyatlandırma ve varlık-yükümlülük yönetimi süreçlerinde faiz oranı modellerini kullanmalıdırlar. Bu yüzden finans alanında geniş kapsamlı stokastik faiz oranı modelleri geliştirilmiştir. Genel denge yaklaşımına ilişkin şu modeller örnek verilebilir: Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) (1985), Brennan ve Schwartz (1979), Longstaff ve Schwartz (1992). Arbitraj esaslı modellere iki örnek ise Ho ve Lee (1986) ile Heath, Jarrow ve Morton (HJM) (1992) modelleridir [1].

Kolay uygulanabilir ve yaygın kullanıma sahip olduğu için bu çalışmada, aşağıda Eş. (1)'de verilen CIR modeli kullanılacaktır[1].

$$r_t = r_{t-1} + \kappa(\theta - r_{t-1}) + \sigma\sqrt{r_{t-1}}B_t \tag{1}$$

CIR modeli aynı zamanda karekök süreci olarak da bilinir. Çünkü faiz oranlarındaki oynaklık, faiz oranlarının bugünkü değerinin kareköküyle ilişkilidir. Vasicek modelinin aksine CIR modeli, koşullu oynaklığı kısa dönem faiz oranı düzeyiyle ilişkilendirir. CIR modelinin Vasicek modeline bir diğer üstünlüğü, faiz oranlarının negatif olamamasıdır.

Bu genel denklem, faiz oranlarındaki değişim ve faiz oranları düzeyi arasındaki ilişkinin derecesine karar verme konusunda esneklik sağlar. CIR modeli aynı zamanda tahvil fiyatlarına analitik olarak karar verme amacıyla da kullanılabilir. CIR modeli, tahvil fiyatlarına aşağıda Eş. (2)'de verilen denklem yardımıyla karar verir.

$$P(t,T) = e^{\ln A(t,T) - B(t,T) r_t} \tag{2}$$

Eş. (2)'de,

$$A(t,T) = \left(\frac{2Ge^{\frac{(\kappa+G)T}{2}}}{(\kappa+G)(e^{GT}-1)+2G} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \tag{3}$$

$$B(t,T) = \frac{2(e^{GT}-1)}{(\kappa+G)(e^{GT}-1)+2G} \tag{4}$$

Eş. (3) ve Eş. (4)'de,

$$G = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2} \tag{5}$$

olarak ifade edilir. Eş. (2), CIR modeli için verim eğrisinin türetilmesinde kullanılabilir. Çünkü tahvil fiyatlarını ve getirilerini belirleyen temel unsur kısa dönem faiz oranıdır. CIR modeli de Vasicek gibi, tüm tahviller arasında yüksek bir ilişkinin olduğunu varsayar ve dolayısıyla vade yapısı dinamiklerini sınırlar.

Faiz oranları vade yapısı ya da verim eğrileri, firmaların portföy yönetimi, finans mühendisliği, finansman ve yatırım kararları konularında sıkça kullanılmaktadır. Vade yapısı, verim eğrisinin şeklini belirler. Ayrıca finansal teorilerin gelişiminde ve test edilmesinde de önemli bir araçtır.

Eş. (2)'den yararlanılarak, t zamanında olan ve vadesi $t+T$ zamanında dolacak olan kuponsuz tahvil getirilerinin vade yapısı aşağıdaki Eş. (6) yardımıyla modellenebilir [9].

$$R(t,T) = \frac{r_t B_T - \ln A_T}{T} \tag{6}$$

Eş. (6)'daki $R(t,T)$, bileşik spot faiz oranını ifade etmektedir. A ve B ifadelerinin açılımı ise Eş. (3) ve Eş. (4) de verilmiştir.

Bu çalışmada, yatırım aracı olarak tahvil ve hisse senetlerinin modellemesi yapılmıştır. Faiz oranları vade yapısı da, tahvil fiyatlarından elde edilebilir. t zamanı için vadesi t+T zamanında dolacak olan kuponsuz tahvil getirilerinin vade yapısı, hisse senedi getirileri ve rezerv miktarının hesaplanmasında kullanılmıştır.

2.2. Genel enflasyon

Faiz oranları ile enflasyon arasındaki ilişki, ekonomide en çok incelenen konulardan biridir [12]. Diğer değişkenler sabit kabul edildiğinde enflasyon oranı artışı beklentisi, faiz oranlarının da artmasına neden olacaktır. Dolayısıyla reel faiz oranı sabit kalır. Enflasyon ve faiz oranları arasındaki bu uzun dönemli ilişki, Fisher etkisi olarak adlandırılır. Fisher etkisi olarak adlandırılan bu yaklaşıma göre kısa dönem faiz oranlarındaki hareketler, beklenen enflasyondaki dalgalanmaları yansıtır. Bu nedenle kısa dönem faiz oranları, geleceğe ilişkin enflasyon değerlerini tahmin etmede kullanılabilir.

Kaufmann, Gadmer ve Klett (2001), genel enflasyon i_t'nin benzetimini, kısa dönem faiz oranlarını kullanarak yapmışlardır. Bunun için, kısa dönem faiz oranlarına, Eş. (7)'de verilen doğrusal regresyon modelini uygulamışlardır.

$$i_t = a^I + b^I r_t + \sigma^I \varepsilon_t^I \tag{7}$$

Eş. (7)'de,

$\varepsilon_t^I \sim N(0,1)$,
a^I, b^I, σ^I : regresyonla tahmin edilen parametreler,
I : genel enflasyon indeksi,

olarak ifade edilir.

2.3. Hisse senedi getirileri

Bir hayat dışı sigorta şirketinin varlık sınıfının büyük bir kısmını sabit getirisi olan varlıklar, hisse senetleri ve gayrimenkuller oluşturur. Bu çalışmada varlık tipi olarak hisse senetlerinin getirileri modellenmiştir. Hisse senetlerine ilişkin risk ve getiri miktarları arasındaki ilişkiyi açıklamaya yarayan finansal varlık fiyatlandırma modeli (CAPM), hisse senetleri modellemesi için kullanışlı bir yöntemdir.

William Sharpe (1964) ve John Lintner (1965) tarafından geliştirilen CAPM, varlık fiyatlandırma teorilerinin başlangıcını oluşturur [7]. CAPM modelinin uygulanmasında öncelikle, hisse senedi piyasasını bir bütün olarak temsil ettiği varsayılan piyasa portföyü getirisi modellenmelidir. Hisse senedi fiyatlarıyla tahvil fiyatları arasında yüksek bir korelasyon ilişkisi olduğu düşünüldüğünde, t yılı için 1 yıllık anlık faiz oranı getirisi koşulu altında hisse senedi piyasa portföy getirilerine ilişkin Eş. (8)'de verilen doğrusal model kullanılabilir [9].

$$E(r_t^M \mid R(t,1)) = a^M + b^M (e^{R(t,1)} - 1) \tag{8}$$

Eş. (8)'de,

r_t^M : piyasa portföyü getirisi,
$e^{R(t,1)} - 1$: risksiz getiri,
a^M, b^M : regresyonla tahmin edilen parametreler,

olarak ifade edilir.

Bu çalışmada bir yıllık alt dönemler için hisse senedi değerleri modelleneceğinden bir yıllık spot faiz oranı koşulu altında modelleme yapılacaktır. Bir hisse senedinin riski; getirisinin, makroekonomik olaylardan ne ölçüde etkilendiğine bağlı olup, bu getirinin piyasa portföy getirisindeki dalgalanmalara duyarlılığı ile ölçülebilir. Bu duyarlılık hisse senedinin beta katsayısı olarak ifade edilmektedir. Bir yatırım aracına ait beta katsayısı bilindiğinde CAPM, bu yatırım aracı için beklenen risk primini tahmin edebilmektedir. Yatırım kararlarında beta katsayısı; portföy performans ölçümüne, risk kontrolüne ve CAPM aracılığıyla beklenen getiri miktarlarını hesaplamaya yarar. Beta ve beklenen getiri arasında doğrusal bir ilişki vardır. Beta katsayısını tahmin etmek için, bir hisse senedine ait geçmişte gözlemlenen getiri değerleriyle piyasa endeksindeki getiri değerleri arasında bir regresyon modelinin kurulması gerekir. S gibi keyfi bir hisse senedinden elde edilen koşullu beklenen getiriyi bulmak için Eş. (9)'de verilen CAPM formülü kullanılır [9].

$$E(r_t^S \mid R(t,1)) = (e^{R(t,1)} - 1) + \beta_t^S (E(r_t^M \mid R(t,1) - (e^{R(t,1)} - 1)) \tag{9}$$

Eş. (9)'da,

r_t^S : S hisse senedine ilişkin getiri miktarı,

β_t^S : S hisse senedinin β sabiti,

olarak ifade edilir. S hisse senedinin β sabiti Eş. (10) kullanılarak elde edilir.

$$\beta_t^S = \frac{Cov(r_t^S, r_t^M)}{Var(r_t^M)} \tag{10}$$

2.4. Hasar sıklığı ve şiddetindeki değişim

Hasar sıklığı ve şiddeti, bir sigorta şirketinin geleceğe dair toplam kayıp miktarını belirleyen iki temel stokastik değişkendir. Bu değişkenlerdeki değişimler, bir sigorta şirketinin bütçesine ciddi mali kayıp veya kazanç olarak yansıyabilir.

Bu çalışmada hasar sıklığı ve şiddetindeki değişim, enflasyon değişkenine bağlı olarak modellenmiştir. Hasar sıklığındaki değişim δ_t^F, hasar şiddetindeki değişim δ_t^X ve bu iki değişkenin birleşik etkisi δ_t^P ile gösterilmiştir. Bu değişkenlerin değerleri aşağıda verilen Eş. (11-13) kullanılarak elde edilebilir [9].

$$\delta_t^F = maks(a^F + b^F i_t + \sigma^F \varepsilon_t^F, -1) \tag{11}$$

$$\delta_t^X = maks(a^X + b^X i_t + \sigma^X \varepsilon_t^X, -1) \tag{12}$$

$$\delta_t^P = (1+\delta_t^F)(1+\delta_t^X) - 1 \tag{13}$$

Eş. (11-13)'de,

$\varepsilon_t^F \sim N(0,1)$, $\varepsilon_1^F, \varepsilon_2^F, \ldots$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler,

$\varepsilon_t^X \sim N(0,1)$, $\varepsilon_1^X, \varepsilon_2^X, \ldots$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler,

$\forall t_1, t_2$ için $\varepsilon_{t_1}^F, \varepsilon_{t_2}^X$ bağımsız,

$a^F, b^F, \sigma^F, a^X, b^X, \sigma^X$: regresyonla tahmin edilen parametreler

olarak ifade edilir.

δ_t^P, enflasyon oranlarındaki değişikliklerden kaynaklanan hasar trendindeki değişimi ifade eder. Bu değişken, prim oranlarının modellenmesi kullanılacaktır.

Hasar sıklığı ve şiddetindeki değişimlere ilişkin birikimli değişimler aşağıda Eş. (14) ve Eş. (15)'de verilmektedir. Bu değerler, ödeme modellerinde ve şirketin elinde bulundurması gereken rezerv miktarının hesaplanmasında kullanılacaktır.

$$\delta_t^{F,c} = \prod_{s=t_0+1}^{t} (1+\delta_s^F) \tag{14}$$

$$\delta_t^{X,c} = \prod_{s=t_o+1}^{t} (1+\delta_s^X) \tag{15}$$

Bu denklemlerde t_0+1, modellenen ilk yılı ifade eder.

2.5.Katastrofik olmayan hasarlar

Bir sigorta şirketi için riskin genel yapısı, toplanan primler ve meydana gelen hasarlarla doğrudan ilişkilidir. Sigorta şirketleri için risk, belirli bir zaman aralığında toplanacak olan primler ve o zaman aralığında ödenecek olan toplam hasar miktarıyla belirlenebilir. Hasar oluşumuna bağlı olarak toplam hasar miktarı ve toplanacak primler stokastik birer değişken olduklarından, şirketlerin zarar etmemeleri için bu değişkenlere ilişkin doğru tahminde bulunmaları önemlidir.

Genel olarak hayat dışı sigorta şirketlerinin maruz kaldıkları hasarlar, katastrofik ve katastrofik olmayan hasarlar olmak üzere ikiye ayrılabilir. Katastrofik olmayan olaylar için yükümlülük riski, şirkete bildirilecek hasarların miktarı ve zamanına ilişkin belirsizlikleri içerir. Katastrofik olmayan hasarlar genellikle, istatistiksel olarak katastrofik hasarlardan farklı dağılış gösterir. Bu nedenle şirketin maruz kalacağı tüm riskleri aynı dağılım yardımıyla modellemek yerine, katastrofik olmayan risklerin katastrofik risklerden ayrı biçimde dağıldığı göz önüne alınarak modelleme yapılır.

Bir sigorta şirketine bildirilecek olan toplam hasar miktarı, iki temel stokastik değişkene bağlıdır: hasar sayısı ve hasar şiddeti. Bu çalışmada katastrofik olmayan hasarlara ilişkin modelleme yapılırken; hasar sayısı değişkeni için Poisson dağılımından, hasar şiddeti değişkeni için ise gamma dağılımından yararlanılacaktır. t zamanı için hasar sayısı değişkeni N_t ile, bu değişkenin ortalaması ve varyansı sırasıyla m_t^N ve v_t^N ile gösterilir. Buna göre $N_t \sim Poi(\lambda)$ için Eş. (16,17) yazılabilir.

$$m_t^N = E\left[N_t\right] = \lambda \tag{16}$$

$$v_t^N = V\left[N_t\right] = \lambda \tag{17}$$

Eş. (16, 17)'de,

$m_t^N = w_t \mu^F \delta_t^{F,c}$

$v_t^N = (w_t \sigma^F \delta_t^{F,c})^2$

w_t : t zamanı için toplam poliçe sayısı

μ^F : geçmiş verilerden tahmin edilen ortalama hasar sıklığı

σ^F : geçmiş verilerden tahmin edilen hasar sıklığının standart sapması

olarak ifade edilir [9].

t zamanı için hasar şiddeti değişkeni X_t ile gösterilirse, $X_t \sim$ Gamma(α, θ) için Eş. (18,19) yazılabilir.

$$m_t^X = E\left[X_t\right] = \alpha\theta \quad (18)$$
$$v_t^X = V\left[X_t\right] = \alpha\theta^2 \quad (19)$$

Eş. (18,19)'da;

$m_t^X = \mu^X \delta_t^{X,c}$
$v_t^X = (\sigma^X \delta_t^{X,c})^2 / \delta_t^{F,c}$
μ^X : geçmiş verilerden tahmin edilen hasar şiddeti ortalaması
σ^X : geçmiş verilerden tahmin edilen standart sapma

olarak ifade edilir [9].

2.6. Sigorta piyasası döngüleri

Bir sigorta şirketine ait artık miktarının hesaplanmasında, sigorta piyasası hareketlerinin göz önüne alınması gerekir. Bir şirketin hem kendi hem de sigortalıları açısından en uygun prim oranlarını belirleyebilmesi için, şirketler arasındaki rekabet koşullarını da dikkate alması gerekir. Bu rekabet koşulları, sert ve zayıf piyasa şartları arasındaki konjonktürel hareketler sonucu ortaya çıkar [8].

Sigorta piyasası döngüleri, piyasadaki zayıf ve güçlü rekabet koşullarının düzenli periyotlarla değişim göstermesidir. Zayıf rekabet koşullarının hakim olduğu bir piyasada şirket, artık miktarını artırmak için sigortalılardan yüksek primler talep edecektir. Daha yüksek rekabetin bulunduğu piyasalarda ise şirket, en azından piyasa hisselerini koruyabilmek adına daha düşük primleri kabul etmek zorunda kalabilir. Bu koşullar, sigorta şirketlerinin iflas edip etmemesinde önemli etkiye sahiptir [8].

Her ne kadar sigorta piyasası döngüleri faiz oranlarındaki değişimler tarafından yönlendiriliyor olsa da, rekabete dayalı stratejilerden kaynaklanan döngüler için bir kesikli zamanlı homojen Markov zincir alt modeli kullanılabilir [9]. Piyasada üç çeşit rekabet durumu olduğu düşünülmüş ve bu durumlar için aşağıdaki adlandırmalar yapılmıştır.

1- Zayıf rekabet
2- Orta rekabet
3- Güçlü rekabet

Bu durumda herhangi bir i durumundan j durumuna bir yıl içinde geçiş olasılığı p_{ij}, her projeksiyon yılı için eşittir ($i, j \in \{1,2,3\}$). Her bir geçiş olasılığı, matris formatında Eş. (20)'de olduğu gibi gösterilebilir.

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Her bir geçiş olasılığı p_{ij}'leri ($i, j \in \{1,2,3\}$) belirlemek zordur. Her bir geçiş olasılığına uygun değerler bulmak için, Markov zincirinin indirgenemez ve pozitif geri dönülen olduğu varsayılarak, denge olasılık dağılımına ilişkin $\pi = \pi T$ eşitliğinden yararlanılabilir [9].

2.7. Hasar ödeme modeli

Risk, sigortacılığın bir parçasıdır ve sigortacıların karşısına farklı biçimlerde çıkabilir. Sigorta şirketleri, gelecekte gerçekleşmesi olası hasarlar ve gerçekleşmiş fakat henüz ödenmemiş, ödeme tarihi kesin olarak bilinmeyen hasarlardan kaynaklanan risklere maruz kalabilir. Bu risk çeşitleri, şirketin piyasadaki finansal gücünü yansıtan bazı finansal sonuçlar doğurabilir. Bu riskleri birlikte modellemek, şirketin geleceğe yönelik yükümlülüklerini karşılayabilme gücünü daha gerçekçi değerlendirme fırsatı verir.

Hasar sürecindeki ödeme zamanlarına ilişkin belirsizliklerin modellenmesinde, aynı hasar yılından kaynaklanan farklı ödeme tutarlarının tamamı bir ödeme modeli oluşturur [9]. Bir hasarın gerçekleşmesiyle ödenmesi arasındaki süre açılım yılı (development year) olarak adlandırılır ve bir ödeme modeli, açılım yıllarının sayısına eşit uzunlukta bir vektördür. Vektörün *i.* bileşeni, *(i-1).* açılım yılında ödenmiş olan nihai hasar miktarının yüzdesini gösterir. Bir t hasar yılına ait yıllık ödemeler düşünüldüğünde *i.* açılım yılı, *(t+i)* takvim yılına karşılık gelir. Bu çalışmada hasar yılları t_1 ile, açılım yılları t_2 ile ve takvim yılları t_0 ile gösterilecektir.

Geçmişteki hasar yılları düşünüldüğünde, günümüze kadar ödenmiş olan hasar miktarları bilinmektedir. Fakat gelecekte ödenecek olan hasar miktarları hakkında kesin bir bilgiye sahip olmak mümkün değildir. Çoğu aktüeryal tekniğe göre, geçmişteki hasar ödeme yapısı göz önüne alınarak bir ortalama hasar ödeme modeli oluşturulur.

Bir hasar yılından kaynaklanan hasar miktarının tamamının ödendiği toplam yıl sayısı, nihai açılım yılı sayısı olarak adlandırılır ve τ ile gösterilir. t_1 hasar yılında gerçekleşen hasarlar için nihai hasar ödeme miktarı, $Z_{t_1}^{ult} = \sum_{t=0}^{\tau} Z_{t_1,t}$ biçiminde gösterilebilir. Şirketin elinde bulundurması gereken rezerv miktarını belirlemek için öncelikle rasgele hasar ödemeleri Z_{t_1,t_2}'lerin benzetiminin yapılması gerekir. Gelecek yıllara ait nihai hasar miktarı $Z_{t_1}^{ult}$ değişkeninin tahmin edilmesi için gerekli modeller, Eş. (23, 24)'de verilmiştir.

Takvim yılından önceki hasar yılları için $t_1 + t_2 \le t_0$ koşulunu sağlayan Z_{t_1,t_2} hasar ödemeleri bilinmektedir. Bu ödeme miktarları, hasarın gerçekleştiği fakat ödemelerin henüz yapılmadığı miktarları tahmin etmek için kullanılır. Bu tahmini yapmak için geçmişte gerçekleşen hasar ödemelerinden bir hasar açılım faktörü elde edilir. Bu faktör, daha sonra hasar ödemeleri toplamıyla çarpılarak hasar tutar tahminleri elde edilecektir. Hasar açılım faktörü Eş. (21)'de verilmiştir [9].

$$d_{t_1,t_2} = \frac{Z_{t_1,t_2}}{\sum_{t=0}^{t_2-1} Z_{t_1,t}}, \quad t_2 \ge 1 \tag{21}$$

Lognormal dağılım, hasar açılım faktörlerine genellikle uyum sağladığı için, geçmişte gerçekleşmiş fakat henüz ödemesi yapılmamış $(t_1 \le t_0)$ hasarlar için, gelecek takvim yıllarında $(t_1 + t_2 \ge t_0 + 1)$ yapılacak ödemeleri tahmin etmek için Eş. (22)'de verilen hasar ödeme modeli kullanılacaktır.

$$Z_{t_1,t_2} = d_{t_1,t_2} \sum_{t=0}^{t_2-1} Z_{t_1,t} \tag{22}$$

Burada;

$d_{t_1,t_2} \sim \text{lognormal}(\mu_{t_2}, \sigma_{t_2}^2)$

μ_{t_2} : t_2 açılım yılı için geçmiş verilerden tahmin edilen logaritmik hasar açılım faktörü ortalaması

$\sigma_{t_2}^2$: geçmiş verilerden tahmin edilen logaritmik hasar açılım faktörünün varyansı

olarak ifade edilir.

Eş. (22)'de verilen hasar ödeme modeli, geçmişteki hasar miktarlarında önemli ölçüde değişiklik olmadığı müddetçe gerçekçi sonuçlar verir. Fakat geçmişteki açılım yıllarının birinde yüksek miktarda nihai hasar miktarı ödenmişse bu yaklaşım, rezerv miktarının ve gelecekte ödenecek hasar miktarlarının yüksek hesaplanmasına neden olur [9]. Dolayısıyla tek başına büyük miktarda ödemeye neden olan hasarlar ayrı bir biçimde hesaplanmalıdır. $t_1 < t_0$ koşulunu sağlayan hasar yılları için nihai hasar miktarı Eş. (23)'deki gibi hesaplanır.

$$Z_{t_1}^{ult} = \sum_{t=0}^{\tau} Z_{t_1,t} \tag{23}$$

Gelecekte gerçekleşmesi muhtemel hasarları modellerken Bölüm 2.5'de verilen hasar sayısı ve hasar şiddeti değişkenlerinden yararlanılacaktır. $t_1 \geq t_0 + 1$ koşulunu sağlayan hasar yılları için toplam hasar miktarlarını belirlemek için aşağıdaki model kullanılacaktır.

$$Z_{t_1}^{ult} = N_{t_1} X_{t_1} + \sum_{i=1}^{M_{t_1}} Y_{t_1,i} - R_{t_1} \tag{24}$$

Burada M_{t_1} ifadesi ilgili hasar yılı için katastrofik olay sayısı, R_{t_1} ise t_1 hasar yılı için yapılan reasürans ödemesidir.

Açılım yılları boyunca Eş. (24)'le tahmin edilen nihai hasar miktarlarının aşamalı ödemelerinin modellenmesi gerekmektedir. Bu nedenle nihai hasar miktarlarının aşamalı ödeme oranları olan A_{t_1,t_2}, geçmiş takvim yıllarının ödeme modellerine bağlı beta dağılım fonksiyonu yardımıyla Eş. (25)'deki gibi modellenecektir [9].

$$A_{t_1,t_2} = \begin{cases} B_{t_1,0} & t_2 = 0 \\ B_{t_1,t_2}\left(1 - \sum_{t=0}^{t_2-1} A_{t_1,t}\right) & t_2 \geq 1 \end{cases} \tag{25}$$

Eş. (25)'de B_{t_1,t_2}, t_2 açılım yılında gerçekleşen ve t_1 hasar yılındaki toplam hasar ödemeleriyle ilişkili aşamalı hasar ödeme miktarıdır. Bu değişken, α ve β parametreleriyle beta dağılımına sahiptir. Buradaki α ve β parametreleri aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde seçilmelidir [9].

$$m_{t_1,t_2} = E(B_{t_1,t_2}) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \tag{26}$$

$$v_{t_1,t_2} = V(B_{t_1,t_2}) = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)} \tag{27}$$

Eş. (26, 27)'de m_{t_1,t_2}, t_1 hasar yılından kaynaklanan ve t_2 açılım yılına kadar yapılan hasar ödemeleriyle ilişkili olan aşamalı hasar ödemelerinin ortalama değeridir. Bu değer $\frac{A_{t_1-1,t_2}}{\sum_{t=t_2}^{\tau} A_{t_1-1,t}}$, $\frac{A_{t_1-2,t_2}}{\sum_{t=t_2}^{\tau} A_{t_1-2,t}}$ ... biçiminde hesaplanır. v_{t_1,t_2} ifadesi ise geçmiş hasar açılım faktörlerinden elde edilen varyans değeridir. Buna göre gelecekteki hasar yılları $(t_1 \geq t_0)$ için t_2 açılım yılı itibariyle ödeme miktarları Eş. (28)'deki gibi hesaplanabilir.

$$Z_{t_1,t_2} = A_{t_1,t_2} Z_{t_1}^{ult} \tag{28}$$

Ödeme miktarlarının yanı sıra, şirketin elinde tutması gereken rezerv miktarının da tahmini yapılacaktır. Her t_1 hasar yılı için, t_2 açılım yılları itibariyle nihai hasar miktarının tahmini Eş. (29)'da verildiği gibidir.

$$\hat{Z}^{ult}_{t_1,t_2} = \sum_{t=t_2+1}^{\tau} (1+e^{\mu_t}) \sum_{t=0}^{t_2} Z_{t_1,t} \tag{29}$$

Eş. (29)'da μ_t, t açılım yılı için bir logaritmik hasar açılım faktörüdür. Eş. (29), t_1+t_2 yılı için tahmini bir değerdir. t_1+t_2 takvim yılı için t_1 hasar yılına göre rezerv miktarı, tahmin edilen nihai hasar miktarı $\hat{Z}^{ult}_{t_1,t_2}$ ile t_1 hasar yılı için ödenmiş olan hasar miktarı arasındaki farkla hesaplanır. Benzer biçimde t_1+t_2 takvim yılı için, her t_1 hasar yılı için bir iskonto edilmiş nihai hasar miktarı tahmini elde edilebilir. Burada takvim yılına kadar ödenmiş olan hasar miktarlarının o günkü değeri ele alınırken, geleceğe yönelik ödeme miktarlarının iskonto miktarı hesaplanmaktadır.

$$\hat{Z}^{ult,disc}_{t_1,t_2} = (1+e^{-R_{t_1+t_2,1}} e^{\mu_{t_2+1}} + \sum_{s=t_2+2}^{\tau} e^{-R_{t_1+t_2,s-t_2}} e^{\mu_s} \prod_{t=t_2+1}^{s-1} (1+e^{\mu_t})) \sum_{t=0}^{t_2} Z_{t_1,t} \tag{30}$$

Eş. (30)'da μ_t, t açılım yılına ait logaritmik hasar geliştirme faktörüdür.

3. Birleştirilmiş DFA modeli

t zamanındaki artık miktarı U_t, şirketin sahip olduğu varlıkların piyasa değeriyle şirkete ait yükümlülüklerin piyasa değeri arasındaki fark olarak ifade edilir. Bir sigorta şirketinin artık miktarı, o şirketin finansal gücünü yansıtır. Artık miktarı negatif olduğu zaman şirketin iflas ettiği düşünülür. Artık miktarındaki değişimler, Eş. (31) yardımıyla belirlenebilir.

$$\Delta U_t = P_t + (I_t - I_{t-1}) + (C_t - C_{t-1}) - Z_t - E_t - (R_t - R_{t-1}) - T_t \tag{31}$$

Eş. (31)'da kullanılan değişkenlerin anlamları aşağıdaki biçimdedir:

$U_t =$ t zamanındaki artık miktarı
$P_t =$ t zamanında kazanılmış primler
$I_t =$ şirketin sahip olduğu varlıkların t zamanındaki değeri
$C_t =$ şirketin t zamanındaki öz sermayesi
$Z_t =$ t ödeme yılında yapılan ödeme miktarı
$E_t =$ t zamanı için masraflar
$R_t =$ t zamanı için iskonto edilmiş rezerv miktarı
$T_t =$ t zamanında ödenen vergiler

Bir sigorta şirketinin kazanacağı primler; hasar trendindeki değişim, sigorta piyasasının durumu ve toplam poliçe sayısına bağlıdır. Buradan yola çıkarak prim değişkeni, Eş. (32)'de ki gibi modellenebilir.

$$\tilde{P}_t = (1+\delta_t^P)\,(1+c_{m_{t-1},m_t})\,\frac{w_t}{w_{t-1}}\tilde{P}_{t-1} \tag{32}$$

Eş. (32)'de;

m_t : t yılındaki piyasa durumu
$c_{A,B}$: piyasa koşulları A durumundan B durumuna değiştiğinde primlerdeki değişime etki eden sabit katsayı
w_t : t zamanı için toplam poliçe sayısı

olarak ifade edilir.

$c_{A,B}$ değişkenleri, analizin başlangıcında girdi parametresi olarak hazır olmak zorundadır. Piyasa durumunun A'dan B'ye geçmesinden kaynaklanan prim yüzdesindeki değişimleri tahmin ederken, durumun B'den tekrar A'ya geçmesi halinde piyasa etkisinin sıfır olduğu varsayılacaktır. Bu durum şu şekilde de ifade edilebilir: $(1+c_{A,B})(1+c_{B,A})=1$. Aynı zamanda piyasa koşullarının A durumundan B'ye, daha sonra ise B durumundan C'ye geçmesi nedeniyle primlerde oluşan değişimle, piyasanın A durumundan direk olarak C durumuna geçmesi nedeniyle primlerde oluşan etki aynı olmalıdır. Bu durum ise şu şekilde formüle edilebilir: $(1+c_{A,B})(1+c_{B,C})=(1+c_{A,C})$. Toplam poliçe sayısındaki değişimi modellemek için Eş. (33)'de verilen otoregresif bir yaklaşım olan AR(1) modelinden yararlanılmıştır.

$$w_t=(a+b\,w_{t-1}+\varepsilon_t)^+ \tag{33}$$

Eş. (33)'de;

$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2...$ bağımsız rasgele değişkenler
a,b,σ : regresyonla tahmin edilen parametreler

olarak ifade edilir.

Eş. (33)'deki b parametresinin 1'den küçük olması, AR(1) sürecinin durağan olmasını sağlar.

Eş. (32)'de belirtilen geçmiş yıllardaki hasarlara ve toplam poliçe sayısına bağlı olarak hesaplanan prim oranları, prim yetersizliğine ilişkin bazı belirsizliklere neden olabilir. Eş. (32) ile belirlenecek olan yazılan prim miktarları, t projeksiyon yılı için eşitlikteki diğer tüm değişkenlerin (δ_t^P, c_{m_{t-1},m_t}, w_t) önceden bilinmesi ve başlangıç primi $\tilde{P}_{t_0}$ ' nın yeterli olduğu varsayımı altında şirket için yeterli olacaktır. Fakat t yılında alınacak primler, t yılından önce belirlenmelidir. Bu nedenle t projeksiyon yılı için toplanacak olan primlerin modellenebilmesi amacıyla, Eş. (32)'deki rasgele değişkenlerle bu değişkenlerin tahminlerinin yer değiştirmesi gerekmektedir.

$$P_t=(1+\hat{\delta}_t^P)(1+\hat{c}_{m_{t-1},m_t})\frac{\hat{w}_t}{w_{t-1}}\tilde{P}_{t-1} \tag{34}$$

Eş. (34)'de;

$$\hat{\delta}_t^P=\left[1+a^X+b^X(a^I+b^I(ab+(1-a)r_{t-1}))\right]\left[1+a^F+b^F+(a^I+b^I(ab+(1-a)r_{t-1}))\right]-1$$
$$\hat{c}_{m_{t-1},m_t}=\sum_{m=1}^{3}\mathrm{p}_{\mathrm{m}_{t-1},m}c_{m_{t-1,t}}$$
p_{m_{t-1},m_t} : geçiş olasılıkları
$$\hat{w}_t=a+b\,w_{t-1}$$

olarak ifade edilir.

Eş. (32) yeterli prim miktarlarını tanımlayan rasgele bir değişkeni ifade ederken Eş. (34) gerçek yazılan primleri ifade eden bu rasgele değişkenin beklenen değeridir. Bu iki eşitlik birleştirilerek, başlangıç değeri olan $\tilde{P}_{t_0}$, P_{t_0} aracılığıyla hesaplanabilir.

$$\tilde{P}_{t_0}=\frac{1+\delta_{t_0}^P}{1+\hat{\delta}_{t_0}^P}\frac{1+c_{m_{t_0}-1,m_{t_0}}}{1+\hat{c}_{m_{t_0}-1,m_{t_0}}}\frac{w_{t_0}}{\hat{w}_{t_0}}P_{t_0} \tag{35}$$

P_{t_0}, son yılda alınmış ve ilk projeksiyon yılından önce geçerliliğini koruyan yazılan prim miktarını ifade eder. Bu prim miktarının yeterli olduğu varsayılmıştır.

Öz sermaye miktarındaki değişim $\Delta C_t = C_t - C_{t-1}$, sermaye ihracı veya azaltılması gibi durumlar sonucunda artık miktarında değişiklik yaratır.

t projeksiyon yılı için toplam hasar ödemeleri, Bölüm 2.7'de tanımlandığı üzere aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$Z_t = \sum_{t_2=0}^{\tau} Z_{t-t_2,t_2} \tag{36}$$

Genel masraflar E_t için basit bir regresyon yaklaşımı uygulanmıştır. Modelde bağımsız değişken olarak ise toplam poliçe sayısı kullanılmıştır. Eş. (37) bu yaklaşım görülmektedir.

$$E_t = a^E + b^E w_t \tag{37}$$

Rezerv miktarı için, Bölüm 2.7'den yararlanılarak aşağıdaki model kullanılmıştır.

$$R_t = \sum_{t_2=0}^{\tau} \left(\hat{Z}_{t-t_2,t_2}^{ult,disc} - \sum_{s=0}^{t_2} Z_{t-t_2,s} \right) \tag{38}$$

Ödenen vergi miktarları için ise deterministik bir yaklaşım kullanılmıştır.

4. Sayısal örnek

Çalışmanın bu bölümünde, daha önce teorik olarak anlatılan modellerin ve birleştirilmiş modelin uygulaması yapılacaktır. Değişkenler arasındaki doğrusal ilişkilerin anlamlılığının incelenmesinde ve model parametrelerinin tahmininde SPSS; genel modelin Monte Carlo benzetim uygulamasında ise Matlab programından yararlanılmıştır.

Çalışmada kullanılan faiz oranlarına ait veriler TCMB'nin internet sayfasından[1], enflasyon değerlerine ait veriler TÜİK'in internet sayfasından[2] ve hisse senedi getirilerine ait veriler İMKB'nin internet sayfasından[3] elde edilmiştir.

Bu çalışmada bir sigorta şirketinin kasko branşına ait veriler kullanılmıştır. Ancak veri elde edilemeyen çok sayıda değişken için birçok model parametresi gerçek veriye dayalı olarak değil, başka çalışmalarda kullanılan parametrelerden ya da tecrübe ile belirlenmiştir. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar gerçek bir uygulama sonucu olarak değil, sayısal bir örnekten elde edilen sonuçlar olarak değerlendirilmelidir. Kurulan model yardımıyla 10 yıl için tahmin yapılmış ve 3000 kez benzetim işlemi uygulanarak on farklı senaryo için sayısal sonuçlar elde edilmiştir [16].

4.1. Faiz oranları modelinin parametreleri

Faiz oranı değişkeni, bu çalışmadaki DFA modelinde diğer tüm değişkenleri etkileyen temel stokastik değişkendir. Modeldeki diğer değişkenler, doğrudan veya dolaylı olarak faiz oranı değişkeniyle ilişkilidir. Bu ilişki bazı değişkenlerde, diğerlerine göre daha güçlü biçimde ortaya çıkar (örn:enflasyon). Dolayısıyla

[1] www.tcmb.gov.tr
[2] www.tuik.gov.tr
[3] www.imkb.gov.tr

geleceğe yönelik faiz oranı değerlerini gerçeğe yakın olarak tahmin etmek, modelin gerçekçi sonuçlar vermesi açısından son derece önemlidir. Bu çalışmada faiz oranlarının modellenmesi için, 2000-2008 yılları arasında ihale yöntemiyle satılan hazine bonoları ve devlet tahvillerinin getirilerinden yararlanılmıştır. Kullanılan faiz oranları 3 ay vadelidir. Belirtilen zaman aralığındaki bazı dönemlere ait gözlem değerleri bulunmamaktadır. Bu değerler yerine aynı döneme karşılık gelen mevduat faiz oranı değerleri kullanılmıştır. Bu veriler TCMB'nin internet sayfasından elde edilmiştir. Bu veriler kullanılarak, Eş. (1) ile verilen CIR modeline ait parametreler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$r_t = r_{t-1} + 0.25(0.1825 - r_{t-1}) + 0.05\sqrt{r_{t-1}}B_t$$

Başlangıç değeri olarak, faiz oranları serisinin son değeri kullanılmıştır ve bu değer 0.1797'dir. Eşitlikteki B_t değeri için standart normal dağılımdan rasgele sayı türetilmiştir.

4.2. Enflasyon oranları modelinin parametreleri

Enflasyon oranları, modelde önemli bir yere sahiptir. Modeldeki hasar sıklığı ve şiddetinin gelecekte nasıl şekilleneceği, enflasyon değişkeni yardımıyla belirlenecektir. Dolayısıyla enflasyon oranlarındaki değişimler, şirketin yükümlülüklerini doğrudan etkileyecektir. Bu çalışmada, Eş. (7)'ye göre enflasyon oranları ile faiz oranları arasındaki doğrusal ilişkiden yararlanılarak bir regresyon modeli kurulmuştur.

Enflasyon değişkenine ait doğrusal modelin kurulabilmesi için enflasyon göstergesi olarak, 2000-2008 yılları arasındaki tüketici fiyat endeksi (TÜFE) değerleri kullanılmıştır. Elde edilen yıllık enflasyon değerleri ile faiz oranları arasındaki ilişki incelenmiştir. Sonuç olarak, bu iki değişken arasında anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Yapılan analiz sonucunda elde edilen parametreler Eş. (7)'de yerine konularak aşağıdaki model elde edilmiştir.

$$i_t = -0.105 + 1.114 r_t + 0.05381 \varepsilon_t^I$$

Denklemdeki hata terimi için standart normal dağılımdan rasgele sayı türetilmiştir.

4.3. Hisse Senedi Getiri Model Parametreleri

CAPM modelinin uygulanabilmesi için, İMKB Ulusal-100 endeksine giren hisse senetlerinin 2000-2008 yılları için ortalama getiri değerleri kullanılacaktır. Bir dönemlik anlık faiz oranı koşulu altında her bir hisse senedine ilişkin yıllık getiri değerleriyle İMKB Ulusal-100 yıllık ortalama getirileri arasındaki doğrusal ilişki incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda İMKB hisse senetleriyle piyasa portföyü arasındaki doğrusal ilişki anlamsız çıkmıştır. Bu sonucu Ural'ın [15], ve Temizkaya'nın [14], çalışmaları da desteklemektedir. Bu nedenle bu çalışmada, diğer çalışmalardan da yararlanılarak makul sonuçlar veren katsayı değerleri kullanılmıştır. Elde edilen katsayı değerleri Eş. (8)'de yerine konularak aşağıdaki model bulunmuştur.

$$E(r_t^M \mid R(t,1)) = 0.08 + 0.5(e^{R(t,1)} - 1) \tag{39}$$

Daha sonra, analizi yapılan sigorta şirketinin beş adet hisse senedine yatırım yaptığı varsayılmış ve bu beş hisse senedi, İMKB Ulusal-100 endeksine giren hisse senetleri arasından rasgele seçilmiştir. Bu hisse senetleri; Akbank, Eczacıbaşı İlaç, İzmir Demir Çelik, Kartonsan ve Vestel olarak belirlenmiştir. Seçilen bu hisse senetlerinin her biri için beta katsayısı hesaplanmıştır. Bu beta katsayılarından ve Eş. (39)'da elde edilen sonuçlardan yararlanılarak her bir hisse senedi için getiri oranı tahminleri, Eş. (9) aracılığıyla yapılmıştır. Beta katsayıları Akbank için 1.05082, Eczacıbaşı İlaç için 0.82198, İzmir Demir Çelik için 0.40299, Kartonsan için 0.74816 ve Vestel için 0.70921 olarak hesaplanmıştır.

4.4. Hasar sıklığı ve şiddetine ilişkin modellerin parametreleri

Hasar sıklığı ve şiddetine ilişkin değişkenlerin modellenebilmesi için bir sigorta şirketine ait kasko sigortası verilerinden yararlanılmıştır. Bu sigorta kolunun 2003-2008 yılları arasındaki hasar sıklığı ve şiddetine ilişkin verilerle aynı döneme karşılık gelen enflasyon değerleri kullanılarak, Eş.(11, 12)'de ifade edilen biçimde regresyon analizi yapılmıştır. Hasar sıklığındaki değişim için elde edilen model aşağıda verilmiştir.

$$\delta_t^F = maks(-0.203 + 2.045 i_t + 0.02428 \varepsilon_t^F, -1)$$

Hasar şiddeti ile enflasyon değerleri arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır. Bu nedenle hasar şiddeti değişkeni için Kaufmann, Gadmer ve Klett'in [9] çalışmasından da yararlanarak makul görülen katsayı değerleri baz alınacaktır. Hasar şiddetindeki değişime ilişkin katsayı değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\delta_t^X = maks(0.055 + 0.5 i_t + 0.2 \varepsilon_t^X, -1)$$

Bu iki eşitlik yardımıyla elde edilen değerler, Eş. (13)'de yerine konularak δ_t^P değişkenine ilişkin tahmin değerleri de elde edilmiştir. Aynı zamanda elde edilen hasar sıklığı ve şiddeti değişkenleri birikimli olarak çarpılarak, Eş. (14, 15)'e göre birikimli değerler hesaplanmıştır. Her iki eşitlikteki hata terimleri için standart normal dağılımdan rasgele sayı üretilmiştir.

4.5. Katastrofik olmayan hasar modellerinin parametreleri

Bu çalışmada hasar şiddeti verileri, katastrofik ve katastrofik olmayan olarak ikiye ayrılmadan modellenmiştir. Yalnızca katastrofik olmayan hasarlara ilişkin uygulama yapılmıştır. Katastrofik olmayan hasarlara ait hasar sayısı değişkeni için Poisson dağılımından, hasar şiddeti değişkeni için ise gamma dağılımından yararlanılmıştır. Hasar sayısına ilişkin modelleme yapabilmek için; Eş. (16, 17)'de verilen Poisson dağılımının ortalama ve varyans parametreleri, Eş. (18, 19)'da belirtilen şekilde hesaplanmıştır. Geleceğe ilişkin tahmin yapılan her bir dönem için bir λ_t parametresi elde edilmiş, bu parametreye sahip olan Poisson dağılımından da rasgele sayı üretilerek hasar sayısı için tahmin yapılmıştır.

Hasar şiddeti değişkeni için de benzer bir uygulama yapılmıştır. Gamma dağılımı için ortalama ve varyans değerleri, Eş. (18, 19) kullanılarak hesaplanmıştır. Her tahmin dönemi için bu işlem yapılmış ve her dönem için birer α_t ve θ_t parametresi elde edilmiştir. Elde edilen bu parametrelere sahip gamma dağılımından, her tahmin dönemi için rasgele sayı üretilmiştir. Bu şekilde de hasar şiddetine ilişkin tahmin yapılmıştır.

4.6. Sigorta piyasası döngüleri model parametreleri

Sigorta piyasası döngüleri, piyasadaki rekabet koşullarında görülen değişimler nedeniyle sigortalılardan toplanan primleri doğrudan etkiler. Bu nedenle bu çalışmada kurulan DFA modeline sigorta piyasası döngüleri modeli dahil edilmiştir. Bu çalışmada; piyasada zayıf, orta ve güçlü olmak üzere üç rekabet durumu olduğu varsayılmış ve bu durumlar arasındaki geçiş olasılıkları modele dahil edilmiştir. Piyasadaki durumlar arasındaki geçiş olasılıklarını doğru olarak belirleyebilmek oldukça zordur. Piyasadaki geçmiş yıllara ait rekabet durumlarının hangi sınıfa ait olduğunu belirleyebilmek önemli tecrübe gerektirmektedir. Ayrıca durumlar arasındaki geçiş olasılıklarının doğru olarak belirlenebilmesi için geçmişe ait piyasa hareketlerinin uzun süre gözlemlenmiş olması gerekmektedir. Bu nedenle bu çalışmada; Eling, Parnitzke ve Schmeiser'in [5] çalışmasında kullanılan geçiş olasılık matrisi kullanılmıştır. *A* geçiş olasılık matrisi aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Piyasadaki rekabet koşulları arasındaki değişim, sigorta şirketinin kazanacağı primleri doğrudan etkilemektedir. Bu koşullar arasındaki değişimler, prim miktarlarındaki değişime sabit bir katsayı olarak yansır. Bu katsayılar, Bölüm 3'te c katsayıları olarak açıklanmıştır. A matrisindeki olasılıklar yardımıyla c katsayıları hesaplanmıştır. 1 zayıf, 2 orta ve 3 güçlü rekabet durumunu göstermek üzere Bölüm 3'te belirtilen koşulları sağlayan c katsayıları, A matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{array}{lll} c_{11} = 0 & c_{12} = -0.05 & c_{13} = -0.126 \\ c_{21} = 0.0526 & c_{22} = 0 & c_{23} = -0.08 \\ c_{31} = 0.1442 & c_{32} = 0.087 & c_{33} = 0 \end{array}$$

Piyasadaki rekabet durumları, modelde rasgele değişmektedir. Başlangıç aşamasında son üç yıl için (2006, 2007 ve 2008) piyasada orta düzeyde rekabet olduğu varsayılmış, rasgele gerçekleşen değişimlere göre prim miktarlarına etki eden ve yukarıda hesaplanmış olan c katsayıları modele dahil edilmiştir.

4.7. Hasar ödeme modeli parametreleri

Bölüm 2.7'de hasar ödemelerindeki gecikmelere ait modeller açıklanmış, şirketin geçmişte yaptığı ve gelecekte yapacağı hasar ödemelerine ait nihai hasar miktarlarının hesaplanmasına değinilmiştir. Uygulamada, bir sigorta şirketine ait hasar verileri kullanılmıştır. t_2 açılım yıllarının 0'dan 5'e kadar olduğu varsayılmıştır. Eş. (21)'deki geçmiş kazalar için açılım yıllarında yapılacak ödemelere ilişkin açılım faktörlerinin, 1. yıldan başlamak üzere sırasıyla ortalamaları -0.1093, -1.1216, -1.4597, -2.123, -3.115 ve standart sapmaları 0.0341, 0.0569, 0.0082, 0.0425, 0.02 olarak hesaplanmıştır (0 açılım yılı için açılım faktörü hesaplanmamaktadır.). Her bir projeksiyon dönemi için bu ortalama ve standart sapmaya sahip lognormal dağılımdan rasgele sayı üretilmiştir. Eş. (26, 27)'de, gelecek kazalar için açılım yıllarında yapılacak ödemelere ilişkin aşamalı ödeme oranlarının beta dağılımına ait ortalama ve varyans formülleri verilmiştir. Bu eşitliklerdeki α ve β değerleri, açılım yılları itibariyle Çizelge 1'deki gibi hesaplanmıştır.

Çizelge 1. Açılım yılları itibariyle alfa ve beta değerleri

Açılım yılı	1	2	3	4	5
Alfa değeri	12.6935	15.8641	13.7508	21.9432	37.8889
Beta değeri	36.0278	31.7322	25.2270	19.3462	14.8859

Bu parametrelere sahip beta dağılımından rasgele sayı üretilerek Eş. (25)'de verilen, yıllar itibariyle nihai hasar miktarlarının her bir açılım yılı için ne kadarının ödendiğini gösteren, aşamalı ödeme oranları bulunmuştur.

4.8. Birleştirilmiş modelin benzetim uygulamaları

Üçüncü bölümde anlatılan birleştirilmiş modelde, şirketin artık miktarındaki değişimleri etkileyen değişkenler incelenmiş ve bu değişkenlerin hesaplanmasına ilişkin modellere değinilmiştir. Şirketin rezerv miktarının artık miktarına oranı bir hedef oran olarak kullanılmıştır. Bu orana göre şirketin öz sermayesindeki değişim miktarlarının artık miktarına katkısı pozitif veya negatif olmuştur. Bu oran, şirketin geçmiş muhasebe verileri incelenerek, 2.5 olarak belirlenmiştir. Artık miktarı negatif olduğu zaman şirket varlıklarından artık miktarına belirli bir miktarda fon aktarıldığı varsayılmıştır. Eş. (31)'de verilen artık miktarındaki değişimlerin hesaplanabilmesi için, bu eşitlikteki değişkenlere ilişkin başlangıç değerleri gerekmektedir. Bu değerler; artık miktarı için 45.000.000 TL, başlangıç primi için 72.000.000

TL, yatırım gelirleri için 175.000.000 TL, öz sermaye için 45.000.000 TL, rezerv miktarı için 110.000.000 TL olarak belirlenmiştir. Buraya kadar anlatılan uygulamalardaki tüm işlemler yapılarak, ele alınan sigorta şirketinin iflas olasılıkları ve beklenen artık miktarları Çizelge 2'deki gibi hesaplanmıştır. Burada sigorta şirketinin yatırım tercihlerindeki farklılıklara göre iflas olasılıkları ve beklenen artık miktarları, hisse senedi piyasasının iki farklı risk durumu için ($\sigma = 0.15$ ve $\sigma = 0.25$) elde edilmiştir. Yatırım tercihlerinde devlet iç borçlanma senetleri (DİBS) ve hisse senetlerinin farklı oranları kullanılmıştır.

Çizelge 2. Piyasa riski ve yatırım tercihlerine göre beklenen iflas olasılıkları ve artık miktarları

		%100 DİBS %0 Hisse senedi	%75 DİBS %25 Hisse senedi	%50 DİBS %50 Hisse senedi	%25 DİBS %75 Hisse senedi	%0 DİBS %100 Hisse senedi
İMKB piyasa riski σ=0.15	İflas olasılığı	0.032	0.035	0.037	0.05	0.073
	Artık miktarı	262.233.743	276.759.414	254.746.303	277.927.987	300.076.178
İMKB piyasa riski σ=0.25	İflas olasılığı	0.0339	0.041	0.062	0.096	0.154
	Artık miktarı	201.057.323	273.220.409	331.259.250	385.001.372	397.414.157

Yapılan benzetim çalışması sonrasında on adet senaryo için elde edilen sonuçlar Çizelge 2'de verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, hisse senetlerine yapılan yatırım miktarı arttıkça beklenen artık miktarı ve iflas olasılığının arttığı söylenebilir. Benzer biçimde, piyasa riskinin artması da beklenen artık miktarını genel olarak artırmaktadır. Bununla birlikte şirketin iflas olasılığı da artmaktadır. Bu çalışma kapsamında belirlenmiş olan modeller ve varsayılan parametreler doğrultusunda, riskli yatırım araçlarının beklenen artık miktarını artırdığı görülmektedir.

5. Sonuç

Son yıllarda sigorta şirketleri, finansal piyasalarda gerçekleşen ve çok değişkenlik gösteren ekonomik hareketler nedeniyle, geleceğe yönelik yükümlülüklerini tahmin etme konusunda zorluk çekmektedirler. Günümüzde piyasaların eskiye göre daha riskli olması ve faiz oranı, enflasyon oranı gibi ekonomik göstergelerin daha fazla değişkenlik göstermeye başlamasıyla birlikte risk analizlerinde kullanılan deterministik yöntemler etkinliğini kaybetmektedir. Bunun yerine rasgeleliğin ön plana çıktığı, binlerce farklı senaryo sonucunun bilgisayar yardımıyla incelenebildiği, ekonomik değişkenler arası karşılıklı etkileşimlerin ortaya konduğu stokastik yöntemler tercih edilmektedir. DFA; hayat dışı sigorta ve reasürans şirketlerinin yükümlülük analizi, sermaye gereksinimi hesabı, yatırım stratejisi belirleme, ürün fiyatlandırma gibi uygulamalarında kullandığı, stokastik benzetim tekniklerine dayalı bir yöntemdir. Bu çalışmada bir DFA modeli kurulmuş ve bu modelin bir sayısal örnek uygulaması yapılmıştır.

DFA'nın amacı geleceği tahmin etmek değildir. Bu yöntemin esas işlevi, şirketin risk analizini yapmak ve şirketle ilgili alınacak finansal kararlar konusunda yol göstermektir. Bu çalışmada tercih edilen alt modeller ve varsayılan parametre değerleri ile yapılan sayısal örnek sonucunda, daha riskli yatırım araçları tercih edildikçe şirketin iflas olasılığının artacağı görülmektedir. Sigorta şirketleri de kendilerine uygun bir DFA modelinde kendi parametrelerini kullanarak, farklı risk oranlarına sahip piyasalara göre yatırım stratejilerini belirleyebilirler ya da farklı konularda değişik senaryolar için elde edilecek sonuçları karşılaştırarak karar verme süreçlerinde DFA yaklaşımından yararlanabilirler.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda birden çok sigorta dalını içeren bir şirket için uygulama yapılması, çok faktörlü faiz oranı modelleri kullanılması, hasarların katastrofik ve katastrofik olmayan hasar türleri olarak iki ayrı model ile uygulamada yer alması, sigorta şirketlerinin farklı yatırım araçlarına yönelebileceği düşünülerek bu yatırım araçları için yeni modeller kullanılması mümkündür. Ayrıca senaryo sayısının çok olması durumunda, farklı senaryolardan elde edilen sonuçların yorumlanmasında etkin sınırlar yöntemi kullanılabilir.

Kaynaklar

[1] Ahlgrim, K.C., D'Arcy, S.P., Gorvett, R.W., 1999, Parametrizing Interest Rate Models, *Casualty Actuarial Society Forum*, 1-50.

[2] Blum, P., Dacarogna, M., Embrechts, P., Neghaiwi, T., Niggli, H., 2001, Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions, *Casualty Actuarial Society Forum*.

[3] Casualty Actuarial Society, 1999, *DFA Research Handbook*, Dynamic Financial Analysis Committee, Arlington, VA:CAS.

[4] D'Arcy, S.P., Gorvett, R.W., 2004, The Use of Dynamic Financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer, *Journal of Risk and Insurance*, 71, 583-615.

[5] Eling, M., Parnitzke, T., Schmeiser, H., 2008, Management Strategies and Dynamic Financial Analysis, *Variance*, 2(1), 52-70.

[6] Emma, C.C., 1999, *Overview of Dynamic Financial Analysis*, The Dynamic Financial Analysis Committee of the Casualty Actuarial Society, 14s.

[7] Fama, E.F., French, K.R., 2003, *The CAPM: Theory and Evidence*, Center for Research in Security Prices Working Paper, 550, 27s.

[8] Jones, B.L., Ren, J., 2006, *Underwriting Cycle and Ruin Probability*, University of Western Ontario.

[9] Kaufmann, R., Gadmer, A., Klett, R., 2001, Introduction to Dynamic Financial Analysis, *ASTIN Bulletin*, 31(1), 213-249.

[10] Lowe, S.P., Stanard, J.N., 1997, An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer, *Astin Bulletin*, 27, 339-371.

[11] Majumdar, C., 2007, *Dynamic Financial Analysis as the untrodden path for company risk measurement under Solvency-II*, 37th ASTIN- Florida,USA.

[12] Mishkin, F.S., 1992, Is The Fisher Effect For Real?, *Journal of Monetary Economics*, 30, 195-215.

[13] Schmeiser, H., 2004, New Risk Based Capital Standarts in the EU: A Proposal Based on Empirical Data, *Risk Management and Insurance Review*, 7, 41-52.

[14] Temizkaya, Ü.B., 2006, *Finansal Varlıkları Fiyatlama Modeli ve İMKB Uygulaması*, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 141s.

[15] Ural, Ö., 2006, *A Half Century Debate: CAPM and Its Empirical Testing For ISE*, İzmir Ekonomi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir, 127s.

[16] Yılmaz, H., 2009, *Sigortacılıkta Dinamik Finansal Analiz*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 60s.