



Kalın kuyruklu risk modellerinde iflas olasılığı

Başak Bulut

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Çankaya, Ankara, Türkiye
basakbulut@hacettepe.edu.tr

Cenap Erdemir

Ufuk Üniversitesi
İstatistik Bölümü
06520-Çankaya, Ankara, Türkiye
cerdemir@ufuk.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, hasar tutarlarının kalın kuyruklu dağılım yapısına uyup uymadığı, bu dağılım yapısının koşulları incelenerek araştırılmıştır. Kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip risklerin, risk süreci ve iflas olasılıkları üzerindeki etkisi teorik ispatlar eşliğinde açıklanmaya çalışılmıştır. Matlab yazılımında geliştirilen program sayesinde, Türkiye Trafik Sigortası veri kümesi kullanılarak, hasar büyüklüklerinin kalın kuyruklu dağılıma uyup uymadığı sorgulanmış, uyması halinde ise hangi alt sınıfa dahil olduğu araştırılmıştır. Ayrıca belirlenen dönem için risk süreci incelemesi yapılarak, çeşitli sermaye miktarı ve güvenlik yüklemeye faktörlerine bağlı olarak iflas olasılıkları hesaplanmıştır.

Anahtar sözcükler: Kalın kuyruklu dağılımlar; Risk süreci; İflas olasılığı; Alt-üstel dağılımlar.

Abstract

Ruin probability in heavy tailed risk models

In this study, detailed information about heavy tailed distributions and the its sub-classes are reviewed and the conditions necessary for any distribution to belonging to one of these special classes of distributions are explained. It is showed that how the ruin probabilities of a risk process that includes heavy tailed claim severity amounts, can be calculated with theoretical justifications. An application is provided by using compulsory traffic insurance data in Turkey in Matlab programming language. It is investigated if the loss severities can be categorized under the heavy-tailed distribution and also the relevant sub-categorized of the distribution is determined, too. Moreover, ruin probabilities are calculated in terms of different initial surplus and safety factors by analyzing the risk process for this particular time.

Keywords: Heavy-tailed distributions, Risk process, Ruin probability, Sub-exponential distributions.

1. Giriş

Sigorta şirketinin yükümlülüklerini karşılayabilmesi ve devamlılığını sağlayabilmesi açısından incelenmesi gereken en önemli konulardan birisi, hasar tutarı dağılımlarının modellenmesidir. Özellikle gerçekleşme olasılığı düşük olmasına rağmen yüksek etki içeren doğal katastrofik olayların sonuçlarının incelenmesi ve bu etkileri içeren modellerin geliştirilmesi sigorta uygulamalarında önemli bir yer tutmaktadır. Bu tür hasarlar sigorta şirketinin, sigortalılarına karşı sorumluluklarını yerine getirebilmelerini doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle, gerçekçi ve dengeli bir fiyatlandırmanın yapılabilmesi, reasürans anlaşmalarında en doğru saklama payı limitlerinin ve oranlarının belirlenebilmesi için hasar tutarı dağılımlarının sağ kuyruk bölgesinin doğru şekilde modellenmesi gerekmektedir. Olasılığı düşük, ancak kayıp değeri yüksek olan risklerin modellenmesinde kalın kuyruklu

dağılımların kullanılması çok daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır. Bu dağılımların modellenmesi ve uygunluklarının sınanması aktüerler için ilginç bir araştırma alanı oluşturmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde kalın kuyruklu dağılımlar ve tüm sınıfları bağlı oldukları koşullar çerçevesinde incelenirken, üçüncü bölümde kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip risklerin, risk süreci ve iflas olasılıkları üzerindeki etkisi teorik ispatlar eşliğinde açıklanmaya çalışılmıştır. Dördüncü bölümde ise Türkiye trafik sigortası verisi kullanılarak, hasar büyüklüklerinin kalın kuyruklu dağılıma uygunluğu incelenmiş, uyması durumunda hangi alt sınıfa dahil olduğu araştırılmıştır. Belirlenen dönem için risk süreci incelemesi yapılarak, çeşitli sermaye miktarı ve güvenlik yükleme faktörü kısıtları altında şirketin karşılaşılabileceği iflas olasılıkları hesaplanmıştır.

2. Kalın kuyruklu dağılımlar

2.1. Kalın kuyruklu dağılımlar tanım ve temel özellikleri

Olasılık teorisinde kalın kuyruklu dağılımlar; kuyruk yapıları sınırlandırılmamış ve üstel dağılıma göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olasılık dağılımları olarak açıklanmaktadır. Kalın kuyruk özelliklerini taşıyan dağılımların araştırılmasında; tehlike hızı fonksiyonunun sonlu olmasını ($m(s) = \infty$) sağlayacak şekilde negatif olmayan rastlantı değişkenlerinin dağılım sınıflarından faydalanılmaktadır [5]. İnce ve kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar arasındaki temel fark; ince kuyruk yapısına sahip dağılımların pozitif değerli moment çıkaran fonksiyonu $\left(\hat{B}[s] = \int e^{sx} B(dx)\right)$ sonlu bir değer alırken, kalın kuyruklu dağılımların moment çıkaran fonksiyonun sonsuz değer almasıdır[1].

X_i 'nin, $i \in N$ ve $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ olacak şekilde aynı F dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız pozitif rastlantı değişkenleri olduğu varsayalım. Bu durumda ortak bir X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$, kuyruk dağılımı ise (ya da yaşam fonksiyonu) $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ şeklinde gösterilmektedir.

Negatif olmayan bir rastlantı değişkeninin kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olabilmesi için gerekli koşullar şu şekilde verilmektedir.

Koşul 1: F dağılım fonksiyonu, pozitif ε değerleri için $E[e^{\varepsilon x}] = \infty$ olmalıdır.

Koşul 2: Pozitif x değerleri için $\bar{F}(x) > 0$ olmalıdır.

Koşul 3: $\mu(x)$ tehlike fonksiyonu, $-\log \bar{F}(x)$ 'ten elde edilmektedir. Buna göre $\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu(x)}{x}$ olmak üzere $\alpha_F = 0$ olmalıdır.

Koşul 4 $s > 0$ olmak üzere; $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}(x) = \infty$ olmalıdır [10].

Kalın kuyruklu dağılımların sahip oldukları ortak özelliklere bağlı olarak çeşitli alt sınıflar oluşturulmuştur. Bunlar, alt-üstel dağılımlar (sub-exponential), uzun kuyruklu dağılımlar (long tailed), baskın değişen kuyruklu dağılımlar (dominated-varying tailed) ve düzenli değişen kuyruklu dağılımlardır (regularly-varying tailed).

2.1.1. Alt-üstel dağılımlar

Bu dağılım sınıfına *alt-üstel* denilmesinin nedeni; bu sınıf içerisindeki dağılımların herhangi bir üstel dağılımdan daha yavaş azalan bir kuyruk yapısına sahip olmasıdır [6].

Alt-üstel dağılımlar ilk kez 1964 yılında Chistyakov tarafından, dallanma süreci (branching process) üzerine yapılan uygulamalarda kullanılmıştır. Alt-üstel dağılımlara uyan hasar büyüklükleri bir portföyde karşılaşılabilecek toplam riskleri artırmakta ve şirketin risk sürecinde dalgalanmalara neden olmaktadır. S ile gösterilen alt-üstel dağılımlara örnek olarak; log-normal dağılım, Pareto dağılımı ve biçim parametresi bir değerinden küçük olan Weibull dağılımı verilebilmektedir [10].

Herhangi bir F dağılım fonksiyonunun alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alabilmesi için gerekli üç koşul bulunmaktadır. Bu koşullar şu şekilde verilmektedir:

Koşul 1: $x \geq 0$ değerleri için $\bar{F}(x) > 0$ olmalıdır.

Koşul 2: \bar{F}^{n*} ; F dağılım fonksiyonunun n katlı konvülyasyonunun kuyruk dağılımını göstermek üzere $\bar{F}^{n*} = 1 - F^{n*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)$ biçiminde elde edilmektedir. Herhangi bir dağılımda $n \geq 2$ değeri için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n$ eşitliği sağlanmalıdır.

Koşul 3: X_1, X_2, \dots bağımsız ve alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan aynı F dağılımına sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere, tüm $n = 2, 3, \dots$ değerleri için; $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olmak üzere; $\Pr(S_n > x) = \bar{F}^{*n}(x) \sim n\bar{F}(x)$ eşitliğini sağlamaktadır.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} \sim \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{n\bar{F}(x)} \rightarrow 1$ eşitliği sağlanıyor ise F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfına girmektedir.

Koşul 2'nin ispatı Chistyakov [3] tarafından; Koşul 3'ün ispatı ise Embrechts ve Goldie [4] tarafından yapılmıştır.

Bir dağılımın alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer aldığıın ispatlanması çok kolay olmamaktadır. Bu nedenle risk teorisindeki uygulamalar için dağılımın kendisinden çok, bu dağılımın bütünleşik kuyruk dağılımının alt üstel olması gerekmektedir.

Sonlu beklenen değere sahip, negatif olmayan rastlantı değişkenininin dağılım fonksiyonu F ile gösterilmek üzere, bütünleşik kuyruk dağılımı F_I

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \leq 0 \\ \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy & \text{eğer } x > 0 \end{cases} \quad \text{olarak elde edilmektedir.}$$

2.1.2. Uzun kuyruklu dağılımlar (Long-tailed)

$x \rightarrow \infty$ iken $e^{ex} \bar{F}(x) \rightarrow \infty$ özelliğinin sağlanması kalın kuyruklu dağılımların daha geniş alt sınıflarından uzun kuyruklu dağılım (\mathcal{L}) sınıfı için de geçerli olmaktadır. F , $(0, \infty)$ aralığında tanımlı

ve $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ olan bir dağılım fonksiyonu olmak üzere; $y \geq 0$ değerleri için bu F dağılımı,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x + y | X > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x + y)}{\bar{F}(x)} = 1$$
 eşitliğinin sağlanması durumunda uzun kuyruklu dağılım

sınıfında yer alacaktır. Bu eşitliğin pay ve paydasındaki dağılımlar $a(x) \sim b(x)$ fonksiyonları şeklinde gösterildiğinde, $x \rightarrow \infty$ iken $a(x)/b(x) \rightarrow 1$ olacaktır. Bu durum tüm $y \geq 0$ değerleri için $\bar{F}(x + y) \sim \bar{F}(x)$ şeklinde kullanılmaktadır.

2.1.3. Baskın değişen kuyruklu dağılımlar

F dağılımı, $0 < t < 1$ aralığındaki t değeri için; $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} < \infty$ özelliğine sahip ise bu dağılım

baskın değişen kuyruklu dağılım olarak tanımlanmaktadır. Baskın değişen kuyruklu dağılım sınıfı \mathcal{D} ile gösterilmektedir.

2.1.4. Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar

Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar $\mathcal{R}_{-\alpha}$ ile gösterilmektedir. Bir dağılımın bu alt sınıfta yer alması için gerekli koşullar şu şekilde verilmektedir.

Koşul 1: F dağılımı $\alpha \geq 0$ ve $t > 0$ değerleri için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha}$ eşitliğini sağlamalıdır.

Koşul 2: Pozitif ölçülebilir fonksiyon f ile gösterilmek üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ olması durumunda, $f \in \mathcal{R}_{(\alpha)}$ olması için; $\forall t > 0$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha$ eşitliğinin sağlanması gerekmektedir.

Koşul 3: Düzenli değişen kuyruklu dağılımlar, uzun kuyruklu dağılımlara bağlı olarak da açıklanabilmektedir. $l(x)$; yavaş değişen fonksiyon olmak üzere, $x > 0$ ve $l \in \mathcal{R}_{(0)}$ olmak üzere $\alpha \geq 0$ değerleri için $\bar{F} \in \mathcal{R}_{(-\alpha)}$ olduğu takdirde; $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} l(x)$ olacaktır. Bu eşitlikteki $\alpha = 0$ endeksli düzenli değişen kuyruklu dağılımlar için $\frac{l(tx)}{l(x)} \rightarrow t$ durumu sağlanmalıdır.

Düzenli değişen kuyruklu dağılıma örnek olarak bünyesinde $l(x) = c \ln(x)$ veya $l(x) = c \ln(\ln(x))$ şeklindeki dönüşüm fonksiyonları ya da bir sabite yakınsayan $l(x)$ fonksiyonunun yer aldığı Pareto dağılımı örnek olarak verilebilir. Literatürde düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili Bingham, Goldie ve Teugels [2] 'in çalışmaları bulunmaktadır [11].

2.1.5. S^* sınıfı

Dağılımların ve bu dağılımların bütünleşik kuyruk dağılımlarının alt üstel dağılım sınıfında yer alması için gerekli koşulların belirlenmesinde karşılaşılan problemlerin biraraya getirilmesiyle Klüppelberg tarafından yeni bir alt sınıf oluşturulmuştur [8]. Bu alt sınıfın en önemli özelliği; bu sınıfa dahil olan bir dağılımın hem kendisinin hem de bütünleşik kuyruk dağılımının alt-üstel dağılıma uyuyor olmasıdır. Bu alt sınıf için temel koşul F 'nin tüm $x > 0$ değerleri için $F(x) < 1$ ve $x \geq 0$ değerleri için de $\bar{F}(x) > 0$ olacak

şekilde $(0, \infty)$ aralığında tanımlı bir dağılım fonksiyonu olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(y) dy = 2\mu$ eşitliğinin sağlanmasıdır [9].

F dağılımının tehlike hızı fonksiyonu $m(x)$ olmak üzere, dağılımın bu alt sınıfta yer alması için gerekli koşullar şu şekilde sıralanmıştır:

a) Eğer $\limsup_{x \rightarrow \infty} x m(x) < \infty$ ise $F \in S^*$ 'dir.

b) $\delta \in (0, 1)$ ve $\nu \geq 1$ olacak şekilde tüm $x \geq \nu$, $y \geq 1$ değerleri için $\mu(x, y) \leq y^\delta \mu(x)$ ve $\liminf_{x \rightarrow \infty} x m(x) \geq (2 - 2^\delta)^{-1}$ ise $F \in S^*$ 'dir.

c) $m(x)$ fonksiyonu, sifıra doğru azalan bir fonksiyon ise; $F \in S^*$ olacak ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yq(x)} \bar{F}(y) dy = \mu$ eşitliği sağlayacaktır.

2.2. Kalın kuyruklu dağılım sınıfları arasındaki ilişkiler

Tüm dağılım sınıflarının incelenmesinden sonra kalın kuyruklu dağılım sınıfı ve alt sınıfları için aşağıdaki gibi bir sınıflandırmanın yapılabilmesi sağlanmıştır.

\mathcal{K} : kalın kuyruklu dağılımları,

\mathcal{L} : uzun kuyruklu dağılımları,

\mathcal{S} : alt-üstel dağılımları,

\mathcal{R} : düzenli değişen dağılımları,

\mathcal{D} : baskın değişen dağılımları göstermek üzere $(0, \infty)$ aralığında tanımlı F dağılımı;

$$\mathcal{K} = \left\{ \hat{f}(-\varepsilon) = \int_0^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty \quad \varepsilon > 0 \text{ için} \right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1 \quad y > 0 \text{ için} \right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \bar{F} \in R_{-\alpha} \quad \alpha \geq 0 \text{ için} \right\},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x/2)}{\bar{F}(x)} < \infty \right\} \text{ özelliklerine sahiptir.}$$

Bu sınıflar arasındaki özellikler ise şu şekilde verilmektedir;

1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ ve $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$
2. $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$
3. $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$ [5].

2.3. Kalın kuyruklu dağılımların belirlenmesi

“Kuyruk ağırlığı” bir dağılımın kuyruk yapısı hakkında, özellikle de sağ kuyruk bölgesinin kalın olup olmadığı hakkında bilgi veren bir ölçüttür. Kuyruk ağırlığı; incelenen dağılımlar arasında karşılaştırma yapılarak, bir dağılımın diğer dağılımdan daha kalın kuyruk yapısına sahip olup olmadığını araştırıldığı *ilişkili durum* ve kalın kuyruk sınıfının temel özelliklerine sahip olan dağılımların incelemesinin yapıldığı *mutlak durum* olarak iki şekilde incelenmektedir [7].

2.3.1. Momentlerin bulunuşu

Sadece pozitif değerlere bağı rastlantı değişkenleri için ortalamaya göre k'inci moment; kesikli durum için $\sum x^k f(x)$; sürekli durum için ise $\int_0^{\infty} (x^k f(x)) d_x$ şeklinde hesaplanmaktadır. Sürekli durumda, ortalamaya göre k'inci moment her zaman varolmayabilir. Bunun nedeni, bu integralin sonucunun yoğunluk fonksiyonuna ve k değerine bağı olmasıdır. Eğer yoğunluk fonksiyonunun x noktasındaki değeri çok büyük ise; bu değerin x^k değeri ile çarpımı da daha büyük bir sonuç oluşturacak ve integral sonucunun anlamlı bir değer çıkmasını zorlaştıracaktır. Kalın kuyruklu dağılıma göre daha az büyük hasara sahip dağılımlar için integral sonucu elde edilebileceğinden tüm pozitif momentlerin varoluşu bir ince sağı kuyruğı işaret edecektir. Pozitif momentlerin mutlak bir değeri göstermemesi ya da bulunamaması durumunda ise, incelenen dağılımın kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olacağı düşünülecektir.

2.3.2. Limit oranları

Bir dağılımın, herhangi başka bir dağılıma göre daha kalın kuyruk yapısına sahip olup olmadığının araştırılmasında bu dağılımların yaşam fonksiyonlarının (survival function) oranına bakılarak da yorumlarda bulunulabilir. İncelenen iki dağılımın olasılık fonksiyonlarının limit oranlarına bakılmasında; daha kalın kuyruk yapısına sahip olan dağılımın limitinin daha hızlı ∞ 'a yakınsadığı görülecektir.

2.3.3. Tehlike hızı ve arda kalan yaşam süresi

Tehlike hızı fonksiyonu da dağılımın kuyruk yapısı hakkında bilgi vermektedir. Tehlike hızı fonksiyonu azalan bir fonksiyon ise, bu durum dağılımın kalın kuyruk yapısına sahip olduğuna işaret edecektir. Diğer taraftan, tehlike hızı fonksiyonu artan bir fonksiyon ise, daha ince kuyruk yapısına sahip bir dağılım olması beklenmektedir [7].

2.3.4. Büyük hasarlar

Bir portföyde karşılaşılabilecek büyük hasarlar, hasar tutarı dağılımının kalın kuyruklu olabileceğinin göstergesi olabilmektedir. Portföydeki bir hasarın büyük hasar olarak nitelendirilebilmesi için bu tür büyüklükte bir hasarın ancak uzun zaman aralıklarıyla gerçekleşeceğinin biliniyor ya da tahmin ediliyor olması gerekmektedir. Hasar büyüklüğü dağılımının ortalamasının ve/veya varyansının kuyruk bölgesinde yoğunlaşması dağılımın kalın kuyruklu bir dağılım olduğunu düşündürecektir. S_n , toplam hasar büyüklüğü, belirli bir dönem içerisinde gerçekleşen hasarların toplamı olarak verilmekte olup $\min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ olarak dizilen hasarlar içerisinde büyük hasarların var olması, toplam hasar büyüklüğünde de doğal olarak artış yaratacaktır. Buradan da $P(S_n > x) \sim P(X_{(n)} > x)$ eşitliği sağlanabilecektir.

3. Kalın kuyruklu dağılımlarda iflas olasılığı

Bir sigorta şirketinin uzun süreli yükümlülük karşılama yeterliliğinin sağlanabilmesi için risk süreci iyi tanımlanmalı, doğru risk yüklemeleri yapılmalı, muafiyet ve saklama payı limitleri çok iyi belirlenmelidir. Risk süreci; kazanılan primler ile öncelikle sürekli artan, daha sonra ödenen tazminatların etkisiyle azalan bir stokastik süreçtir. Risk sürecinin sıfırın altına düşmesi durumunda ise iflas gerçekleşmiş olacaktır.

3.1. Klasik risk modeli ve iflas teorisi

Sigorta şirketi, herhangi bir anda meydana gelebilecek bir hasara ilişkin ödenecek tazminatın yaratacağı finansal sonuçları en aza indirmek amacıyla portföyündeki tüm bireysel riskleri bir araya toplamaktadır. Bu nedenle de, sigorta şirketi her dönem sonunda rezerv ya da artık olarak tabir edilen bir miktarı ayırmak zorundadır. Biriktirilen artık miktarları; gelecekte oluşabilecek hasar ödemelerinin toplanan primleri aştığı riskli dönemler için kullanılarak sigorta şirketine bir tür koruma sağlayacaktır. Böylece sigorta şirketi, sigortalılarına vermiş olduğu taahhütleri yerine getirebilecektir.

3.1.1 Klasik risk modeli

Bir sigorta şirketinin iki temel nakit akışı bulunmaktadır. Bunlar prim ve hasar süreçleridir. Bu nakit akışlarına bağlı olarak oluşturulan risk ya da artık süreci olarak da adlandırılan sigortacının klasik risk modeli;

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t) \quad t \geq 0 \quad \text{biçimindedir.}$$

Risk sürecinin temel bileşenleri;

$U(t)$: t anında sigorta şirketinin sermaye miktarı,

u : $u > 0$ olmak üzere başlangıç sermayesi,

$\Pi(t)$: $(0, t]$ aralığında toplanan prim miktarını gösteren prim süreci,

$S(t)$: $[0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen hasar sayısını gösteren hasar süreci olarak verilmektedir.

3.1.2. Cramer-Lundberg ve yenileme modeli

Cramer-Lundberg modelindeki süreçler;

a. *Toplam Hasar süreci;* X_i , i 'nci hasar büyüklüğünü gösteren pozitif ve aynı dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere, ortalaması $\mu = E[X_i]$ ve varyansı $\sigma^2 = Var(X_i) \leq \infty$ sonlu olan rastlantı değişkenleridir. Toplam hasar süreci $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, $N(t)$ bir rastlantı değişkeni olup $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin ögesidir.

b. *Bekleme süresi;* W_k , $(k-1)$ 'inci olay ile k 'inci olay arasında geçen süreyi göstermektedir. W_k , $W_1 = T_1$ olmak üzere $k = 2, 3, \dots$ değerleri için $W_k = T_k - T_{k-1}$ biçiminde tanımlanan aynı üstel dağılıma sahip bağımsız rastlantı değişkenleri olarak tanımlanmaktadır ve $E[W_1] = 1/\lambda$ 'dir.

c. *Hasar zamanı;* T_i , Hasarın gerçekleştiği andaki zaman noktasını yani i 'nci olayın ortaya çıkmasına kadar geçen süreyi göstermektedir. Hasarın rastgele bir zamanda gerçekleşebildiği varsayımında sıralı hasar zamanları arasında $0 < T_1 < T_2 < \dots$ ilişkisi verilmektedir.

d. X_k ve W_k birbirlerinden bağımsızdır.

Cramer-Lundberg modelinin temel özellikleri

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinde $N(t)$ rastlantı değişkeni λt parametresiyle Poisson dağılımına sahipse; süreç, $\lambda > 0$ koşulu altında, λ ortalama ile Poisson sürecidir. Tüm $t > 0$, $h > 0$ ve $s \leq t$ durumları için; $N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h)$ 'dir.

$$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t \text{ 'dir.}$$

Bu modelde Poisson sürecinin tercih edilmesi; bağımsız bileşenlere ve monoton azalan ortalama değer fonksiyonuna sahip herhangi bir sürecin, Poisson sürecine çevrilebilir olmasından kaynaklanmaktadır [9].

Toplam hasar büyüklüğü $S(t)$ 'nin dağılımı, $x \geq 0$ ve $t \geq 0$ olmak üzere;

$$G_t(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x) \text{ şeklinde hesaplanmaktadır. Bu eşitlikte kullanılan}$$

$$F^{n*}(x), F \text{ dağılımının } n \text{ katlı konvülyasyonu olup, } F^{n*}(x) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) \text{ şeklinde hesaplanmaktadır.}$$

3.1.3 İflas olasılığı

Yıllık primlerin ve hasar süreçlerinin değişmez olduğu varsayımı altında, iflas olasılığı $\psi(u)$ ile gösterilmektedir. Bu olasılık uygun bir başlangıç sermayesi ile sürece başladığı durumda, sigortacının prim ve hasar süreçlerinin doğru hesaplanıp hesaplanmadığının bir göstergesi olmaktadır. Yüksek iflas olasılığı; reasürans antlaşmalarının gündeme gelmesine, riskli görülen poliçelerde prim miktarlarında artışa gidilmesine ya da sigorta şirketinin işletme sermayesinden nakit çekmesine neden olabilmektedir.

Sınırlı zamanlı iflas olasılığında; belirlenen bir zaman aralığındaki risk sürecinin hareketi incelenerek sigorta şirketinin iflas etme olasılığı araştırılmaktadır ve $0 < T < \infty$, $u \geq 0$ olmak üzere; $\psi(u, T) = P(U(t) < 0, \text{ bazı } t \leq T)$ şeklinde gösterilmektedir.

Yenileme sayma süreci

Yenileme sayma süreci $N(t)_{t \geq 0}$ şeklinde gösterilmektedir. $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ $t \geq 0$ ve $n \geq 1$ değerleri için n 'nci hasar zamanı T_n , n 'nci döneme kadarki bekleme sürelerinin $(W_1 + \dots + W_n)$ toplamını göstermektedir. Buna göre bekleme süresinin, $(1/\lambda)$ ortalama ile üstel dağılıma sahip bir rastlantı değişkeni olması durumunda, yenileme sayma sürecinin momentleri;

$$E[N(t)] = (\lambda + o(1))t \text{ ve } \sigma_W^2 = \text{Var}(W) < \infty \text{ olmak üzere; } t \rightarrow \infty \text{ iken;}$$

$$E[N(t)] = \lambda t + O(1) \text{ ve } \text{Var}(N(t)) = \sigma_W^2 \lambda^3 t + o(t) \text{ şeklinde bulunmaktadır.}$$

Yenileme modelinin beklenen değeri ise;

$$E[U(t)] = u + ct - \mu E[N(t)]$$

$$E[U(t)] = u + (c - \lambda \mu) t (1 + o(1))$$

$$= u + \left(\frac{c}{\lambda \mu} - 1\right) \lambda \mu t (1 + o(1)) \text{ biçiminde elde edilmektedir.}$$

Buradan da; $\frac{E[U(t)]}{t} \Rightarrow c - \lambda\mu$ olarak bulunmaktadır. Yükümlülük karşılama yeterliliğinin koşulu olarak $c - \lambda\mu > 0$ olması, büyük t değerleri için artık sürecinin pozitif olmasını sağlamaktadır. Bu da yenileme modelinde temel net kar koşulunu oluşturmaktadır.

Sigorta şirketleri prim üzerine ekledikleri güvenlik yükleme faktörüyle finansal açıdan daha güvenilir bir duruma geçerler. ρ olarak gösterilen güvenlik yüklemesi risk prim oranı anlamına da gelmektedir. Bu oran, $[0, t]$ aralığındaki prim gelir oranından hesaplanmaktadır. Dolayısıyla $ct = (1 + \rho)\lambda\mu t$ olmak üzere; $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ olmalıdır.

Risk sürecinin tanımından hareketle; $u \geq 0$ değerleri için iflasın ancak T_i zamanlarında gerçekleştiği varsayımı altında X_k , hasar büyüklüklerini; Y_k , prim büyüklüklerini göstermek üzere iflas olasılığı;

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(u + ct - S(t) < 0, t \geq 0) \\ &= P(u + cT_n - S(T_n) < 0, n \geq 1) \\ &= P(u + \sum_{k=1}^n (cY_k - X_k) < 0, n \geq 1) \\ &= P(\sup_{n \geq 1} (X_k - cY_k) > u) \text{ şeklinde yazılabilmektedir.}\end{aligned}$$

Bu eşitlikler iflasın gerçekleşmeme olasılığı yönünden de yazılabilir. $u \geq 0$ olmak üzere iflasın gerçekleşmeme olasılığı

$$1 - \psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right) > 0 \text{ şeklinde gösterilebilir.}$$

İflaşın gerçekleşmeme olasılığı $1 - \psi(u)$, maksimum rasgele yürüyüş sürecinin dağılım fonksiyonu yönünden de incelenebilir. $k \geq 1$ değerleri için $Z_k = X_k - cY_k$ olmak üzere, ilişkili rasgele yürüyüş süreci; $n \geq 1$ değerleri için $R_0 = 0$ olmak üzere, $R_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ şeklinde elde edilmektedir.

Bu eşitlik için yenileme modelinin temel kar koşulundan; $E[Z_1] = \mu - \frac{c}{\lambda} < 0$ olmalıdır. Böylece iflasın gerçekleşmeme olasılığı $1 - \psi(u) = P(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u)$ şekline dönüştürülebilmektedir [5].

Bu olasılık, genel bir rastgele yürüyüşe ilişkin nihai supremumların dağılımını veren Spitzer eşitliği ile de hesaplanabilmektedir. Bu eşitlikten yararlanarak bileşik geometrik dağılıma ilişkin iflasın gerçekleşmeme olasılığı, H bir dağılım fonksiyonu ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$1 - \psi(u) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n H^{n*}(u) \text{ şeklinde elde edilmektedir.} \quad (1)$$

Bu eşitlik içerisindeki H^{n*} : H 'nin n katlı konvülyasyonunu göstermektedir. α ve H değerleri, genellikle, klasik Wiener-Hopf teorisi ile elde edilmektedir.

(1) eşitliğindeki gibi fonksiyonel ilişkilere çeşitli yöntemleri uygulanarak, çok sayıda modele ilişkin $\psi(u)$ tahmini hesaplanabilmektedir. $\psi(u)$ ' nun hesaplanmasında kullanılan Wiener-Hopf yönteminin yanı sıra yenileme teorisi de, ilgili tahminlerin elde edilmesine olanak tanımaktadır. İlgili hesaplamalar yapılırken Cramer-Lundberg modelinden faydalanılmaktadır. Büyük hasarlara ilişkin iflas olasılığı tahminlerinde bu iki teoremin birleştirilmesiyle elde edilen eşitliklerden yararlanılacaktır.

3.1.4. Cramer-Lundberg tahmini

Yenileme modelinde, iflas olasılığı tahmininin elde edilmesinde genel yöntemin kullanımının dışında Cramer-Lundberg modeli tahmini de bulunmaktadır. Bu modele göre iflas olasılığının hesaplamasında, modele hasar büyüklüğü dağılımı da dahil edilmektedir. Cramer-Lundberg modelinde güvenlik yüklemesi için;

$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ koşulu sağlanmakta olup, iflasın gerçekleşmeme olasılığı;

$$1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u) \quad \text{şeklinde hesaplanabilmektedir.} \quad (2)$$

Bu eşitlik içerisinde yer alan $F_I^{n*}(x)$, bütünleşik kuyruk dağılımının n katlı konvülyasyonunu göstermektedir. (2) eşitliği portföyde büyük hasarların bulunması durumunda iflas olasılığının elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Cramer-Lundberg teoremi

$\nu > 0$ olmak üzere, Laplace-Stieltjes dönüşümünden yararlanarak, bütünleşik kuyruk dağılımının $(-\nu)$ değeri için Laplace-Stieltjes dönüşümü;

$$\hat{f}_I(-\nu) = \int_0^{\infty} e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho \quad \text{şeklinde elde edilir.} \quad (3)$$

Bu eşitlikten yola çıkılarak aşağıdaki özellikler elde edilebilmektedir:

Özellik 1: (3) eşitliğindeki Laplace-Stieltjes dönüşümü Cramer-Lundberg koşulundan yararlanarak

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$$

biçiminde de yazılabilmektedir:

Özellik 2 : $u \geq 0$ değerleri için; $\psi(u) \leq e^{-\nu u}$ olmaktadır.

Özellik 3: İncelenen dağılımın $1/\mu$ parametresi ile üstel dağılıma uyması durumunda iflas olasılığı;

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp\left\{-\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} u\right\} \quad u \geq 0 \quad \text{şeklinde elde edilir.} \quad (4)$$

Özellik 4: Bu teoremden

$$\int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty \quad (5)$$

eşitsizliği elde edilmektedir. Bu eşitsizlikten yola çıkılarak $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{vu} \psi(u) = C < \infty$ olmak üzere C değeri

$$\text{şu şekilde hesaplanmaktadır: } C = \left[\frac{v}{\rho\mu} \int_0^{\infty} x e^{vx} \bar{F}(x) dx \right]^{-1}$$

Eşitlik (5) 'in ispatının yapılmasında $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ ve $u \geq 0$ olmak üzere ;

$$\begin{aligned} 1 - \psi(u) &= P(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u) > 0 \\ \delta(u) &= P(S(t) - ct \leq u \quad \text{tüm } t > 0 \text{ için}) \\ &= P(\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u \quad \text{tüm } n \geq 1 \text{ için}) \\ &= P(\sum_{k=2}^n (X_k - cY_k) \leq u + cY_1 - X_1 \quad \text{tüm } n \geq 2, X_1 - cY_1 \leq u) \\ &= P(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \text{tüm } t > 0, X_1 - cY_1 \leq u) \text{ eşitliği kullanılmaktadır.} \end{aligned}$$

3.2. Kalın kuyruklu dağılımlar için iflas teorisi

Kalın kuyruklu dağılımlar eşitlik (3)'te verilen Cramer-Lundberg koşulunu sağlamamakta ve bu nedenle de Cramer-Lundberg Teoremi bu tür hasar büyüklüğü dağılımlarına uygulanamamaktadır. Bu durumda (2) eşitliğinin, konvülyasyon yaklaşımı kullanılarak yeniden düzenlenmesi gerekmektedir.

3.2.1. Alt-üstel dağılımlar için Cramer-Lundberg teoremi .

Alt-üstel dağılıma Cramer-Lundberg teoreminin uygulanabilmesi için, bu dağılıma ilişkin üç özellik aşağıda verilmiştir.

- (a) F dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alıyor ise, benzer şekilde $(0, \infty)$ aralığındaki y değeri için de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1$ eşitliği elde edilir.
- (b) Tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için; $x \rightarrow \infty$ iken $e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty$ olmaktadır.
- (c) $F \in S$ olması durumunda, $n \geq 2$ değerleri için sıfırdan büyük bir ε değeri için

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n \quad x \geq 0 \quad \text{eşitliği sağlanacaktır.}$$

Alt-üstellik, $\varepsilon > 0$ değerleri için herhangi bir $e^{-\varepsilon x}$ şeklinde olan üstel dağılımdan daha yavaş sifıra yaklaşan $\bar{F}(x)$ dağılımı olarak açıklanmakta olup, tüm $\varepsilon > 0$ ve $y \geq 0$ değerleri için

$$\int_y^{\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y} \bar{F}(y) \text{ eşitsizliği elde edilmektedir. } F \in S \text{ olması durumunda tüm } \varepsilon > 0 \text{ değerleri için}$$

$\hat{f}(-\varepsilon) = \infty$ olmaktadır. Buna bağlı olarak, alt-üstel dağılımın Laplace-Stieltjes dönüşümü, sıfır durumu için özel bir tekilliğe sahiptir. Bu durum ilk kez Chistyakov (1964) tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremin

genişletilmesiyle daha geniş dağılım sınıfları içinde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$ eşitsizliğinin sağlandığı durumların olduğu görülmüştür [5].

Cramer-Lundberg modelinin net kâr koşulu ($\rho > 0$) ve bütünleşik kuyruk dağılımının alt üstel dağılım sınıfı içerisinde bulunması durumunda $u \rightarrow \infty$ iken iflas olasılığı $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_1(u)$ şeklinde hesaplanmaktadır. Bu eşitliğin elde edilmesinde $(1 + \rho)^{-1} < 1$ koşulu olduğundan $(1 + \rho)^{-1}(1 + \varepsilon) < 1$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde belirlenen sıfırdan büyük bir ε değeri için;

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_1(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_1^{n*}(u)}{\overline{F}_1(u)}$$

$$(1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_1^{n*}(u)}{\overline{F}_1(u)} \leq (1 + \rho)^{-n} K(1 + \varepsilon)^n \quad u \geq 0.$$

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F}_1(u)} = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \frac{\overline{F}_1^{n*}(u)}{\overline{F}_1(u)} \quad (6)$$

$$= \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} n = \rho^{-1}$$

olarak yazılabilmektedir. Buradan da $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_1(u)$ eşitliğinin elde edildiği görülebilmektedir. Alt-üstel dağılım yapısına sahip kalın kuyruklu hasar büyüklüğü dağılımları için, iflas olasılığı tahmini $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_1(u)$ şeklinde hesaplanmaktadır. Ancak $\psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F}_1(u)$ tahmini sadece $F_1 \in S$ koşulu altında gerçekleştirilebilmektedir. Net kazanç koşuluna ($\rho > 0$) sahip olan Cramer-Lundberg teoremi göz önünde bulundurularak alt-üstel dağılım üzerine yapılan incelemeler sonucunda aşağıdaki durumlar kabul edilmiştir.

- a) $F_1 \in S$,
- b) $1 - \psi(u) \in S$,
- c) $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) / \overline{F}_1(u) = \rho^{-1}$ [5].

4. Uygulama

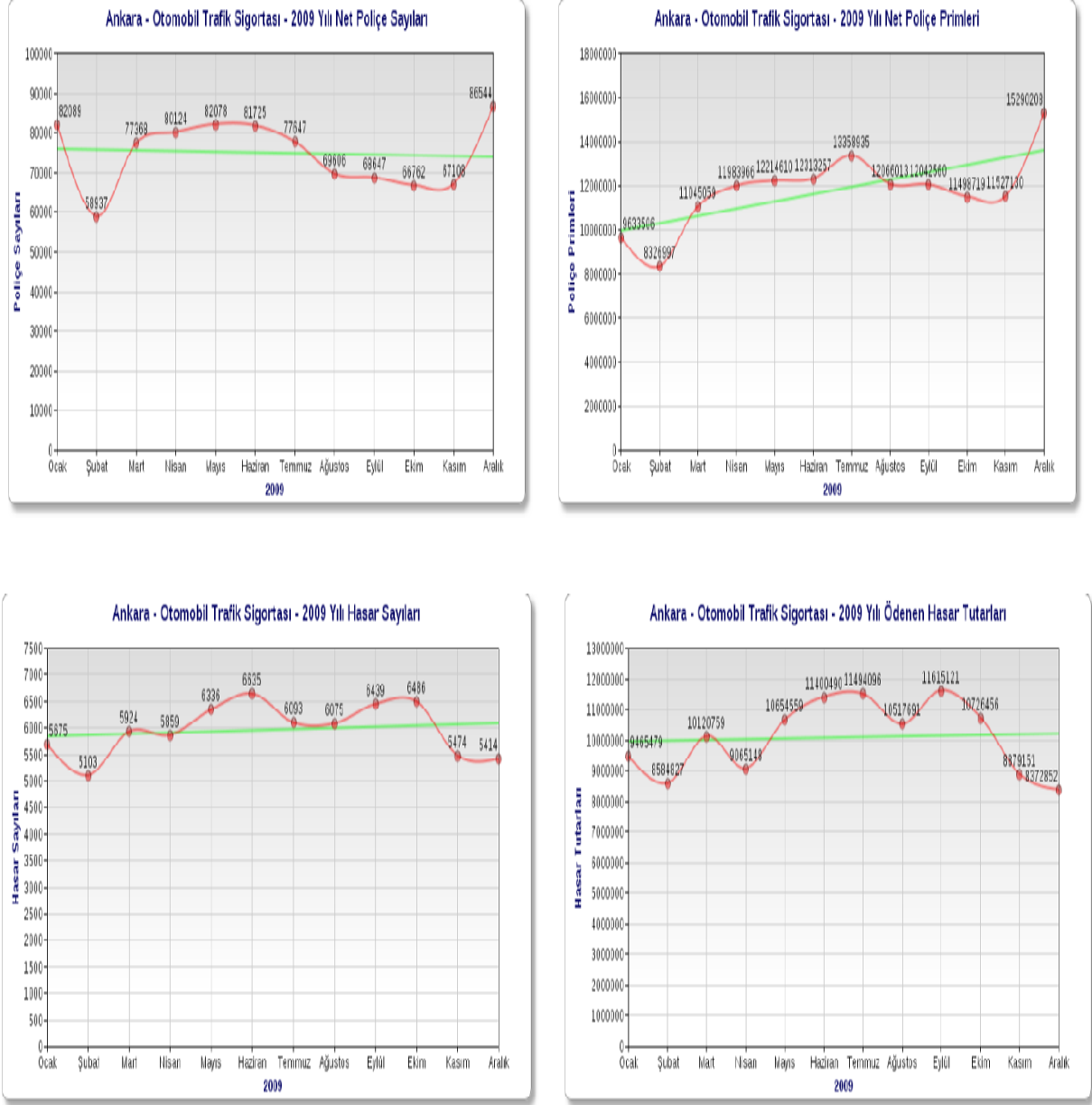
4.1. Giriş

Çalışmanın bu bölümünde, Trafik Sigortaları Bilgi Merkezi'ne (TRAMER) kayıtlı Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk (Trafik) Sigortası verilerinin kullanıldığı bir uygulama yapılmıştır. Yapılan hesaplamada, 2009 yılı için Ankara ilindeki otomobil araç grubuna ait toplanan net poliçe prim tutarı ve ödenen hasar tutarlarından yararlanılmıştır. Uygulamada kullanılacak hasar tutarlarının dağılımına karar verilmesinde hasar büyüklüğünü temsil edecek şekilde Ankara iline ait otomobil sınıfı için 300 adet gerçek bireysel hasar tutarından oluşan örneklem kümesinden yararlanılmıştır.

4.2. Risk sürecinin incelenmesi

TRAMER sistemine kayıtlı 2009 yılı için her bir ayda ödenen hasar ve toplanan net prim tutarlarından oluşturulan risk sürecinde; primlerin dönem başında toplandığı, hasar ödemelerinin ise dönem sonunda yapıldığı varsayımı altında risk sürecinin ilk kez sıfırın altına düştüğü durum için, iflasın gerçekleşme

olasılıkları hesaplanmıştır. 2009 yılında Ankara ilinde otomobil araç grubu için yürürlükteki poliçe adedi, toplanan net primler ile o yıl içerisinde gerçekleşen hasar dosya sayıları ve hasar tutarları Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. 2009 yılı Ankara ili otomobil trafik sigortasında her bir ayda gerçekleşen hasar sayıları, hasar tutarları, net poliçe sayısı ve toplanan net poliçe primleri

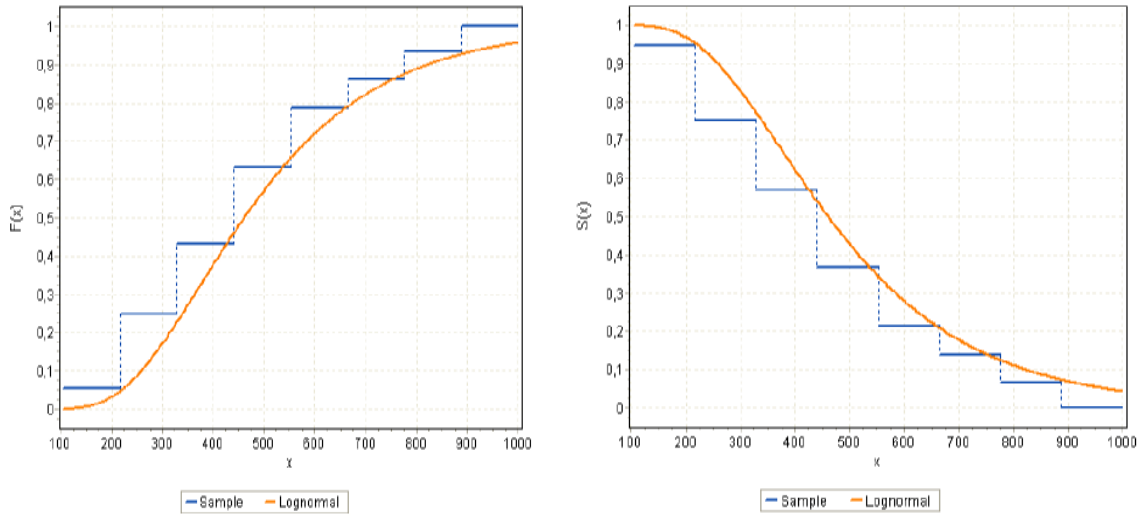
Risk sürecine U_0 başlangıç sermayesi ile başlamakta, bu başlangıç sermayesi ve dönem başında toplanan prim tutarları dönem sonuna kadar aylık faiz oranına göre faizlendirilerek dönem sonunda da hasar ödemeleri yapılarak sürdürülmektedir. İlgili dönem sonunda sistemde kalan tutar, bir sonraki dönemin başlangıç sermayesini oluşturmaktadır.

Risk süreci, $t = 1, 2, \dots, 12$ olmak üzere; Π_t : prim sürecini; S_t : hasar sürecini; r : faiz oranını göstermek üzere $U_t = (U_{t-1} + \Pi_t)(1 + r) - S_t$ şeklinde gösterilmektedir.

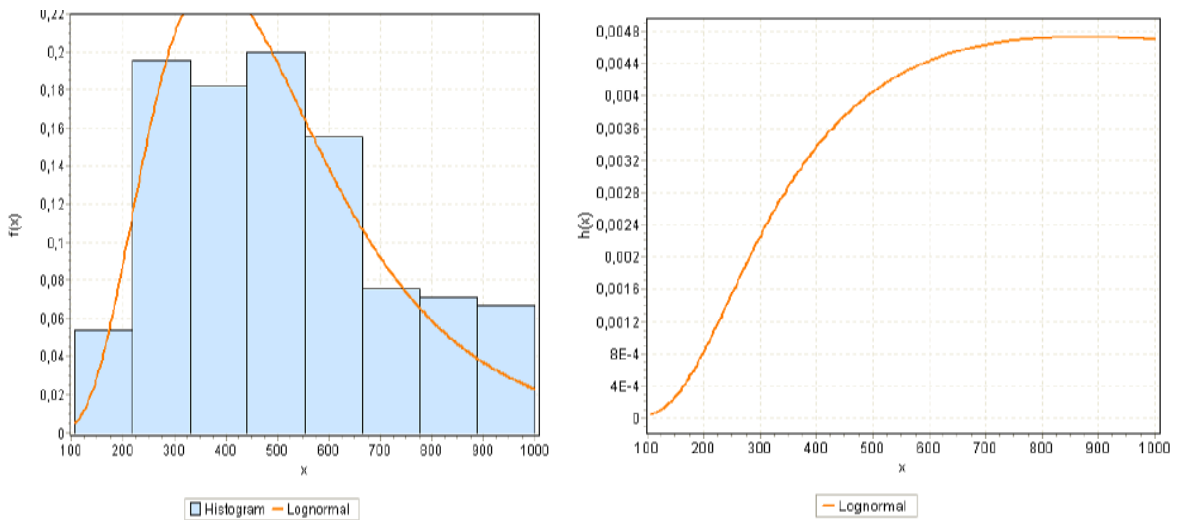
Uygulamada aylık faiz oranı 0,03 olarak alınmış olup, toplam ve ortalama değerlere göre incelenen süreçlerde farklı başlangıç sermaye değerleri kullanılmıştır.

Kolmogorov-Smirnov, Anderson Darling ve ki-kare uyum iyiliği testleri sonucunda hasar tutarının $\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0,45195$ parametreleriyle Log-normal dağılıma uyduğu %95 güvenilirlik düzeyinde kabul edilmiştir. Lognormal dağılıma uyduğu belirlenen hasar tutarlarının Matlab programında log-normal dağılıma göre incelemesinin yapılmasında integral ve limit işlemlerinde kolaylık sağlaması nedeniyle hata fonksiyonu ve tamamlayıcı hata fonksiyonu tablo değerlerinden yararlanılmıştır (Ek1).

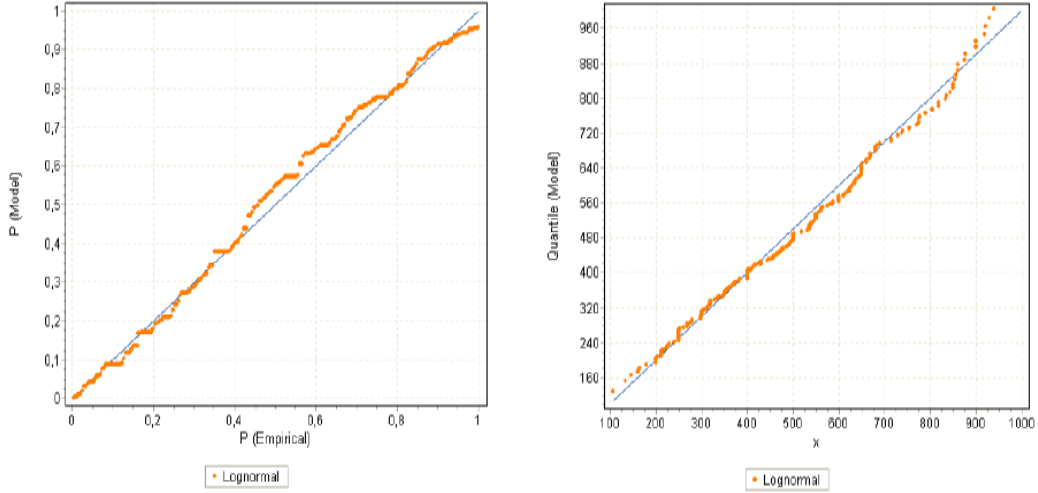
$\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0,45195$ parametrelili Log-normal dağılım hasar tutarlarının sırasıyla kümülatif dağılım ve kuyruk dağılım grafikleri Şekil 2'de; olabilirlik yoğunluk ve tehlike fonksiyonu grafikleri Şekil 3'te ve son olarak da PP ve QQ grafikleri Şekil 4'te verilmektedir.



Şekil 2. $\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0.45195$ parametrelili Lognormal dağılımın kümülatif ve kuyruk dağılımı



Şekil 3. $\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0.45195$ parametrelili Lognormal Dağılımın Olabilirlik Yoğunluk ve Tehlike Fonksiyonu



Şekil 4. $\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0.45195$ parametrelı Lognormal Dağılımın PP ve QQ Grafikleri

Hasar tutarına ilişkin yukarıda verilen grafikler de, Kolmogorov–Smirnov, Anderson Darling ve ki-kare uyum iyiliği testleriyle de kabul edilen $\mu = 6.1327$ ve $\sigma = 0.45195$ parametrelı log-normal dağılımın hasar tutarı dağılımı için uygun olduğunu desteklemektedir.

Kalın kuyruklu hasar büyüklüğü dağılımları için iflas olasılıklarının hesaplanmasında öncelikle incelenen risk sürecinde iflas durumunun gerçekleşmiş olması gerekmektedir. Kalın kuyruklu olduğuna karar verilen hasar tutarlarının; çalışmanın ikinci bölümünde verilen koşulları sağlaması bakımından sırasıyla uzun kuyruklu, alt-üstel ya da düzenli değişen kuyruklu dağılıma uyup uymadığı geliştirilen yazılım kullanılarak karar verilmiştir.

Kalın kuyruklu dağılıma sahip hasar büyüklükleri için iflas olasılığının hesaplanmasında çalışmanın üçüncü bölümünde alt-üstel dağılım sınıfı için elde edilen iflas olasılığı eşitliklerinden yararlanılmıştır.

Alt üstel dağılıma uyan hasar tutarı ile aylık toplanan prim tutarlarına göre oluşturulan risk sürecinin üçüncü bölümde değinilen alt-üstel dağılım sınıfı için elde edilen iflas olasılığı eşitliklerinden yararlanılarak farklı başlangıç sermayeleri ve güvenlik yükleme faktörlerine göre iflas olasılıkları hesaplanmıştır. Tüm hesaplamalar Matlab yazılımı kullanılarak geliştirilen program aracılığı ile yapılmıştır.

20 farklı başlangıç sermayesi ve sekiz farklı güvenlik yükleme faktörüne göre 0,03 faiz oranına bağlı olarak risk sürecinin sıfırın altına düştüğü ilk nokta için elde edilen iflas olasılıkları Çizelge 1’de gösterilmektedir.

Yazılımdan elde edilen değerler sonucunda, başlangıç sermaye miktarlarındaki ve sistemin uygulayacağı güvenlik yükleme faktörlerindeki artışın iflas olasılıklarında azalmaya neden olduğu gözlemlenmiştir.

İflas olasılığı için en yüksek değer sermaye miktarının 1 TL ve güvenlik yükleme faktörünün bulunmadığı durumda, 0.999999 olarak elde edilirken en düşük iflas olasılığı olan 0,493650 değeri ise, sermaye miktarının 1.500.000 TL ve güvenlik yükleme faktörünün 1,875 olduğu durum için elde edilmektedir.

Çizelge 1. 2009 yılı otomobil sınıfı için Ankara ili trafik sigortasının ödenen tüm hasarlar ve toplanan net primlere göre oluşturulan risk süreci için iflas olasılıkları tahmini

Senaryo	İflas Olasılıkları	Güvenlik Yükleme Faktörleri							
	Sermaye Miktarları (TL)	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875
Senaryo 1	Başlangıç Sermayesi =1	0,999999	0,888888	0,799999	0,727272	0,666666	0,615384	0,571428	0,533333
Senaryo 2	Başlangıç Sermayesi =5.000	0,999752	0,888668	0,799802	0,727092	0,666501	0,615232	0,571287	0,533201
Senaryo 3	Başlangıç Sermayesi =10.000	0,999504	0,888448	0,799603	0,726912	0,666336	0,615079	0,571145	0,533069
Senaryo 4	Başlangıç Sermayesi =20.000	0,999008	0,888007	0,799206	0,726551	0,666005	0,614774	0,570862	0,532804
Senaryo 5	Başlangıç Sermayesi =30.000	0,998511	0,887566	0,798809	0,72619	0,665674	0,614469	0,570578	0,532539
Senaryo 6	Başlangıç Sermayesi =40.000	0,998015	0,887125	0,798412	0,725829	0,665343	0,614163	0,570294	0,532275
Senaryo 7	Başlangıç Sermayesi =50.000	0,997519	0,886683	0,798015	0,725468	0,665013	0,613858	0,570011	0,53201
Senaryo 8	Başlangıç Sermayesi =75.000	0,996278	0,885581	0,797023	0,724566	0,664185	0,613094	0,569302	0,531348
Senaryo 9	Başlangıç Sermayesi =100.000	0,995037	0,884478	0,79603	0,723664	0,663358	0,612331	0,568593	0,530687
Senaryo 10	Başlangıç Sermayesi =200.000	0,990075	0,880066	0,79206	0,720054	0,66005	0,609277	0,565757	0,52804
Senaryo 11	Başlangıç Sermayesi =300.000	0,985112	0,875655	0,788089	0,716445	0,656741	0,606223	0,562921	0,525393
Senaryo 12	Başlangıç Sermayesi =400.000	0,980149	0,871243	0,784119	0,712836	0,653433	0,603169	0,560085	0,522746
Senaryo 13	Başlangıç Sermayesi =500.000	0,975186	0,866832	0,780149	0,709226	0,650124	0,600114	0,557249	0,520099
Senaryo 14	Başlangıç Sermayesi =600.000	0,970223	0,86242	0,776178	0,705617	0,646815	0,59706	0,554413	0,517452
Senaryo 15	Başlangıç Sermayesi =700.000	0,96526	0,858009	0,772208	0,702007	0,643507	0,594006	0,551577	0,514805
Senaryo 16	Başlangıç Sermayesi =800.000	0,960297	0,853598	0,768238	0,698398	0,640198	0,590952	0,548741	0,512159
Senaryo 17	Başlangıç Sermayesi =900.000	0,955334	0,849186	0,764267	0,694789	0,63689	0,587898	0,545905	0,509512
Senaryo 18	Başlangıç Sermayesi =1.000.000	0,950371	0,844775	0,760297	0,691179	0,633581	0,584844	0,543069	0,506865
Senaryo 19	Başlangıç Sermayesi =1.250.000	0,937964	0,833746	0,750371	0,682156	0,625309	0,577209	0,535979	0,500248
Senaryo 20	Başlangıç Sermayesi =1.500.000	0,925557	0,822717	0,740445	0,673132	0,617038	0,569573	0,52889	0,49363

Bulunan sonuçlar iflas olasılığının güvenlik yükleme faktörü ve başlangıç sermaye miktarlarına göre değiştiğini göstermektedir. Güvenlik yükleme faktörü incelenen sistemde daha temkinli bir durumu yaratacağından, güvenlik yükleme faktöründeki artış beklenildiği gibi iflas olasılığının düşmesine neden olmuştur. Başlangıç sermaye miktarındaki artışa bağlı olarak da risk sürecinin sıfırın altına düşme olasılığı azalmıştır.

5. Sonuç ve öneriler

Bu çalışmada öncelikle, kalın kuyruklu dağılım yapısının tüm özellikleri ve alt sınıfları araştırılmış, her bir sınıf için gerekli koşullar incelenmiştir. Sigortacılıkta şirketin devamlılığı açısından bir yol gösterici olan risk sürecinin yapısı ve özellikleri incelenmiş, iflas olasılıklarının sigorta şirketi açısından önemine değinilmiştir. Kalın kuyruklu dağılım yapısına sahip olduğuna karar verilen hasar büyüklüklerine ilişkin iflas olasılıklarının hesaplanmasında, kalın kuyruklu dağılımların alt sınıflarından alt-üstel dağılım sınıfına özel geliştirilen teoriler ışığında çeşitli formüller elde edilmiştir.

Geliştirilen Matlab programı yardımıyla herhangi bir dağılımın kalın kuyruklu dağılıma sahip olup olmadığı araştırılmış, kalın kuyruklu dağılıma sahip olması durumunda hangi alt sınıfa dahil olduğu incelenmiştir. Risk süreç yapısı incelenerek, risk sürecinin sıfır seviyesinin altına düşmesi durumunda iflas olasılığı kalın kuyruklu dağılıma ait formüller kullanılarak hesaplanmıştır.

Yapılan uygulama ile risk sürecine bağlı olarak gerçekleşen iflas durumlarının oluşmasında sermaye miktarı ve güvenlik yükleme faktörlerinin etkili olduğu gözlemlenmiştir. Sermaye miktarı ve güvenlik yükleme faktörü değerinin beklenildiği gibi iflas olasılığı ile ters orantılı olduğu ve bu değerlerdeki artışın iflas olasılığını belirgin şekilde düşürdüğü gözlemlenmiştir.

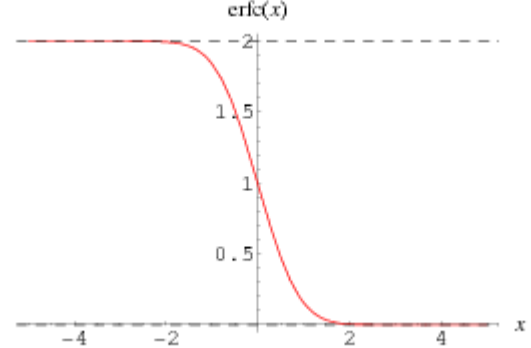
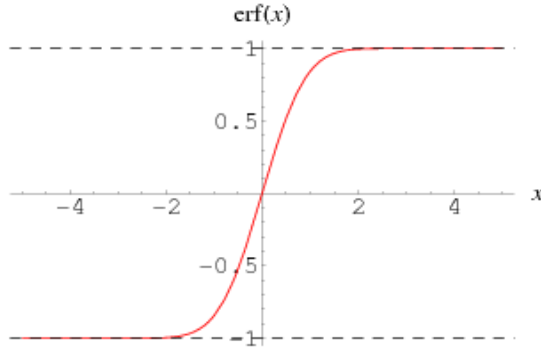
Bu çalışma ile hayat dışı sigorta alanında önemli bir yere sahip olan kalın kuyruklu dağılımların risk süreci ve iflas olasılıkları üzerindeki etkisi incelenmiş ve kalın kuyruklu dağılımlara özel iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı incelenmiştir.

Kaynaklar

- [1] Asmussen, S., 2000, Ruin probabilities, *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability Vol.2, World Scientific Publishing, Singapore, 385p.*
- [2] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L., 1987, Regular variation, *Cambridge University Press, Cambridge.*
- [3] Chistyakov, V.P., 1964, A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes, *Theory probability Application 9, pp 640-649.*
- [4] Embrechts, P., Goldie, C.M., 1982, On convolution tails, *Stochastic Processes Applied 13, pp 263-278.*
- [5] Embrechts, P., Klüppelberg C., Mikosch T., 2001, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, *Applications of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability 33, Springer, 648p.*
- [6] Goldie, C. M., Klüppelberg C., 1998, Subexponential Distributions, *A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications, pp 435-460.*
- [7] Klugman, S.,A., Panjer H.H., Willmot G.,E., 2008, Loss models from data to decisions, Third Edition, *John Wiley and Sons, New Jersey, 726p.*
- [8] Klüppelberg, C., 1988, Subexponential distributions and integrated tails, *Journal of Applied Probability, Vol 25, No:1, pp 132-14.1*
- [9] Mo, K.C.K., 2002, Ruin probabilities with dependent claims, *Actuarial Studies, Faculty of Commerce and Economics, University of New South Wales, 50p.*
- [10] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., 1999, Stochastic processes for Insurance and Finance, *Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons, England, 654p.*
- [11] Sigman K., 1999, Appendix: A primer on heavy-tailed distributions, *Queueing Systems 33, pp 261-275.*

Ekler

Ek-1. Hata fonksiyonu (error function-Erf) ve tamamlayıcı hata fonksiyonu (complementary error function-Erfc) tablosu



x	Erf(x)	Erfc(x)
0	0	1
0,05	0,056372	0,943628
0,1	0,1124629	0,8875371
0,15	0,167996	0,832004
0,2	0,2227026	0,7772974
0,25	0,2763264	0,7236736
0,3	0,3286268	0,6713732
0,35	0,3793821	0,6206179
0,4	0,4283924	0,5716076
0,45	0,4754817	0,5245183
0,5	0,5204999	0,4795001
0,55	0,5633234	0,4366766
0,6	0,6038561	0,3961439
0,65	0,6420293	0,3579707
0,7	0,6778012	0,3221988
0,75	0,7111556	0,2888444
0,8	0,742101	0,257899
0,85	0,7706681	0,2293319
0,9	0,7969082	0,2030918
0,95	0,8208908	0,1791092
1	0,8427008	0,1572992
1,1	0,8802051	0,1197949
1,2	0,910314	0,089686

x	Erf(x)	Erfc(x)
1,3	0,9340079	0,0659921
1,4	0,9522851	0,0477149
1,5	0,9661051	0,0338949
1,6	0,9763484	0,0236516
1,7	0,9837905	0,0162095
1,8	0,9890905	0,0109095
1,9	0,9927904	0,0072096
2	0,9953223	0,0046777
2,1	0,9970205	0,0029795
2,2	0,9981372	0,0018628
2,3	0,9988568	0,0011432
2,4	0,9993115	0,0006885
2,5	0,999593	0,000407
2,6	0,999764	0,000236
2,7	0,9998657	0,0001343
2,8	0,999925	0,000075
2,9	0,9999589	0,0000411
3	0,9999779	0,0000221
3,1	0,9999884	0,0000116
3,2	0,999994	0,000006
3,3	0,9999969	0,0000031
3,4	0,9999985	0,0000015
3,5	0,9999993	0,0000007
3,5	0,9999993	0,0000007