



## Uzun ömürlülük bonolarını fiyatlandırma: Uç değer kuramı ve kübik risk fiyatlandırma modeli

Ayşe Arık

Hacettepe Üniversitesi  
Aktüerya Bilimleri Bölümü  
06800-Çankaya, Ankara, Türkiye  
aysearık@hacettepe.edu.tr

Meral Sucu

Hacettepe Üniversitesi  
Aktüerya Bilimleri Bölümü  
06800-Çankaya, Ankara, Türkiye  
msucu@hacettepe.edu.tr

### Özet

Bu çalışmada teknik kazancı ölümlülük endeksine bağlı olan bir uzun ömürlülük bonusu fiyatlandırılmıştır. Ölümlülük endeksinin gelişimindeki küçük değişimler sabit terimli (driftli) rasgele yürüyüş modeli ile, sayıca az olan uzun ömürlülük durumları ise uç değer teoremine göre modellenmiştir. Uzun ömürlülük bonusu, Lane ve Movchan (1999) tarafından geliştirilen kübik risk modeli ile fiyatlandırılmıştır.

**Anahtar sözcükler:** Uzun ömürlülük bonusu; Lee-Carter modeli; Uç değer kuramı, Ölüm oranı, Fiyatlandırma.

### Abstract

#### Pricing longevity bonds: Extreme value theory and risk cubic pricing model

The bond which is written on longevity risk has been priced in this study. The payoff is given by depending on a mortality index. While the small variations in the mortality index are modelled by using random walk model with drift, rare longevity cases are modelled by extreme value theory. The mortality modelling is priced by using the risk cubic pricing method which is developed by Lane and Movchan (1999).

**Keywords:** Longevity bonds, Lee-Carter model, Extreme value theory, Mortality rate, Pricing.

## 1. Giriş ve önceki çalışmalar

### 1.1. Giriş

Ölümlülük riskinin tam tersi olan uzun ömürlülük riski; ekonomik ve çevresel koşullar ile beslenme düzeyi ve tıptaki iyileşmelere bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Ölümlülük riski, beklenen ömürden daha kısa süre yaşamanın geride kalan bireylere ekonomik maliyetini; uzun ömürlülük riski ise beklenen ömürden daha uzun süre yaşamanın sigorta şirketlerine olan maliyetini yansıtmaktadır. Hayatta kalma olasılığının gerçek değerinin altında tahmin edilmesine neden olan bu risk, yanlış prim hesaplamalarına neden olmaktadır.

Bireyler yıllar itibarıyla daha uzun yaşama riski ile karşı karşıya kalmakta ve sosyal güvenlik sistemleri, emeklilik planları ve özel annüite ürünleri yardımıyla bu riskten korunmaya çalışmaktadırlar [3]. Bireylerin, uzun ömürlülük riskine karşı kendilerini korumamaları durumunda, ilerleyen yaşlardaki

tüketim miktarlarını düşürerek bu riske uyum sağlamaları gerekecektir. Bireylerin uzun ömürlülük riskinden korunması, iyi geliştirilmiş bir annüite piyasası tarafından sağlanabilmektedir.

Faydası belirlenmiş emeklilik planlarından, katkısı belirlenmiş emeklilik planlarına geçilmesi; bireylerin annüite ürünlerine olan talebini artırmaktadır. Annüitelere olan talepteki artışa bağlı olarak annüite sağlayan sigortacıların maruz kaldığı uzun ömürlülük riski ile beraber, bu riskleri yönetme ihtiyacı da artmaktadır.

Bireyler, risklerden korunmak amacıyla sahip oldukları risklerini sigorta şirketlerine devrettikleri anda, sigorta şirketleri her bir bireyin riskini içeren bütünsel (aggregate) ölümlülük riski ile karşı karşıya kalmaktadır. Bu açıdan bakıldığında, uzun ömürlülük riskinin; garanti edilmiş annüite opsiyonlarındaki faiz ve piyasa riski ile bağlantılı olarak ortaya çıktığı görülmektedir. Sigortalı bireylerin yaşam sürelerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında ve *Büyük Sayılar Kanunu*'na göre; kamu sosyal güvenlik sisteminin, özel annüite ürünleri satan sigorta şirketlerinin ya da reasürörlerin uzun ömürlülük ve ölümlülük riskinden korunabilecekleri düşünülmektedir. Oysa, bütünsel uzun ömürlülük riski sistematik bir risk olduğundan risk havuzu mekanizması ile değerlendirilememekte ve dağıtılabilir risk sınıfına dahil edilememektedir.

Sigorta sektöründe risk transferi kapsamında ilk olarak reasürans sözleşmelerine başvurulmaktadır. Geleneksel reasürans anlaşmaları hayat annüitesi portföylerine de uygulanabilmektedir. Ancak belirsizlik riski sigorta-reasürans sürecinde "dağıtılamamaktadır". Dolayısıyla etkinliği artırabilmek amacıyla reasürans transferleri, sermaye piyasasına yapılan transferler ile tamamlanmalıdır.

Ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi fikri, ilk kez, 1998 yılında Samuel H. Cox'un bir konuşması ile gündeme gelmiştir. Uzun ömürlülük bonoları ile annüite ürünleri sağlayan kurum ve kuruluşlara bütünsel uzun ömürlülük riskinden korunma olanağı sunulmaktadır. Annüitantların beklenenden daha uzun yaşaması durumunda, uzayan ödeme periyotları nedeniyle daha fazla hasara maruz kalan sigortacılar; uzun ömürlülük bonosuna sahip olduklarından, daha fazla kupon ödemesi alarak, hasarlarını dengeleyebilmektedirler [5].

Alternatif risk transfer teorisi (ART), uzun ömürlülük riski probleminde bir sermaye piyasası çözümü sunulması için gerekli teorik alt yapıyı sağlamaktadır. Yakın geçmişte sigorta şirketleri teminat altına aldıkları katastrofik riskleri, afet bonoları sayesinde başarılı bir şekilde finansal piyasalara transfer edebilmişlerdir [4]. Yeni bir risk yönetim aracı olan ölümlülük menkul kıymetleştirilmesi, katastrofik hasarların finansal piyasalara aktarılmasını sağlayarak hayat sigortası endüstrisinin risk kabul kapasitesini artırmaktadır [12]. Bu çalışmada; ölümlülük yapısı modellenerek, uzun ömürlülük riski üzerine yazılmış bir bononun fiyatlandırılması yapılmıştır. Teknik kazanç, ölümlülük endeksine bağlı olarak ifade edileceğinden; ölümlülük gelişimindeki küçük değişimler sabit terimli (driftli) rasgele yürüyüş modeli ile modellenirken, az sayıdaki uzun ömürlülük durumları ise uç değer teoremine göre modellenmiştir. Bu sayede söz konusu model ile hem ölümlülük yapısında meydana gelen değişimleri yakalama, hem de örneklem dışındaki uç değer uzun ömürlülük olaylarının ekstrapolasyonunun yapılması olanağı sağlanmıştır. Kullanılacak olan ölümlülük modeli, Lane ve Movchan (1999) tarafından geliştirilen kübik risk modeli ile birleştirilmiştir [9].

Çalışmanın Birinci Bölümü'nde konuya giriş yapılmıştır. İkinci Bölüm'de ise Swiss Re ve European Investment Bank (EIB) tarafından çıkarılan ilk resmi ölümlülük ve uzun ömürlülük bonolarının yapıları ele alınmıştır. Çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde Lee-Carter (LC) ölümlülük modeli ve Uç Değer Kuramı (UDK) incelenmiştir. Çalışmanın Dördüncü Bölümü'nde, ilk olarak, Türkiye ölümlülük göstergelerinden elde edilen ağırlıklandırılmış ölüm oranları LC Modeli ve Uç Değer Dağılımları ile modellenmiştir. Daha sonra teknik kazançları, ölümlülük endeksine dayanan ve satım opsiyonlarının farkı olarak ifade edilen hipotetik bir uzun ömürlülük bonusu Lane ve Movchan (1999) tarafından geliştirilen Kübik Risk Fiyatlandırma modeli ile fiyatlandırılmıştır.

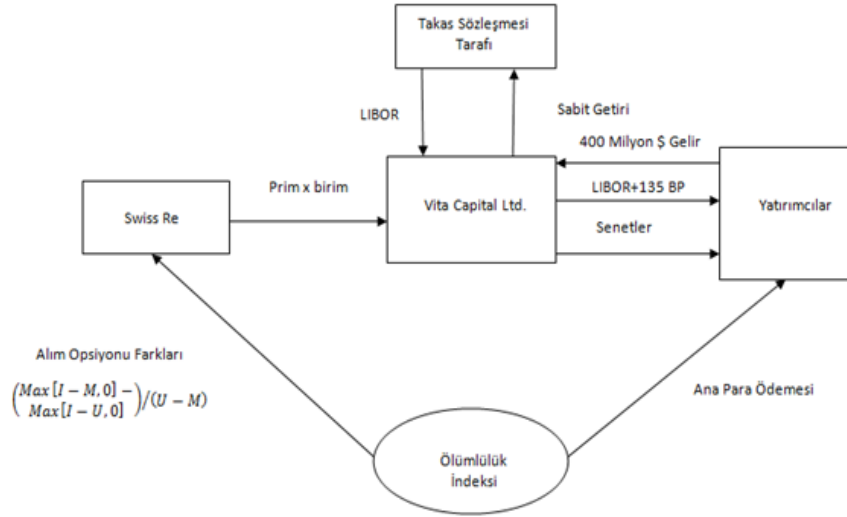
## 2. Swiss Re ve EIB tarafından çıkarılan bonolar

Bu bölümde; öncelikle, finansal piyasalarda işlem gören bazı türev ürünlere değinilmiş, ardından finansal ve aktüeryal fiyatlandırma yaklaşımları incelenmiştir.

### 2.1. Swiss Re ölümlülük bonosunun yapısı

Hayat sigortası endüstrisinin finansal kapasitesi kasırga, salgın, deprem ve diğer doğal ya da insan kaynaklı felaketlerden kaynaklanan katastrofik ölümleri teminat altına alacak kadar gelişmiş değildir. Sektör kapasitesinin artırılıp, katastrofik ölüm hasarlarının tazmin edilebilmesi amacıyla dünyanın en büyük ikinci reasürans şirketi olan Swiss Re; ilk saf ölümlülük bonosunu çıkartarak, kurumsal yatırımcılardan 400 milyon ABD Doları büyüklüğünde teminat elde etmiştir [12].

Swiss Re 2003 yılında satışa sunduğu ilk ölümlülük bonosunu, ölümlülük riskini azaltmak için, bir özel amaç kurumu (special vehicle purpose) olan Vita Capital I yardımıyla çıkarmıştır. Vita I'e ilişkin işlemler aşağıda şematik olarak gösterilmiştir [3]:



Şekil 1. 2003 yılında Swiss Re tarafından çıkarılan ölümlülük bonosunun yapısı

Swiss Re bonoyu Aralık 2003'te çıkarmıştır. Vadesi üç yıl olan bono, 1 Ocak 2007'de sona erecek şekilde tasarlanmıştır. Kupon ödemeleri ise yılda dört defa, üç aylık *US Dolar LIBOR* + 135 baz puanlık fark üzerinden yapılmıştır. Vita Capital I, Swiss Re'nin kendisine yaptığı sabit prim ödemelerine karşı LIBOR almasını sağlayan bir takas sözleşmesine girmiştir. Anapara ölümlülük riskine maruz kalmakta ve ağırlıklandırılmış bir ölümlülük endeksine bağlı olarak ifade edilmektedir [3]. Ölümlülük riski; US, UK, Fransa, İtalya ve İsviçre'deki yıllık ölüm oranlarının ağırlıklandırılmış ortalamasına dayanan,  $t$  yılına ilişkin bir  $q_t$  endeksi cinsinden tanımlanmaktadır.  $q_t$  endeksinin ( $t = 2004, 2005$  ya da 2006) 2002 yılında gerçekleşen  $q_0$  seviyesinin %130'nun üzerine çıkması durumunda, yatırımcıların anapara miktarında bir azalma olacaktır [12].

Swiss Re'nin bakış açısından, Vita Capital I'den elde edilen teknik kazançlar düşük kullanım fiyatı  $M = 1,3q_0$  ve yüksek kullanım fiyatı da  $U = 1,5q_0$  olan alım opsiyonlarının farkı şeklindedir. Swiss Re, ölümlülük endeksine dayalı koşullu teknik kazançlar karşılığında Vita Capital I'e prim ödemesi yapmaktadır. Ölümlülük endeksinin düşük kullanım fiyatını aşması durumunda Swiss Re, Vita Capital I fonundan nakit çekebilecektir. Ölümlülük endeksinin yüksek kullanım fiyatını aşması durumunda ise, tüm anapara miktarı Swiss Re'nin kullanımına açık olacaktır. Opsiyondan her bir periyotta elde edilen olası teknik kazançlar, anaparanın bir yüzdesi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir [3]:

$$Teknik Kazanç_t = \frac{Max(q_t - M; 0) - Max(q_t - U; 0)}{U - M}$$

$t$  yılı için anapara miktarındaki yüzde azalışı gösteren  $kayıp_t$ ,

$$kayıp_t = \begin{cases} 0, & q_t \leq 1,3q_0 \\ 1 - \frac{1,5q_0 - q_t}{0,2q_0}, & 1,3q_0 < q_t \leq 1,5q_0 \\ 1, & q_t > 1,5q_0 \end{cases}$$

olarak ifade edilmektedir. Buna göre vade tarihindeki ödeme tutarı,

$$Vade\ biti\ min\ deki\ ödeme = 400.000.000 \begin{cases} 100\% - \sum_{t=2004}^{2006} kayıp_t, & \sum_{t=2004}^{2006} kayıp_t < 100\% \\ 0, & \sum_{t=2004}^{2006} kayıp_t \geq 100\% \end{cases}$$

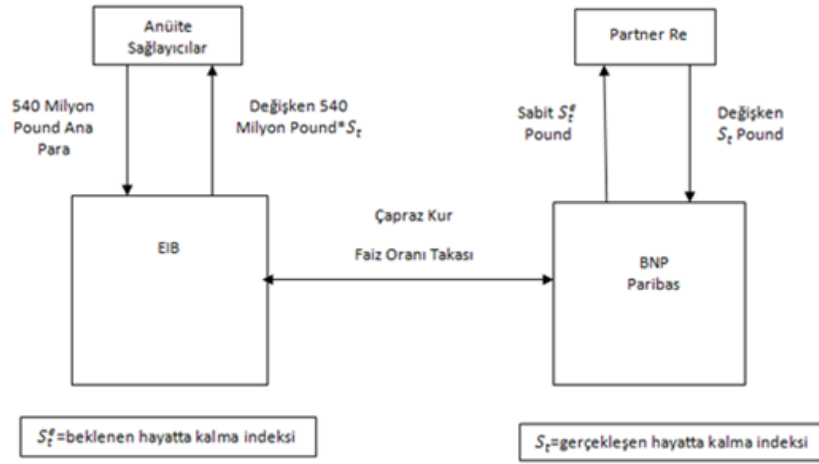
eşitliği ile yazılabilir [12].

## 2.2. EIB uzun ömürlülük bonosunun yapısı

Swiss Re ölümlülük bonosunun çıkarılmasından bir yıl sonra, Kasım 2004'te, EIB bir uzun ömürlülük bonusu çıkarmıştır. Sistematik uzun ömürlülük riskinden korunabilmek için uygun varlık arayışında olan finansal kuruluşlar uzun ömürlülük bonosunun hedef kitlesini oluşturmuştur. Bu bono; idareci koltuğunda BNP Paribas, ihraççı konumunda ise EIB ve risk alım kapasitesini analiz edip, uzman görüşü sağlayan PartnerRe işbirliğinde çıkarılmıştır. Bononun toplam değeri 540 milyon Pound (775 milyon-Euro) olup, vadesi 25 yıl olarak tasarlanmıştır. Bu bono, başlangıçta, UK emeklilik planları hedef alınarak tasarlanmıştır [2]. EIB bonosunun potansiyel alıcıları, bono uzun ömürlülük riskini yatırımcılara devrettiğinden, emeklilik planı yöneticileridir [12].

Emeklilik planı ve annüite ürünleri satan firmaları hedef alan bono, Blake ve Burrows (2001) tarafından düzenlenen hayatta kalma bonosuna benzer bir yapıya sahiptir [1][12].

Bono EIB'nin yatırımcılara Pound cinsinden uzun ömürlülük bağlantılı ödemeler yapmayı taahhüt ettiği bir sözleşmedir. EIB aslında Euro cinsinden değişken faiz oranları ödemeyi tercih ettiğinden bono; BNP ile Euro cinsinden değişken ödemelere karşılık, Pound cinsinden sabit ödemeler aldığı bir çapraz kur faiz oranı takasını (cross-currency interest rate swap) içermektedir. Bu işlemde BNP uzun ömürlülük riskini üstlenmekte ve Partner Re ile bir ölümlülük takas sözleşmesi düzenlemektedir. Bu anlaşmaya göre Partner Re; aynı kohortun projekte edilmiş hayatta kalma endeksine,  $S_t^e$ , bağlı olarak hesaplanan sabit Pound ödemelerini, değişken Pound ödemeleri ile değiştirmektedir. Ölümlülük kestirimleri için UK Hükümeti Aktüerlik Bölümü tarafından 2002 yılı baz alınarak yapılan merkezi ölümlülük projeksiyonundan faydalanılmıştır. Bu kestirimler Partner Re'nin içsel yapısı gözönüne alınarak revize edilmiştir [3].



Şekil 2. EIB/BNP Paribas tarafından çıkarılan uzun ömürlülük bonosunun yapısı

### 3. Lee-Carter modeli ve uç değer kuramı

#### 3.1. Lee-Carter yöntemi

LC modeli, ölümlülük modellerinin olasılıksal bir süreç olarak ifade edilmesini sağlayan ilk örnektir. Modelde örneklem hatalarından sapmalar da tanımlanmış ve böylece süreç riski de dikkate alınmıştır. LC yöntemi oldukça etkili sonuçlar elde edilmesini sağladığından, birçok yeni modelin geliştirilmesine de yol açmıştır [14].

1992 yılında Lee ve Carter tarafından geliştirilen bu model, istatistiksel zaman serisi yöntemleri ile parametrik yaklaşımın bir kombinasyonu olarak tasarlanmıştır [7]. Geliştirilen bu model, ölümlülükteki yaşa özel etkilerin ve değişimlerin incelenmesinde kullanılmıştır.

Doğrusal bir yapıya sahip olan LC modeli; yaşı gösteren  $x$  değişkeni ile takvim yılını gösteren  $t$  değişkenine bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (1)$$

Bu eşitlikte,

$m_{x,t}$  :  $t$  zamanında  $x$  yaşında olan bir bireye ilişkin gözlemlenen merkezi ölüm oranını,

$a_x$  : ortalama yaşa özel ölümlülük yapısını (age-specific pattern),

$b_x$  :  $k_t$  değişimine bağlı olarak  $x$  yaşına ilişkin ölümlülük değişimini,

$k_t$  : genel ölümlülük düzeyini,

$\varepsilon_{x,t}$  :  $t$  zamanı ve  $x$  yaşına ilişkin artık terimi

göstermektedir.

$k_t$  zaman bileşeni, logaritmik ölçekte, tüm yaşlar için ölümlülük düzeylerinin (oranlarının) zaman içindeki değişimini ifade etmektedir.  $k_t$ 'deki değişimin doğası hakkında herhangi bir varsayım yapılmamaktadır.

$b_x$  yaş bileşeni,  $k_t$ 'deki değişimin  $x$  yaşını ne ölçüde etkilediğini yansıtmaktadır [8]. LC modelinde; aynı ölümlülük endeksine maruz kalan yaşa özel ölüm oranlarının, aynı miktarlarda olmasa da birlikte arttıkları ya da azaldıkları varsayılmaktadır [7]. Teorik olarak, herhangi bir durumda ölümlülük oranı artıp, azalabileceğinden, tüm  $b_x$ 'lerin aynı işaretli olma zorunluluğu bulunmamaktadır. Uygulamada ise

yeterince uzun bir süre sonunda verinin modele uyumunun sağlanabilmesi için, tüm  $b_x$  'lerin aynı işaretli olması gerekmektedir. Modelde,  $b_x$  değerlerinin zaman içerisinde değişmediği varsayılmaktadır [8].

(1) eşitliğinin sağ tarafında gözlemlenebilir bir değişken bulunmadığından, eşitliğe ilişkin bir en küçük kareler çözümünün bulunması için Lee ve Carter (1992) tarafından önerilen *tekil değer ayrıştırma yöntemi* (TDA) kullanılmaktadır. Modelleme sürecinde hataların eş varyanslı olduğu varsayılmaktadır [7]. Bu varsayım, en küçük kareler yönteminin kullanılmasını sağlamak için yapılmaktadır. Diğer taraftan gözlemlenen ölüm oranlarının logaritması, ileriki yaşlarda genç yaşlarda olduğundan çok daha fazla değişkenlik gösterdiğinden, eş varyanslılık varsayımı çok da gerçekçi değildir [14].

Ölümlülüğün yıllar içerisindeki gelişiminden bağımsız olan  $a_x$  parametresi, yaşa ilişkin her bir logaritmik ölüm oranının ortalaması alınarak hesaplanmaktadır. Tek bir çözüm bulmak için  $b_x$  katsayılarının karelerinin toplamının 1'e,  $k_t$  değerlerinin toplamının ise 0'a eşit olduğu kabul edilmektedir. Bu ölçütler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$a_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln m_{x,t} \quad \sum_x b_x^2 = 1 \quad \sum_t k_t = 0 \quad (2)$$

Lee ve Carter (1992) çalışmasında iki aşamalı bir tahmin süreci izlemiştir. Buna göre ilk aşamada,  $b_x$  ve  $k_t$  tahminlerinin bulunabilmesi için  $\{\log(m_{x,t}) - a_x\}$  matrisine *TDA yöntemi* uygulanmıştır. İkinci aşamada ise  $k_t$  zaman serisi *ikinci aşama kestirim yöntemi* ile yeniden tahmin edilmiştir. Lee ve Carter;  $b_x$  ve  $k_t$  tahminleri yardımıyla bulunan tahmini ölen kişi sayılarının, gözlemlenen ölen kişi sayılarını gösteren  $D_t \equiv \sum_x D_{x,t}$  ile tam olarak örtüşmediğini görmüştür. Bu noktadan hareketle tahmini ölen kişi sayıları ile gözlemlenen ölen kişi sayıları arasındaki farkı sıfır yapan  $k_t$  değerleri ikinci aşama kestirimi ile elde edilmiştir. Buna göre aşağıdaki eşitliği sağlayan  $k_t$  değerleri bulunmaya çalışılmıştır:

$$D_t = \sum_x \{ \exp(a_x + b_x k_t) N_{x,t} \} \quad (3)$$

Eşitlikte yer alan  $D_t$  ifadesi  $t$  yılında ölen toplam kişi sayısını gösterirken,  $N_{x,t}$   $t$  yılında  $x$  yaşında olan bireylerin sayısını göstermektedir.

TDA, ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi ve en çok olabilirlik tahmin yöntemi, literatürde, parametre tahmininde en çok tercih edilen yöntemler haline gelmiştir [8].

### 3.2. Uç değer kuramı

UDK; uç (extreme) olayların istatistiksel olarak incelenip modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu kuram ile merkezi limit teoremi birbirine oldukça benzemektedir. Merkezi limit teoremi, örneklem toplam ya da ortalamalarının limitteki dağılımlarının *normal dağılıma* yaklaştığını ortaya koymaktadır. UDK da ise rastlantı değişkenlerinin limitteki davranışları ele alınmaktadır [13].

Gerçek bir veri setindeki uç değerler, iki farklı yaklaşım ile saptanmaktadır. İlk yaklaşımda; değişkenin ardışık zaman süreleri (ay ya da yıl) içerisinde aldığı en büyük (ya da en küçük) değerler ile ilgilenilmektedir. Seçilen bu gözlem değerleri uç olayları oluşturmakta ve en büyük değerler kümesi (block maxima) olarak adlandırılmaktadır. İkinci yaklaşımda ise, verideki bir eşik değer üzerinde kalan gözlem değerleri ile ilgilenilmektedir [6].

### 3.2.1. Fisher-Tippet teoremi

Fisher-Tippett teoremi; örneklem uç değerlerinin limitteki davranışlarını tanımlayan, UDK'nın en temel sonuçlarından biridir. Bu teorem, aşkın değerlerin nerede değerlendirilmesi gerektiği ile ilgili bir yaklaşım sunmakta ve *eşik sınırın üzerinde kalan en büyük değerler (peaks over threshold, POT)* olarak da adlandırılmaktadır.

Belirli bir  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan  $x$  değerlerinden elde edilen  $F_u(x)$  dağılım fonksiyonu, "*koşullu aşkın değer fonksiyonu*" adını almaktadır.  $X$  rastlantı değişkeni için  $u$  bilinen eşik değeri,  $y = x - u$  aşkın değerleri ve  $x_F \leq \infty$  ise  $F(x)$  dağılım fonksiyonunun sağ bitim noktasını göstermek üzere, koşullu aşkın değer fonksiyonu,

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (4)$$

olarak ifade edilmektedir.  $F_u(y)$  dağılım fonksiyonu,  $F(x)$  dağılım fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$F_u(y) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (5)$$

$X$  rastlantı değişkeni, ağırlıklı olarak, 0 ile  $u$  arasında değerler almaktadır.  $F(x)$  dağılım fonksiyonunun bu aralıkta tahmin edilmesinde, genel olarak, bir problem ile karşılaşmamaktadır; ancak eşik değerin üzerinde çok az sayıda gözlem değeri bulunmasından dolayı  $F_u(y)$  dağılım fonksiyonunun tahmin edilmesinde çeşitli zorluklarla karşılaşılabilir.

UDK, koşullu aşkın değer fonksiyonu  $F_u(y)$ 'nin tahmin edilmesinde karşılaşılan sorunların çözümünde oldukça faydalı bir kuramdır. Bu teoriye bir sonraki kısımda yer verilmiştir [6].

### 3.2.2. Pickands-Balkema-de Haan teoremi

Oldukça geniş bir  $F(x)$  dağılım fonksiyonu ailesi için,  $u$  büyük bir eşik değeri göstermek üzere, koşullu aşkın değer dağılım fonksiyonu  $F_u(y)$ , genelleştirilmiş Pareto dağılımı (GPD) yardımıyla yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilebilmektedir:

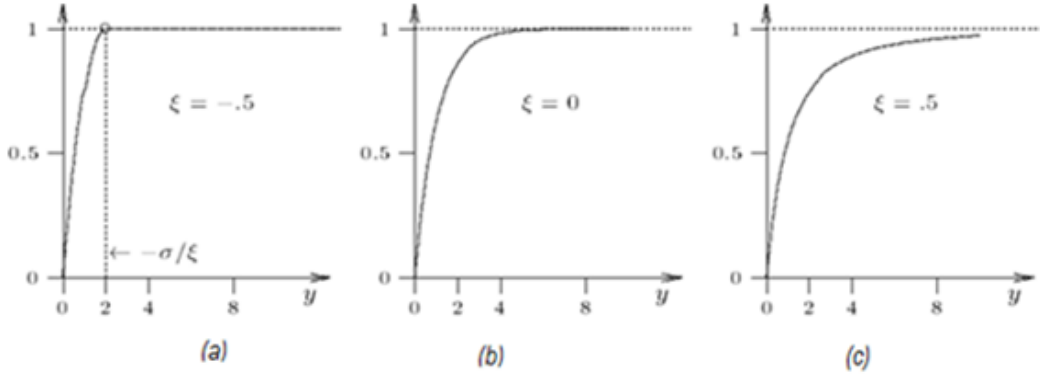
$$F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty \text{ ve } 0 \leq y \leq (x_F - u)$$

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \xi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$x$ ,  $x = u + y$  olarak tanımlandığında, GPD,  $x$ 'in bir fonksiyonu olarak

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{(x - u)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad (7)$$

biçiminde ifade edilebilmektedir.  $G_{\xi, \sigma}(x)$  genelleştirilmiş Pareto dağılımının; şekil parametresi ya da kuyruk endeksi olarak ifade edilebilen  $\xi$  parametresinin negatif (a), pozitif değer (c) ya da sıfır değerini (b) alması koşullarına bağlı olarak gösterdiği değişim Şekil (3)'de verilmiştir.



Şekil 3. Kuyruk endeksinin değişimine göre genelleştirilmiş Pareto dağılımı

Genellikle finansal kayıplara ilişkin bir üst sınır konulamayacağından, kalın kuyruklu dağılımların modellenmesinde, yalnızca, şekil parametresi olan  $\xi$  'nin pozitif değerler aldığı dağılımların (Şekil (3) (c)) uygun olacağı yorumu Şekil (3)'e bağlı olarak yapılabilir.

Eş.(5)'e dayanılarak  $F(x)$  dağılım fonksiyonunun kapalı formu,

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x) + F(u) \quad (8)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

$n$ , toplam gözlem sayısını;  $N_u$ ,  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan gözlem sayısını göstermek üzere Eş.(8)'deki  $F_u(x)$  GPD ile;  $F(u)$  ise  $(n - N_u)/n$  olarak değiştirildiğinde

$$F(x) = \frac{N_u}{n} \left( 1 - \left( 1 + \xi \frac{(x-u)}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right) + \left( 1 - \frac{N_u}{n} \right) \quad (9)$$

şeklinde elde edilecektir.

Bu eşitlik sadeleştirilerek,

$$F(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma} (x-u) \right)^{-1/\xi} \quad (10)$$

biçiminde yazılabilmektedir [6].

## 4. Fiyatlandırma

### 4.1. CAT Bonoların fiyatlandırılması

Risksiz piyasalarda, sigorta riski ile finansal piyasaların hareketi arasında herhangi bir korelasyon yoktur. Diğer taraftan sigorta piyasası risksiz olmadığı gibi, mükemmellikten de uzaktır. Dolayısıyla yatırımcılar, piyasadaki katastrofik menkul kıymetlere ilişkin üstlenecekleri riski tazmin edebilmek amacıyla bir yüklenme parametresine ihtiyaç duyarlar [10].



Sigorta ve aktüerya literatüründe brüt prim hesaplamalarındaki “yükleme” parametresini modellemek için pek çok yaklaşım kullanılmıştır. Basit olduklarından dolayı en çok tercih edilen iki yöntem “*beklenen değer ilkesi*” ve “*standart sapma ilkesi*” dir.

$EL$ , beklenen hasarı göstermek üzere, beklenen değer ilkesine göre yükleme parametresi beklenen hasarın  $\gamma$  kadar bir yüzdesi ile orantılıdır ve  $prim = EL + \gamma EL$  şeklinde ifade edilebilir. Yalnızca beklenen değer dikkate alındığı bu yöntem riske duyarlı değildir. Yaklaşımın en büyük avantajı, sadece hasar dağılımının ilk momentine ihtiyaç duyulmasıdır.

Standart sapma ise oldukça geniş kullanım alanına sahip olan bir risk ölçüm aracıdır. Brüt primin; standart sapma olan  $\sigma(L)$ 'e  $\gamma$  oranında bir yükleme yapıp, beklenen hasara eklenmesi ile hesaplanmaktadır:

$$prim = EL + \gamma \sigma(L)$$

Standart sapma ilkesi simetrik rassal sonuçlar için iyi çalışmaktadır.

Sigorta ya da reasürans teminatlarında yer alan riskler değerlendirilirken, kâr ve hasar büyüklüklerine ilişkin dağılımların çarpık olabileceği dikkate alınmalıdır. Geleneksel risk ölçümü (genellikle, standart sapma), simetrik rassal çıktılarla ilgilenmektedir. Sigortacılıktaki olaylar ise simetrik değildir [3].

Sigorta bağlantılı menkul kıymetlerin fiyatlarının, sigortacının beklenen hasarının üzerinde olması ve yapılacak olan “*fazla ödemenin*” (excess spread) varsayılan riske bağlı bir fonksiyon olması gerektiği konusunda görüş birliği vardır.

Sigorta Bağlantılı Menkul Kıymetler (Insurance Linked Securities, ILS) piyasası henüz çok yeni olmakla birlikte, reasürans ve finans piyasalarını biraraya getirmektedir. 1996 yılındaki yıllık ILS raporu kapsamında standart sapmanın kullanımına değinilmiş ve daha fazla menkul kıymet yazıldıkça, standart sapmanın sigorta verileri için yeterli olmadığı görülmüştür. 1997 yılındaki yıllık raporda ise daha iyi bir ölçüm aracı olan ve sigorta bağlantılı ürünlerdeki asimetrik sigorta riskini ölçmekte kullanılan *koşullu beklenen hasar (CEL)* üzerinde durulmuştur. Yalnızca  $CEL$ 'e başvurmak yeterli sonuçlar üretmeye yetmemektedir. Bu durum iki risk ölçümünün birlikte düşünülmesi gerektiği sonucunu doğurmuştur:  $CEL$  ve 1998 yılındaki “Risk Cubes” makalesinde sözü edilen *ilk dolar hasar olasılığı (PFL)* (probability of first dollar loss).

Sigortacılık literatüründe,  $CEL$  hasar şiddetine karşılık gelirken; hasar sıklığı da  $PFL$ 'yi ifade etmekte kullanılmaktadır. Risk değerlendirmelerinde; hasar sıklığı ve şiddeti arasındaki ödünleşimi görgül olarak ölçüp, bu ölçümün piyasa fiyatlarında kullanılması fikri yenidir [10].

#### 4.1.1. Kübik risk fiyatlandırma modeli

Brüt prim; finansal risk ( $LIBOR$ ) ile sigorta riski ( $LIBOR$ 'un üzerinde kalan kısım) cinsinden elde edilmektedir. Riskteki artık kısım, iki parçaya ayrılarak incelenebilir. İlk parça yatırımcının beklenen hasarını ( $EL$ ) tazmin etmektedir. İkinci parça ise yatırımın varsayılan riskini tazmin etmektedir. Bu parça, finansal piyasalarda “beklenen artık getiri” (*expected excess return, EER*) olarak adlandırılmaktadır.

Üstlenilen risklerden tümüyle korunmak mümkün olmadığından, yatırımcılar bu riskleri tazmin edebilmek için bir getiriye ihtiyaç duymaktadır.  $EER$ ; yatırımcının işlemleri sonucu ortaya çıkan, finansal getirinin ve beklenen hasarın altında ya da üzerinde kalan beklenen kârı ifade etmektedir.

Sigortacılar da aynı ilkeyi, farklı bir bakış açısı ile ele almaktadır. Sigorta primleri, beklenen hasar ve bir “yükleme” miktarının toplamı olarak ele alınmaktadır. Beklenen hasarlar, aynı veri kümesinin ve

analizlerin kullanılması koşuluyla, her iki piyasada da aynı şekilde tanımlanmaktadır. Sigortacılıkta kullanılan “yükleme” terimi ise “beklenen artık getiriye” karşılık gelmektedir.

1998 yılındaki fiyatların değerlendirilmesi sonucu elde edilen sonuçlara ve LFC'nin (Lane Financial Corporation) kübik risk fiyatlandırma modeline dayanarak, “beklenen artık getiri” için Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonuna oldukça benzeyen bir fonksiyon kullanılmaktadır. LFC, CEL ve PFL arasındaki ödünleşimi yakalamak için Cobb-Douglas fonksiyonunu önermiştir:

$$EER = \gamma (PFL)^\alpha (CEL)^\beta$$

EL, CEL ve PFL bileşenleri arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir [10]:

$$EL = E[L|L > 0]Pr(L > 0) + E[L|L = 0]Pr(L = 0)$$

$$EL = E[L|L > 0]Pr(L > 0)$$

$$EL = CEL \times PFL$$

$$CEL = EL \div PFL$$

## 5. Uygulama

### 5.1. Verinin derlenmesi

Çalışmanın bu bölümünde, TÜİK'ten (2008) alınan, Türkiye nüfus sayım verileri kullanılmıştır. Ham veri, cinsiyet ayrımında ve beşerli yaş grubundaki il ve ilçe bazlı genel nüfus sayımları biçiminde derlenmiştir. Verinin güvenilirliğini artırmak amacıyla 85 yaş ve üzeri verinin kullanılmasından kaçınılmıştır.

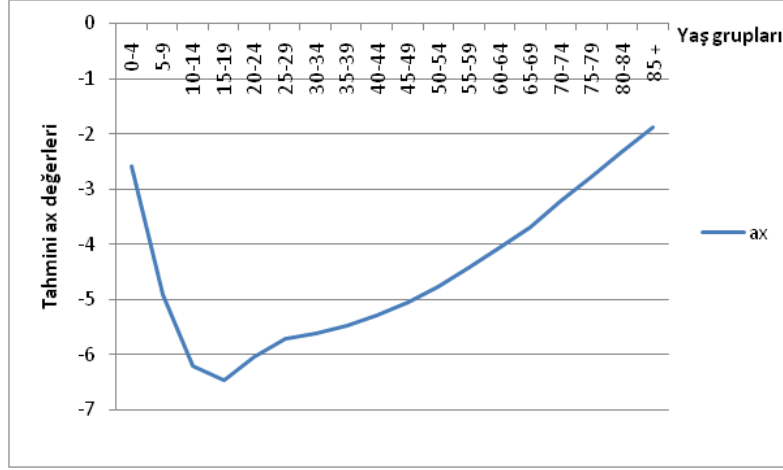
ADNKS ile yapılan 2000 yılı sonrası nüfus sayımları önceki dönemlerin çok üzerinde beklenen yaşam süresi sonuçları üretmiştir. Bu nedenle 2000 yılı sonrası nüfus sayım verisinin kullanılmamasına karar verilmiştir.

Çalışmada ölümlülük göstergelerine dayanan finansal bir türev ürün fiyatlandırması yapılacağından tek bir ölümlülük endeksine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle cinsiyet ayrımındaki ham veri ağırlıklandırılarak 1938-1995 yıllarına ilişkin, beşerli yaş gruplarından oluşan ortak ölümlülük hızları elde edilmiştir. Ağırlıklar, cinsiyet ayrımında bulunan her bir yaş grubundaki kişi sayısının, o yaşta hayatta olan toplam kişi sayısına bölünmesi ile elde edilmiştir. Elde edilen ağırlıklar cinsiyet ayrımındaki ölüm hızları ile çarpılmış ve ağırlıklandırılmış ölüm hızları toplanarak, endeksin ilgili yaş grubundaki değeri elde edilebilmiştir.

### 5.2. Ölümlülüğün Lee-Carter yöntemi ile modellenmesi

Çalışmanın bu bölümünde, verdiği sonuçlar açısından en başarılı olasılıksal modellerden biri olarak ifade edilen LC modelinin Türkiye verisine uyarlanması amaçlanmıştır. Veri seti olarak 1938-1995 yıllarına ilişkin Türkiye ölümlülük endeksi kullanılmıştır. Yapılan uygulamada Microsoft Excel yazılımından faydalanılmıştır.

Ölümlülüğün yaşa özel, takvim yılından bağımsız örüntüsü olan  $\hat{a}_x$  değerleri Şekil 4'te gösterilmiştir.

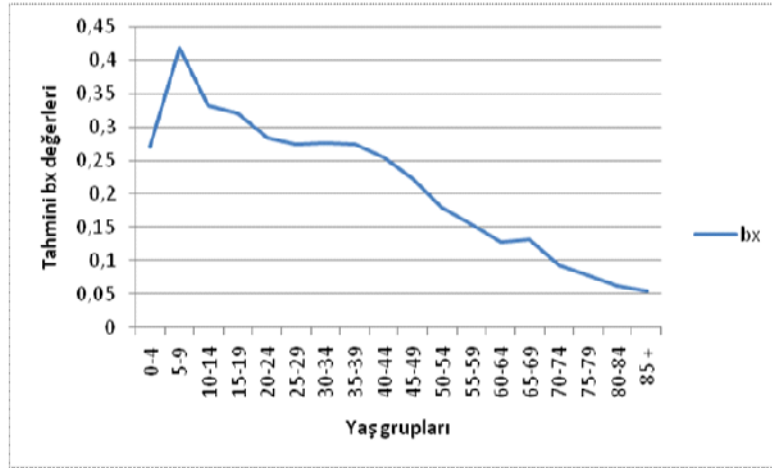


Şekil 4. Türkiye ölümlülük endeksine ilişkin  $\hat{a}_x$  değerleri

Şekil 4'te verilen  $\hat{a}_x$  değerleri incelendiğinde, ölümlülüğün 0 yaşından 10-14 yaş grubuna kadar beklendiği gibi azaldığı, daha sonrasında ise artan bir seyir izlediği görülmektedir.

Yıllara göre değişmekte olan ölümlülüğün yaşa özel örüntüsünü ifade eden  $b_x$  ve ölümlülüğün yıllara göre değişimini gösteren  $k_t$  parametrelerinin kestirimi için logaritmik ölüm hızları matrisinden  $\hat{a}_x$  vektörü çıkarılmış ve elde edilen matrise Lee ve Carter'ın özgün çalışmalarında kullanmış oldukları *TDA yöntemi* uygulanmıştır. Bu ayrıştırma işlemi için Microsoft Excel programına eklenti olarak hazırlanan Biplot yazılımından yararlanılmıştır.

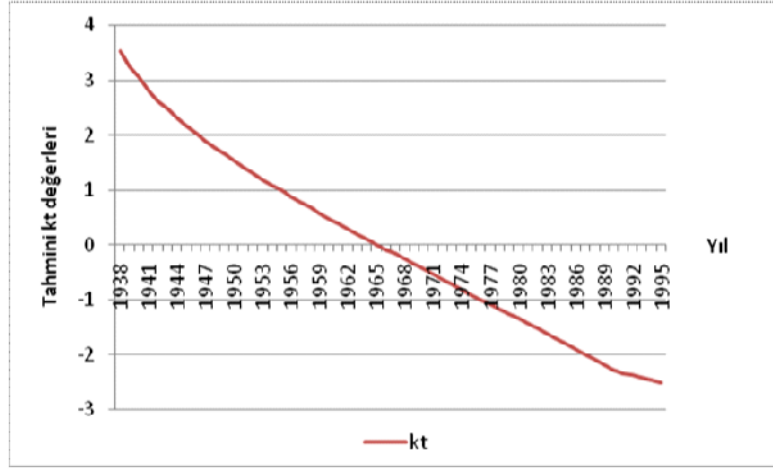
Endekse ilişkin  $b_x$  kestirim değerleri ( $\hat{b}_x$ ), Şekil 5'de gösterilmiştir.



Şekil 5. Türkiye ölümlülük endeksine ilişkin  $\hat{b}_x$  değerleri

Ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişiminin hangi yaşa, ne oranda yansıdığını ifade eden  $\hat{b}_x$  parametresi sonuçları incelendiğinde, negatif bir değerle karşılaşılmadığı görülmektedir. Bu durum ölümlülüğün tüm yaşlar için azalmakta olduğuna işaret etmektedir. Buna göre ölümlülüğün azalan yapısının, gelecek yıllarda en çok 1-4 yaş grubundaki nüfus üzerinde etkili olacağı ve bu yaş grubunda ölümlülüğün daha hızlı bir şekilde azalacağı söylenebilir. Diğer taraftan ilerleyen yaşlarda azalan bir yapıya sahip olan  $\hat{b}_x$ , ölümlülükteki bu iyileşmenin yaşlar arttıkça etkisini yitireceğine işaret etmektedir.

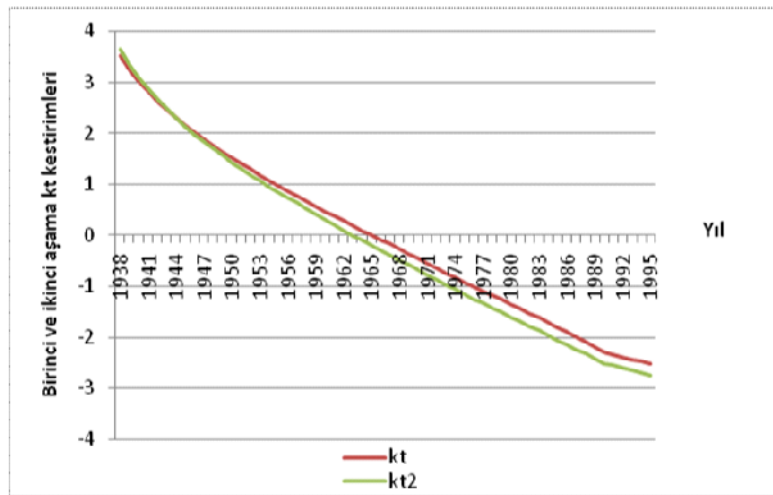
LC modelinde ölüm hızı göstergesi olan  $k_t$ , tüm yaşlar için ölüm hızlarının yıllar boyunca gerçekleşen değişimini göstermektedir. TDA yöntemi ile elde edilen ilk aşama  $k_t$  kestirim değerleri ( $\hat{k}_t$ ) Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6. Türkiye ölümlülük endeksine ilişkin  $\hat{k}_t$  değerleri

Ölümlülükün yıllar içerisindeki gelişimini ifade eden  $\hat{k}_t$  parametresinin ilk aşama kestirim değerleri, Türkiye nüfusu için ölümlülükün azalan bir yapıda olduğunu göstermektedir. Elde edilen seride dönemsel iniş ya da çıkışların bulunmaması, ham veriden birer yıl aralıklı nüfus büyüklüklerinin elde edilebilmesi için kullanılan regresyon modellerinden kaynaklanmaktadır.

LC yöntemi hesaplamalarında, logaritması alınan değerler kullanıldığından elde edilen parametreler ile gözlemlenen ölüm sayıları arasında farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle  $k_t$  vektörüne ikinci aşama kestirimi uygulanmıştır.  $\hat{k}_t$  değerleri ile yeniden kestirimi yapılmış  $k_t$  değerleri ( $\hat{k}_2$ ) Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. Türkiye ölümlülük endeksine ilişkin  $\hat{k}_t$  ve  $\hat{k}_2$  kestirim değerleri

Grafik incelendiğinde  $\hat{k}_2$  ikinci aşama kestirim değerlerinin, ilk aşama kestirim değerlerine benzer bir yapı göstermekle birlikte, ilerleyen yaşlarda değişim gösterdiği gözlemlenmektedir. Buna göre ileri yaşlarda Türkiye ölümlülük yapısında meydana gelen düşüşün, ilk aşama kestirim değerlerinin öngördüğünden daha az olduğu söylenebilir.

### 5.2.1. $k_t$ 'nin modellenmesi

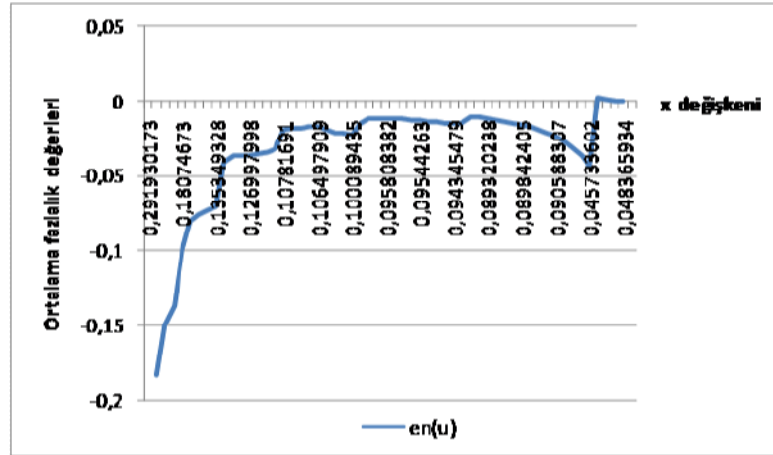
Bu bölümde Lee ve Carter (1992) tarafından ölümlülük endeksi olarak da adlandırılan, ölümlülük göstergesi  $k_t$ 'nin gelecekteki dağılımının kestirimi elde edilmeye çalışılmıştır. Lee ve Carter (1992),  $k_t$ 'nin driftli rasgele yürüyüş modeli ile modellenmesini önermiştir.

Geleneksel modeller, genellikle, merkezi bölgelerde veriye iyi uyum sağlarken, kuyruk kısımlarına iyi uyum sağlamamaktadır. Ayrıca geçmiş gözlemlerden faydalanılarak dağılımın kuyruk kısmını oluşturan uzun ömürlülük riskine ilişkin yeterli veriye de ulaşamamaktadır. Bu nedenle sağ kuyrukta yer alan ileri yaş ölümlülük göstergelerinin modellenmesinde, güvenilir tahminler elde edilmesini sağlayan UDK'dan faydalanılmıştır.

$k_t$  vektöründeki küçük değişimleri modellemek için Lee ve Carter (1992) tarafından önerilen sabit terimli rasgele yürüyüş modelinden faydalanılırken, dağılımın kuyruk kısmının modellenmesinde ise Pickands-Balkema-de Haan Teoremi'ne göre GPD kullanılmıştır.

Parametre tahminleri R yazılımı kullanılarak elde edilmiştir.

Ortalama fazlalık grafiği  $u$  eşik değerini belirlemede en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemde göre  $X$  rastlantı değişkeninin GPD'ye uyması durumunda  $u$  eşik değerinin üzerinde kalan ortalama fazlalık grafiğinin  $u$ 'nun doğrusal bir fonksiyonu olması beklenmektedir.  $X$  değişkenine ilişkin ortalama fazlalık grafiği incelendiğinde  $u$  eşik değerinin 0,091278623 değeri ile 0,047917707 değeri arasından seçilmesi gerektiği görülmektedir.



Şekil 8. Ortalama fazlalık grafiği

Birinci dereceden farkı alınmış  $\hat{k}_{t_2}$  değerleri  $u$  eşik değerinin 91 ve 96. yüzdeler arasında olması gerektiğini göstermektedir. Literatürde 90 ve 95. yüzdeler  $u$  eşik değerinin seçiminde en sık tercih edilen aralıklardır [15]. Bu nedenle literatüre bağlı kalınmış, eşik değer seçiminde 90 ve 95. yüzdeler arası tercih edilmiştir.

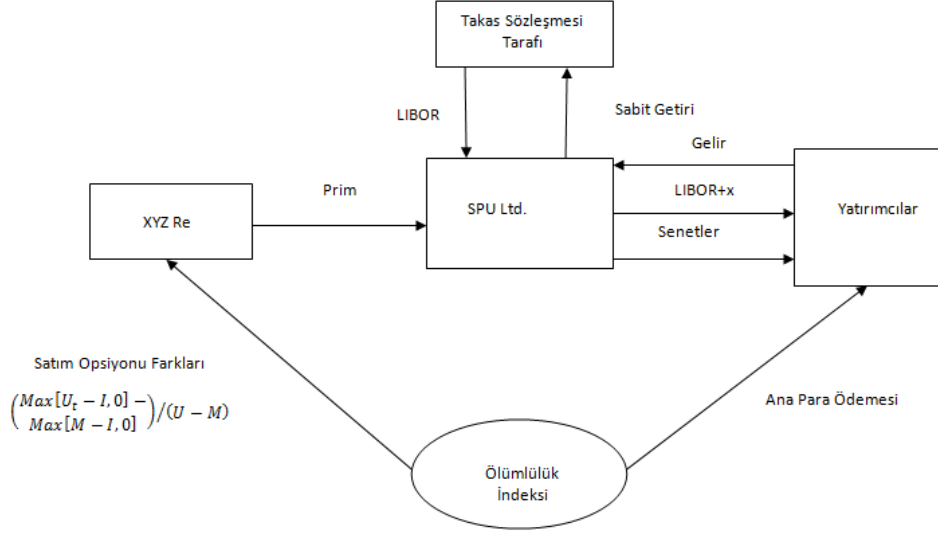
R programında hesaplanan en çok olabilirlik tahmin edicileri Çizelge 5.1'de verilmiştir. Optimal parametreler  $u = 0,2076719$  eşik değeri için hesaplanmıştır.

Çizelge 1. Optimal parametre tahminleri

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\theta}$
-0,1155695	0,04591285	0,03636742	1,04027014

### 5.3. LFC'nin kübik risk fiyatlandırma modeli ile uzun ömürlülük bonosunun fiyatlandırılması

Bu bölümde CAT bono fiyatlandırma yaklaşımı ile hipotetik bir uzun ömürlülük bonosu fiyatlandırılacaktır. Fiyatlandırılmaya çalışılan bono Chen ve Cummins (2009) tarafından önerilen uzun ömürlülük bonosuna benzer bir nakit akışına sahiptir. Bu bono XYZ Reasürans Şirketi (XYZ Re) tarafından çıkarılmaktadır. Ürünün potansiyel alıcıları annüite ve bireysel emeklilik ürünleri satan sigorta şirketleridir. Şirket ile bonoyu satın alan yatırımcılar arasındaki nakit akışı şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.



**Şekil 9.** Uzun ömürlülük bonosu

Buna göre XYZ Re nominal değeri 400 bin TL olan uzun ömürlülük bonosunu çıkarmaktadır. Bono uzun ömürlülük riski üzerine yazıldığından, bononun potansiyel alıcılarının riski ölüm oranlarının düşmesidir. XYZ Re her yıl nominal değerinin LIBOR+*x*'i kadar kupon ödemesi yapmayı taahhüt etmektedir. Bunun karşılığında ölüm oranları *U* seviyesinin altına düştüğünde, ölüm oranları *M* seviyesine ulaşana dek anaparanın belirli bir kısmına el koyma hakkına sahip olacaktır. Ölüm oranları *M* seviyesinin de altına düşecek olursa, XYZ Re anaparanın tamamına hak kazanacaktır. Dolayısıyla anapara ölümülük riskine maruz kalmaktadır ve Türkiye ağırlıklandırılmış ölümülük endeksine bağlı olarak ifade edilmektedir.

XYZ Re'nin bakış açısından, bonodan elde edilen teknik kazançlar düşük kullanım fiyatı  $M = 0,55 I_0$  ve başlangıç yüksek kullanım fiyatı da  $U = 0,9 I_0$  olan satım opsiyonları farkı şeklinde olacaktır.  $I_0$ , bononun çıkarıldığı anda gözlemlenen ölümülük endeksini göstermektedir.

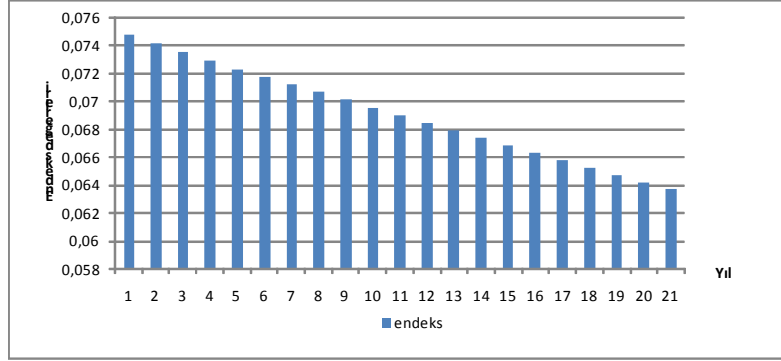
Bono anapara miktarı, ölümülük endeksi yüksek kullanım fiyatının altına düştüğü andan itibaren azalmaya başlayacaktır. Bu durumda *t* yılına ilişkin hasar oranı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\text{Hasar Oranı} = \frac{\max(U_t - I_t, 0) - \max(M - I_t, 0)}{U - M}$$

*t* yılına ilişkin yüksek kullanım oranının, ölümülük endeksindeki değişime bağlı olarak  $U_t = \min(U_{t-1}, I_{t-1})$  şeklinde her yıl yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Bononun vadesinin 20 yıl olduğu varsayılmıştır. Buna göre bono; yüksek kullanım fiyatı olan  $U_t$ , 20 yıldan daha az bir süre içerisinde düşük kullanım oranı olan *M*'ye ulaşırsa ya da maksimum 20 yıllık vadenin bitiminde sona erecektir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında ölümlülük endeksinin simülasyonu yapılmış ve risk primi, LFC'nin kübik risk modelini kullanarak R yazılımı yardımı ile hesaplanmaya çalışılmıştır.

Simule edilmiş ölümlülük endeksi değerleri Şekil 10'da gösterilmiştir. Buna göre ölümlülük endeksinin 0,076 ile 0,063 değerleri arasında yer aldığı görülmektedir. Orjinal Türkiye ölümlülük verilerinin modellenmesi ile bulunan parametrelerden elde edilen ölümlülük endeksinin azalan bir hızla, düzgün bir şekilde azaldığı görülmektedir.



Şekil 10. Simule edilmiş ölümlülük endeksi

XYZ Re'nin teknik kazançlarına Şekil 11'de yer verilmiştir. Grafik incelendiğinde; başlangıçta herhangi bir kazanç elde edilemezken, ölümlülük endeksindeki düşüşe bağlı olarak birikimli teknik kazançların da düzgün bir şekilde arttığı gözlemlenmektedir.



Şekil 11. Simule edilmiş teknik kazançlar

Türkiye'de katastrofik bonolara ilişkin güvenilir bir fiyat serisi olmadığından, Chen ve Cummins (2009) tarafından  $CEL$  ve  $PFL$  arasındaki ödünleşimi yakalamak için kullanılan  $EER = \gamma (PFL)^\alpha (CEL)^\beta$  Cobb-Douglas fonksiyonunun regresyonundan elde edilen parametre tahminleri veri olarak kullanılmıştır. Tahmin değerleri Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. Parametre tahminleri (Chen ve Cummins, 2009)

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$R^2$
0,4138	0,0942	0,3016	%67

Yineleme sonucu elde edilen  $EL$ ,  $PFL$ ,  $CEL$  değişkenleri ve  $x$  faiz oranı Çizelge 3'te gösterilmektedir. Yineleme;  $U$  seviyesi,  $l_0$  oranının 0,9 ve 0,85 katı;  $M$  seviyesi ise  $l_0$  oranının 0,55 ve 0,50 katı olacak

biçimde tekrarlanmıştır. Elde edilen  $x$  faiz oranlarının ortalaması 0,236844 ve medyanı ise 0,212462 olarak hesaplanmıştır. Ortalama ve medyan değerlerinin birbirine yakın çıkması bulunan sonuçların tutarlı olduğuna işaret etmektedir.

**Çizelge 3.** Fiyatlandırma sonuçları (1)

U	M	EL	PFL	CEL	x
0,9	0,55	0,06904575	0,5566667	0,125448	0,263251
0,85	0,55	0,06902551	0,2257143	0,365343	0,212462
0,85	0,5	0,06917293	0,2042857	0,384522	0,208581
0,9	0,5	0,06913593	0,5547619	0,126538	0,263081

Çizelge 4'te ise özgün  $U$  ve  $M$  değerleri için yineleme sayısı sırasıyla 100, 500 ve 1000 olacak biçimde değiştirilmiştir. Elde edilen  $x$  faiz oranlarının ortalama ve medyan değerleri 0,2624632 olarak hesaplanmıştır. Yineleme sayısı artırıldıkça  $x$  faiz oranının daha kararlı bir yapıya ulaştığı gözlemlenmektedir.

**Çizelge 4.** Fiyatlandırma sonuçları (2)

U	M	EL	PFL	CEL	x
0,9	0,55	0,06904575	0,5566667	0,125448	0,263251
0,9	0,55	0,06910451	0,5511429	0,127061	0,2626794
0,9	0,55	0,06913811	0,5470476	0,1281458	0,262247

## 6. Sonuç ve öneriler

Sigorta şirketleri; insanları karşılaşılabilecekleri finansal risklerden korumak amacıyla kurulmuş olsalar da, şirketlerin kendileri de çeşitli riskler ile karşı karşıyadırlar. Uzun ömürlülük riski de bu risklerden biridir.

ART, uzun ömürlülük riski problemine bir sermaye piyasası çözümü sunmaktadır. Böylece sigorta şirketleri teminat altına aldıkları katastrofik riskleri, ölümlülük riski üzerine yazılmış bonolar yardımı ile başarılı bir şekilde finansal piyasalara transfer edebilmektedirler. Ölümlülüğün menkul kıymetleştirilmesi katastrofik risklerin finansal piyasalara aktarılmasına olanak tanıdığından, hayat sigortası endüstrisinin risk kabul kapasitesini artırmaktadır.

Bu çalışma ölümlülük endeksini bir sıçrama süreci (jump process) olarak modelleyerek geliştirilebilir. Ölümlülük endeksinin kararlı dağılımlara uyumu da incelenebilir. Esscher ilkesi finansal ve aktüeryal fiyatlandırma ilkeleri arasında bir köprü kurmaktadır. Bu nedenle fiyatlandırma işlemleri Esscher ilkesine göre yapılarak, bu çalışmada bulunan sonuçlar ile performans karşılaştırması yapılabilir. Ayrıca fiyatlandırma işlemleri denge fiyatlandırma modeli ve martingale yaklaşımları da gözönüne alınarak değerlendirilebilir.

## Kaynaklar

- [1] Blake, D., Burrows, W., 2001, Survivor bonds: Helping to hedge mortality risk, *Journal of Risk and Insurance* 68 (2), pp 339-348.
- [2] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., 2005, Pricing frameworks for securitization of mortality risk. *Working Paper*, Heriot-Watt University, Edinburgh, UK.
- [3] Chen, H., Cummins, J.D., 2009, Longevity bond premiums: The extreme value approach and risk cubic pricing, *Insurance: Mathematics and Economics* 46, pp 150-161.



- [4] Cummins, J.D., 2004, Securitization of life insurance assets and liabilities, Submitted to TIAA-CREF Institute.
- [5] Denuit, M., Devolder, P., Goderniaux, A., 2007. Securitization of longevity risk: Pricing survivor bonds with wang transform in the Lee\_Carter framework, *Journal of Risk and Insurance* 74 (1), pp 87-113.
- [6] Gilli, M., Kellezi, E., 2000, Extreme Value Theory for Tail-Related risk measures.
- [7] Haberman, S., Russolillo, M., 2005, Lee-Carter mortality forecasting: application to the Italian population, *Actuarial Research Paper*, No:167.
- [8] Koissi, M-C, Shapiro, A., Högnas, G., 2004, Fitting and forecasting mortality rates for Nordic countries using Lee-Carter method, Department of Mathematics, Abo Academy University, Finland.
- [9] Lane, M.N., Movchan, O.Y., 1999, Risk cubes or price, risk, and ratings (Part II). *Journal of Risk Finance* 1 (1), pp 71-86.
- [10] Lane, M.N., 2000, Pricing risk transfer transactions, *Astin Bulletin International Actuarial Association*, Vol:30, No:2, pp 259-295.
- [11] Lee, R.D., Carter, L.R., 1992, Modelling and forecasting U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, No:419, pp 659-675.
- [12] Lin, Y., Cox, S.H., 2007, Longevity risk, rare event premia and securitization. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1070421>.
- [13] McNeil, A., 1997, Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *ASTIN Bulletin* 27, pp 117\_137.
- [14] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., Olivieri, A., 2009, Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business, Oxford University Press.
- [15] Sanders, D.E.A., 2005, The Modeling of Extreme Events, *British Actuarial Journal* 11 (3), pp 519-572.