

Poisson log-bilineer yaklaşımıyla Lee-Carter modellemesi ve Türkiye Uygulaması

Selim Demircioğlu

T. Vakıflar Bankası T.A.O.
İnsan Kaynakları Başkanlığı
Kağıthane, İstanbul

Selim.DEMIRCIOLU@vakifbank.com.tr

Murat Büyükyazıcı

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800 Beytepe, Ankara

muratby@hacettepe.edu.tr

Özet

Bu çalışmanın amacı, Türkiye yaşa özel ölüm hızlarının Lee-Carter modeli parametrelerini tekil değer ayrışımı yöntemi ile ve bu yöntem seçenik olarak geliştirilen Poisson Log-Bilineer yaklaşımıyla tahmin etmek ve her iki yaklaşımla elde edilen model parametrelerini ve ölüm hızı değerlerini karşılaştırmaktır. Her iki cinsiyet için 1937-1995 yılları arası ölüm hızları, ölüm sayıları ve riske maruz değerler “Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi” kapsamında belirlenmiş olan model hayat tablosu seviyelerine uygun olarak içdeğerleme yöntemi ile elde edilmiştir. Türkiye yaşa özel ölüm hızlarının her iki yaklaşım ile elde edilen 20 yıllık öngörülerini karşılaştırılmış ve az da olsa farklı sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Lee-Carter modeli; Poisson log-bilineer yaklaşımı; Model hayat tabloları; Ölüm hızları; Ölüm sayıları; Riske maruz değerler.

Abstract

Poisson log-bilinear approach to Lee-Carter modelling and application for Turkish mortality

The aim of this study is to estimate parameters of Lee-Carter model to age-specific death rates by gender in Turkey with both singular value decomposition method and Poisson Log-Bilinear regression approaches and to compare model parameters and death rates which are calculated with these two approaches. For the years between 1937 and 1995, mortality rates, death counts and exposures for both sex have been obtained from the model life table level result of “The Project of Turkish Life and Life Annuity Tables” by using interpolation techniques. Forecasted age-specific death rates by gender in Turkey for 20 years are compared and assessed.

Keywords: Lee-Carter model; Poisson log-bilinear approach; Model life tables; Death rates; Death counts; Exposures.

1. Giriş

Ölüm hızının zamanla azalması, bireyler için olumlu bir değişiklik ve azımsanmayacak önemde sosyal bir başarı olarak görülebilir; ancak, özel hayat annüite ürünlerinin ve kamu emeklilik sistemlerinin planlanmasını tehdit eder. Aslında, sadece emeklilik sistemi değil, sosyal güvenlik sisteminin yaşlılık bakım hizmeti gibi tüm bileşenleri de ölüm hızının değişimi tarafından etkilenir. Benzer olarak, özel şirketler tarafından satılan diğer sigorta ürünleri de uzun ömürlülükteki artıştan etkilenmektedir.

Geçmişten bugüne ölüm hızlarının yapısının tahmini ve gelecekteki ölüm hızının öngörüsü için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Ölümlülüğü bir eğri ile uyumlaştırma çalışmaları, 19. yüzyılda Gompertz'in

“Law of Mortality” çalışmasına kadar eskiye dayanmaktadır. Bu eski denemelerde ölümlülük eğrisi erken yaş, orta yaş ve ileri yaş ölümlülüğü olacak biçimde parçalanarak sadece yaş boyutu dikkate alınarak uyumlaştırılmaya çalışılmıştır [1]. Geçtiğimiz yirmi yıl içerisinde geliştirilen modellerde ise yaş boyutunun yanında yıllar içerisinde değişen ölümlülük yapısı da dikkate alınabilmektedir.

Lee ve Carter [2] tek bir zaman indeksinin fonksiyonu olan, ölümlülükteki uzun dönem değişimlerini tanımlamayı amaçlayan, basit bir model önermiştir. Model, yaşa özel ölüm hızlarının logaritmaları ile tanımlanır ve iki terimin toplamından oluşmaktadır. İlk terim, zamandan ve diğer bileşenlerden bağımsız sadece yaşa özel bir bileşendir. İkinci terim ise, ölümlülüğün zamana göre genel seviyesi ile zaman içerisinde farklı yaşlarda ölümlülük değişiminin ne kadar hızlı ya da ne kadar yavaş olduğunu belirten katsayısının çarpımından oluşan bileşendir. Model parametreleri geçmiş veri kullanılarak tahmin edilir. Zamana göre değişen genel ölümlülük düzeyi tahminleri, standart Box-Jenkins yöntemi kullanılarak öngörülür. Daha sonra, öngörülecek olan ölüm hızları, elde edilen katsayılar kullanılarak türetilir.

Lee ve Carter'da [2] kullanılan ana istatistiksel gereç tekil değer ayrışımı (TDA) ile yapılan en küçük kareler (EKK) yöntemidir. Bu yöntem, hataların sabit varyanslı (homoscedastic) dağıldığı varsayımını içerir. Bu varsayım neredeyse gerçek dışıdır. Çünkü, gözlenen ölüm hızlarının logaritmaları, yaşlılarda gençlere oranla çok daha değişkendir. Bu değişkenliğe sebep olan etmen, ileri yaşlardaki gerçekleşen ölüm sayılarının çok daha az olmasıdır. Brouhns ve diğerleri [3, 4] ve Renshaw ve Haberman [5, 6] bu eksikliği giderebilmek için ölümlülüğü tahmin edecek modeli oluştururken değişen varyanslı (heteroscedastic) Poisson hatalarına dayalı seçenek yöntemler geliştirmişlerdir.

TDA hesaplamalarında kullanılacak verinin dikdörtgensel matris şeklinde olması zorunluluğu, klasik Lee ve Carter ölümlülük modellemesindeki bir diğer eksikliği ortaya çıkarır. Eğer tarihsel veride bazı değişiklikler yapılmışsa bu zorunluluk bir soruna dönüşebilir. Brouhns ve diğerleri [3, 4] ve Renshaw ve Haberman'ın [5, 6] önerdiği yöntemlerde böyle bir eksiklik yoktur. Ancak, tahmin aralıkları bu yöntemlerde de darlığını korumaktadır. Bu durum, Lee ve Carter ölümlülük modellemelerinin genel bir özelliğidir [6].

Bu çalışmada da tıpkı Wilmoth [7], Alho [8], Brouhns ve diğerleri [3, 4], Renshaw ve Haberman [5, 6] ve Delwarde ve diğerlerinde [9] olduğu gibi güçlü klasik Lee ve Carter modellemesi için bazı mümkün iyileştirmelerin, ilgili tarihsel veriye uygulanması hedeflenmiştir. Uygulanan bu iyileştirmelerden en önemlisi, klasik lineer model yapısının genelleştirilmiş lineer model yapısına çevrilmesidir. Bu uygulanırken ölüm sayıları Poisson olarak modellenir. Poisson dağılımı ölümlülük modellemelerinde çok iyi sonuç verir [10]. Ölüm sayılarının Poisson olarak modellenmesi, ölümlülük modelleri tahmininde Renshaw ve Haberman [6] ve Sithole ve diğerleri [11] tarafından başarıyla uygulanmıştır. Uygulanan bu değişiklikler, modeli sezgisel olarak daha da kabul edilebilir kılar.

Bu çalışmada da ölüm sayıları Poisson olarak modellenmiş, en çok olabilirlik (EÇO) yöntemi ile parametre tahmini yapılmıştır. Parametre tahminleri yapılırken piyasadaki istatistiksel paket programlar, modelin bilineer yapısından dolayı kullanılamamaktadır. Dolayısıyla EÇO yöntemi ile parametre tahmininin yapılabilmesi için, basit Newton algoritmasını içeren LEM [12] programı kullanılmıştır. Parametre tahminleri yapıldıktan sonra, klasik Lee ve Carter modellemesindeki gibi Box-Jenkins teknikleri ile gelecekteki ölüm hızları öngörülür.

2. Klasik Lee-Carter modeli

Klasik Lee-Carter modeli, x yaş grubu ve t takvim yılı değişkenlerine sahip basit bir bilineer modeldir. Bu model,

$$\ln(\mathbf{m}_{x,t}) = \mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \mathbf{k}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{x,t} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\sum_t \mathbf{k}_t = \mathbf{0} \text{ ve } \sum_x \mathbf{b}_x = \mathbf{1} \quad (2)$$

kısıtlarına sahiptir. Burada,

$\mathbf{m}_{x,t}$: x yaşı ve t yılı için ölüm hızıdır,

\mathbf{a}_x : yaşa özel ortalama ölümlülük yapısını,

\mathbf{k}_t : zamana bağlı genel ölümlülük düzeyini temsil eder.

\mathbf{b}_x : Zamana bağlı genel ölümlülük düzeyindeki değişimin x yaş grubuna özel motifini verir. Yani, ölümlülüğün genel düzeyinin değişiminde x yaş grubundaki ölüm hızının logaritmasının duyarlılığını belirtir. Prensipite, \mathbf{b}_x bazı yaş gruplarında negatif olabilir. Bu, ölümlülüğün, diğer yaş gruplarında azalırken o yaş grubunda arttığını anlatır. Fakat bu durum uzun veri setlerinde genelde gözlenmez [3].

$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,t}$: Ortalaması sıfır ve sabit varyansa sahip olan hata terimidir. Model tarafından yakalanamayan tarihsel etkiyi yansıtır [3].

Zaman bileşeni \mathbf{k}_t , ölüm hızlarının logaritmalarının zaman içerisindeki genel değişimini göstermektedir. Oysa ki, ölüm hızlarında gerçekleşen genel değişimin tüm yaşlar için aynı oranda olması beklenemez. Örneğin, genelde 50 yaş ve üzeri insanlarda rastlanan ve ölümcül olan pankreas kanseri hastalığının tedavisinin keşfi, yaşlı ölüm hızlarında büyük bir düşüşe sebep olabileceken, çocuk ölümlülüğünde bir değişime neden olmayabilir. Dolayısıyla ölümlülüğün genel seviyesinde gerçekleşebilecek herhangi bir düşüşün her yaşa etkisi farklı olacaktır. Bu değişimlerin etkisinin her yaş grubuna ayrı tanımlanmasını sağlayan \mathbf{b}_x parametresidir. \mathbf{a}_x parametresiye, her yaş grubu için yıllar üzerinden ortalama alınarak bulunan, dolayısıyla t indisinden arındırılan, yaşa özel ölümlülük düzeyidir. $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$ varyanslı ve sıfır ortalamalı olduğu kabul edilen $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,t}$ hata terimleri ise model tarafından yakalanamamış artık değerleri temsil eder.

2.1. Model parametrelerinin en küçük kareler yöntemi ile tahmini

Eş.1.'in sağ tarafında hem \mathbf{a}_x , \mathbf{b}_x parametrelerinin hem de \mathbf{k}_t ölümlülük indeksinin, gözlenmiş değerler yerine, tahmin edilmesi gereken parametreler şeklinde yer almasından dolayı basit regresyon yaklaşımıyla sonuç elde edilemez. Ancak, *tekil değer ayrışımı*(TDA)ile yapılan en küçük kareler (EKK) yöntemi model parametrelerinin bulunmasında kullanılabilir. Yani,

$$\sum_{x,t} (\ln(\widehat{\mathbf{m}}_{x,t}) - \mathbf{a}_x - \mathbf{b}_x \mathbf{k}_t)^2 \quad (3)$$

fonksiyonunu minimize ederek parametrelerin tahmin değerlerinden oluşan $\widehat{\mathbf{a}}_x$, $\widehat{\mathbf{b}}_x$ ve $\widehat{\mathbf{k}}_t$ vektörleri bulunur. $\ln(\mathbf{m}_{x,t})$ matrisinde zaman boyutu üzerinden ortalama alınarak elde edilen \mathbf{a}_x vektörünün, $\ln(\mathbf{m}_{x,t})$ matrisinden çıkartılarak oluşturulan $\mathbf{Z} = [\ln(\mathbf{m}_{x,t}) - \mathbf{a}_x]$ matrisine TDA yöntemi uygulanırsa, EKK yöntemi ile parametre tahmini yapılmış olur [13].

TDA, Golub ve Kahan [14] tarafından tanıtılmıştır. Bu yöntemde bir \mathbf{A} matrisi,

$$\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{U}_{mm} \mathbf{S}_{mn} \mathbf{V}'_{nn}$$

şeklinde üç ayrı matrisin çarpımı olarak yazılmaktadır. Burada,

U : Ortogonal bir matristir. Sütunları AA' matrisinin ortonormal özvektörlerinden oluşur.

V :Diyagonal bir matristir. Sütunları $A'A$ matrisinin ortonormal özvektörlerinden oluşur.

S :Diyagonal bir matristir. U ya da V matrislerinin özdeğerlerinin kareköklerini azalan sırada içerir.

Ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişiminden bağımsız olan a_x parametresi, modelde kullanılan her yaş ya da her yaş aralığı için tüm yılların logaritmik ölüm hızlarının ortalamalarının alınması ile Eş.(4)'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\widehat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t}) \quad (4)$$

Modeldeki diğer parametrelerin bulunabilmesi için,

$$Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \widehat{a}_x,$$

$$Z_{x,t} = \begin{bmatrix} Z_{x_1 t_1} & \cdots & Z_{x_1 t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{x_A t_1} & \cdots & Z_{x_A t_n} \end{bmatrix},$$

matrisi üzerinde işlemler yapılır. Ancak, denklem sisteminin tek bir çözüm verebilmesi için,

$$\sum_x b_x^2 = 1 \quad (5)$$

$$\sum_t k_t = 0 \quad (6)$$

ölçütlerinin de dikkate alınması gerekir.

$Z_{x,t}$ matrisinin, k_t ve b_x vektörlerine ayrıştırılabilmesi için Lee ve Carter [2], iki aşamalı bir kestirim yöntemi önermişlerdir. Bu yöntemde göre ilk olarak, $Z_{x,t}$ matrisi TDA yöntemi ile b_x ve k_t değerlerine ayrılır. Daha sonra, k_t değerlerini daha duyarlı hale getirebilmek için ikinci aşama kestirim kullanılır. TDA ile yapılan ilk aşama kestirim, ölüm hızlarının kendileri yerine logaritmik dönüşümleri ile yapılmış olduğundan, gerçek ölüm sayıları ile tahmin edilen ölüm sayıları arasında ölçülebilir farklar oluşabilmektedir. Modeli gerçekleştiren ölüm sayılarının tamamını yansıatacak düzeye getirebilmek için \widehat{a}_x ve \widehat{b}_x değerleri sabit tutularak \widehat{k}_t parametresi yeniden hesaplanır.

D_{xt} , t yılında gerçekleşen x yaş grubunda gözlenen ölüm sayıları; E_{xt} ise t yılındaki x yaş nüfusu olmak üzere,

$$\sum_x D_{xt} = \sum_x E_{xt} \exp(\widehat{a}_x + \widehat{b}_x \widehat{k}_t) \quad (7)$$

eşitliğini doğrulayacak ikinci aşama kestirim değerleri olan \widehat{k}_t değerleri, basit bir iteratif arama sonucunda bulunabilir.

2.2. Ölümlülük düzeyi k_t 'nin modellenmesi ve Lee-Carter model öngörüsü

Lee-Carter modelinde, verinin modele oturtulmasından ve \widehat{a}_x , \widehat{b}_x ve \widehat{k}_t vektörlerinin elde edilmesinden sonra, modelde öngörü yapılabilmesi için yalnızca k_{t+s} değerlerinin kestirimlerinin yapılmasının yeterli olması, modele üstünlük kazandıran özelliklerden biridir.

Box ve Jenkins [15] zaman serisi modelleme yöntemleri ile ölümlülük indeksi modellenebilir ve geleceğe ilişkin öngörülerde bulunulabilir. Çalışılan veri setinin son takvim yılı t iken, x yaş grubu ve son takvim yılından sonraki s . yıl için Lee-Carter modeli ölüm hızı öngörüsü,

$$\ln(\widehat{m}_{x,t+s}) \approx \widehat{a}_x + \widehat{b}_x \widehat{k}_{t+s} \quad (8)$$

yaklaşımından elde edilebilir.

Lee ve Carter [2], tek değişkenli ARIMA (0,1,0) zaman serileri modelini kullanarak ölüm hızlarının s yıl sonraki öngörü değerlerini hesaplamış, ancak farklı veri setleri için diğer ARIMA modellerinin de tercih edilebileceğini göstermişlerdir. Yapılan uygulamalarda k_t 'nin öngörülmesi için, sabit terimli rastgele yürüyüş modeli en sık kullanılan yöntemdir [16].

3. Poisson log-bilineer yaklaşımıyla Lee-Carter modeli

Brouhns, Denuit ve Vermunt [3], Lee-Carter modelinin sakıncalarını içermeyen bir yaklaşım sunmuşlardır. Bunun için öncelikle, modelin yapısı klasik lineer modelden, genelleştirilmiş lineer modele çevrilmiş; daha sonra da, ölüm sayılarını Poisson dağılımıyla modelleyerek değişen varyanslı hata dağılımına izin veren bir yapı elde edilmiştir.

Modelin yapısı genelleştirilmiş lineer model yapısına dönüştürülürken,

- kolay ifade edilebilir ve kolay yorumlanabilir bir yapı elde etmeyi hem de hata dağılımının herhangi bir etkenden etkilenmesini engelleme,
- modeli hesaplama açısından çok daha kolay hale getirme, bu sayede parametre tahminlerini kolaylaştırma ve ortalama ve varyansı farklı olarak hesaplanabilir hale getirme,
- farklı yöntemlerle (EKK veya EÇO gibi) yapılan tahminlerin aynı sonuçları verdiği hale getirme,

gibi iyileştirmeler hedeflenmiştir [17].

Daha önce de bahsedildiği üzere, TDA ile yapılan EKK yönteminin ana eksikliği hataların sabit varyanslı dağıldığı varsayımdır. Gözlenen ölüm hızlarının logaritmaları ileri yaş gruplarında, gerçekleşen ölüm sayılarının çok daha az olması sebebiyle, daha değişkendir. Bu da sabit olmayan varyanslı bir yapı oluşturur. Söz konusu bu eksikliği giderebilmek, dolayısıyla, değişen varyanslı hata dağılımı yapısına izin verebilmek için ölüm sayıları Poisson olarak modellenir.

Brillinger'e [18] göre; ölüm sayılarının, sayma sayıları rastgele değişkeni olması sebebiyle Poisson dağıldığı varsayımı mantıklı hale gelir. EKK yöntemindeki sorunlarla başa çıkabilmek için ölüm sayıları Eş.(9)'daki gibi modellenmelidir [3]:

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt} m_{x,t}), \quad m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t) \quad (9)$$

Buradaki parametreler yine Eş.(2)'deki kısıtlara sahiplerdir. Ölüm hızları $\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t$ log-bilineer yapısında olup parametrelerin anlamları klasik Lee-Carter modelindeki gibidir.

3.1. En çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini

a_x, b_x ve k_t parametrelerinin tahmini için, TDA ile yapılan EKK yöntemine başvurmak yerine, Eş.(1)'de verilen model üzerinden aşağıdaki log-olabilirlik fonksiyonu maksimize edilecektir [3]:

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = \ln \left\{ \prod_t \prod_x \left(\frac{\widehat{D}_{xt}^{D_{xt}} \exp(-\widehat{D}_{xt})}{D_{xt}!} \right) \right\} = \sum_t \sum_x \{ D_{xt} \ln \widehat{D}_{xt} - \widehat{D}_{xt} - \ln\{D_{xt}!\} \}$$

$$= \sum_t \sum_x \{ D_{xt}(\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \mathbf{k}_t) - E_{xt} \exp(\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \mathbf{k}_t) \} + sbt. \quad (10)$$

Buradaki \widehat{D}_{xt} , x yaş grubu ve t yılı için beklenen ölüm sayısını temsil eder. Yani,

$$\widehat{D}_{xt} = E[D_{xt}] = E_{xt} \exp(\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \mathbf{k}_t) \quad (11)$$

biçimindedir. E_{xt} ise x yaş grubu ve t yılı için riske maruz değeri, yani yaşayan kişi sayısını gösterir.

Modeldeki $\mathbf{b}_x \mathbf{k}_t$ bi-linear teriminin varlığından dolayı, modelin tahmini, piyasadaki Poisson regresyon yapan istatistiksel paket programlar ile mümkün olamamaktadır. Ancak LEM programı [12, 19] bu amaç için kullanılabilir.

LEM programında log-olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmekte kullanılan algoritma tek boyutlu ya da temel Newton olarak bilinen yöntemdir. Goodman [20], bi-linear terime sahip log-linear modelleri tahmin etmekte bu iterasyon yöntemini kullanan ilk kişidir. $\mathbf{v} + 1$. adımda tek bir parametre, diğer parametrelerin o anki değerleri temel alınarak, Eş.(12) dikkate alınarak güncellenir:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(v+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(v)} - \frac{\partial L^{(v)} / \partial \boldsymbol{\theta}}{\partial^2 L^{(v)} / \partial \boldsymbol{\theta}^2}, \quad (12)$$

Buradaki $L^{(v)} = L^{(v)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(v)})$ 'dir. Yani \mathbf{v} . adımda olabilirlik fonksiyonu içerisine güncellenen parametrenin \mathbf{v} . adımdaki değeri yazılır.

Bu uygulamada üç set parametre vardır: \mathbf{a}_x , \mathbf{b}_x ve \mathbf{k}_t terimleri. Güncelleme yapılırken takip edilen adımlar aşağıdaki gibidir ve başlangıç değerleri $\widehat{\mathbf{a}}_x^{(0)} = \mathbf{0}$, $\widehat{\mathbf{b}}_x^{(0)} = \mathbf{0}$ ve $\widehat{\mathbf{k}}_t^{(0)} = \mathbf{0}$ olarak belirlenir:

$$\widehat{\mathbf{a}}_x^{(v+1)} = \widehat{\mathbf{a}}_x^{(v)} - \frac{\sum_t (D_{xt} - \widehat{D}_{xt}^{(v)})}{-\sum_t \widehat{D}_{xt}^{(v)}}, \quad \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+1)} = \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v)}, \quad \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+1)} = \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v)},$$

$$\widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+2)} = \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+1)} - \frac{\sum_x (D_{xt} - \widehat{D}_{xt}^{(v+1)}) \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+1)}}{-\sum_x \widehat{D}_{xt}^{(v+1)} (\widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+1)})^2}, \quad \widehat{\mathbf{a}}_x^{(v+2)} = \widehat{\mathbf{a}}_x^{(v+1)}, \quad \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+2)} = \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+1)},$$

$$\widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+3)} = \widehat{\mathbf{b}}_x^{(v+2)} - \frac{\sum_x (D_{xt} - \widehat{D}_{xt}^{(v+2)}) \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+2)}}{-\sum_x \widehat{D}_{xt}^{(v+2)} (\widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+2)})^2}, \quad \widehat{\mathbf{a}}_x^{(v+3)} = \widehat{\mathbf{a}}_x^{(v+2)}, \quad \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+3)} = \widehat{\mathbf{k}}_t^{(v+2)},$$

Bu algoritmanın durdurma koşulu olarak log-olabilirlik fonksiyonundaki çok küçük artışlar kullanılır (uygulamada daha keskin sonuçların elde edilebilmesi için 10^{-7} değeri kullanılmıştır).

Elde edilen LEM programı çıktıları modelde yerine yazılmadan önce Eş.(2)'deki kısıtlara göre yeniden güncellenmelidir. Bu güncelleştirmeyi yapabilmek için öncelikle $t = 1, 2, \dots, T$ için $\widehat{\mathbf{k}}_T$ değerini LEM programı vermeyeceğinden, bu değeri elde edebilmek adına, Eş.(2) de dikkate alınarak, Eş.(13)'deki işlem yapılır.

$$\widehat{\mathbf{k}}_T = -\sum_{t=1}^{T-1} \widehat{\mathbf{k}}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (13)$$

Daha sonra, her bir $\widehat{\mathbf{b}}_x$ değerinin, $\sum_x \widehat{\mathbf{b}}_x$ değerine oranlanması gerekmektedir. $\widehat{\mathbf{k}}_t$ parametresini güncellemek için de her bir $\widehat{\mathbf{k}}_t$ değerinin, $\sum_x \widehat{\mathbf{b}}_x$ değeri ile çarpılması gerekmektedir. Ayrıca, $\widehat{\mathbf{a}}_x$

parametresi için, yine LEM programının verdiği “*main*” değeri kullanılmalı; her bir \hat{a}_x değeri “*main*” değeri ile toplanmalıdır. Yani kısaca, parametre güncellemeleri için,

$$\hat{a}_x = \hat{a}_x + \mathit{main},$$

$$\hat{b}_x = \hat{b}_x / \sum_x \hat{b}_x,$$

$$\hat{k}_t = \hat{k}_t * \sum_x \hat{b}_x, \quad x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

eşitlikleri kullanılır.

TDA ile yapılmış klasik Lee-Carter yaklaşımından farklı olarak, Poisson regresyonu yaklaşımında hata terimleri doğrudan ölüm sayılarına etkide bulunduğundan dolayı k_t parametresi için Eş.(7)’deki gibi ikinci aşama tahmine gerek yoktur.

3.2. Ölümlülük düzeyi k_t ’nin modellenmesi ve Lee-Carter model öngörüsü

Elde edilen k_t değerleri, klasik Lee-Carter modelinde olduğu gibi Box-Jenkins teknikleriyle modellenerek k_{t+s} değerleri öngörülür. Lee-Carter model öngörüsü de klasik Lee-Carter modellemesindeki yaklaşımla aynıdır.

4. Poisson log-bilineer yaklaşımı ile Türkiye Uygulaması

Bir nüfusa ilişkin geçmiş ölüm hızları, o ülkeye ait tarihi yaşam ve ölüm kayıtlarının incelenmesi ile hesaplanabilir. Türkiye’ye ait yaşam ve ölüm kayıtları T.C. Başbakanlık Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından derlenmekte ve yayımlanmaktadır.

Türkiye nüfusunun sayı ve nitelikleri de TÜİK tarafından periyodik olarak yapılan nüfus sayımları ile belirlenmektedir. Bu sayımlar Cumhuriyet’in ilanından günümüze kadar ilki 1927 yılında, ikincisi 1935 yılında ve 1935 yılından 1990 yılına kadar her beş yılda bir, 1990 yılından sonra ise on yılda bir olmak üzere toplam 14 kez yapılmıştır. Bu sayımlar sırasında ülke çapında sokağa çıkma yasağı uygulanmıştır. En son yapılan 2000 yılı nüfus sayımından sonra 2007 yılında ilk kez sokağa çıkma yasağı olmaksızın “Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi” (ADNKS) uygulamasına geçilmiştir. ADNKS’de kişilerin yerleşim yerlerine göre nüfus bilgileri güncel olarak tutulmakta, nüfus hareketleri her an izlenebilmekte ve Merkezi Nüfus İdaresi Sistemi (MERNİS) kayıtlarındaki T.C. Kimlik Numaraları’na göre kişiler ile ikamet adresleri eşleştirilerek nüfusa ilişkin kayıt ve takipler yapılabilmektedir.

Ancak 1937 ile 1995 yılları arası, yaş grupları bazında ölüm sayıları verisi TÜİK tarafından tutulmamıştır. Bu nedenle bu çalışmada, Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi’nde [21] elde edilmiş ölüm düzeyi göstergesi olan model hayat tablosu seviyeleri kullanılarak, kadın ve erkek için yıllar itibarıyla yaşa özel ölüm hızları, ölüm sayıları ve riske maruz değerlerin tahmin edilmesi hedeflenmiştir. Dolayısıyla, Türkiye’nin ölümlülüğünün “Batı Modeli”ne uyum sağladığı varsayımı bu çalışmada da kabul edilmiştir. 1937–1995 yılları için yaş gruplarına özel ölüm hızları, ölüm sayıları ve riske maruz değerler, model hayat tablolarından yola çıkılarak, içdeğerleme yöntemi ile tahmin edilmiştir. Ayrıca, yine Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi’nde göçün var olduğu varsayımı göz önünde bulundurularak model hayat tablosu seviyeleri belirlendiğinden, bu çalışma da göç düzeltilmesini içinde barındırmaktadır.

Örnek teşkil etmeleri açısından, kadınlar için elde edilen ölüm sayıları ve riske maruz değerlerin, 1988-1995 yılları tahmin değerleri Çizelge 1 ve Çizelge 2’de verilmiştir.

Hesaplanan tüm bu değerler, Eş.(10)’daki fonksiyonunun maksimize edilebilmesi için LEM programına veri seti olarak tanımlanmıştır.

LEM programında kullanılan kodlar Ek-1’de verilmiştir. Unutulmamalıdır ki, piyasada bulunan ve Poisson regresyon yapan istatistiksel paket programlar, $b_x k_t$ bilineer teriminin varlığı sebebiyle, Eş.(10)’daki fonksiyonu maksimize edememektedirler. Bu çalışmada bu yüzden LEM programı kullanılmıştır.

Çizelge 1. Hesaplanan ölüm sayıları – Kadın

Ölüm Sayıları (Kadın)	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
d(0,yıl)	3821,73	3743,06	3665,54	3627,19	3589,11	3551,29	3513,74	3476,44
d(1,yıl)	1113,94	1074,15	1034,94	1015,55	996,28	977,16	958,16	939,30
d(5,yıl)	440,82	428,36	416,07	410,00	403,96	397,97	392,02	386,11
d(10,yıl)	345,20	336,04	327,01	322,54	318,10	313,70	309,33	304,98
d(15,yıl)	549,63	535,52	521,61	514,72	507,89	501,11	494,37	487,68
d(20,yıl)	759,73	742,15	724,82	716,25	707,74	699,29	690,90	682,56
d(25,yıl)	899,54	880,31	861,36	851,98	842,67	833,43	824,24	815,13
d(30,yıl)	1052,06	1030,76	1009,77	999,39	989,08	978,84	968,68	958,58
d(35,yıl)	1288,17	1265,63	1243,42	1232,44	1221,53	1210,70	1199,94	1189,25
d(40,yıl)	1655,24	1633,37	1611,81	1601,15	1590,56	1580,04	1569,60	1559,23
d(45,yıl)	2270,61	2249,81	2229,31	2219,17	2209,10	2199,10	2189,17	2179,31
d(50,yıl)	3207,42	3184,97	3162,85	3151,90	3141,03	3130,24	3119,52	3108,88
d(55,yıl)	4520,39	4497,61	4475,15	4464,05	4453,02	4442,07	4431,19	4420,39
d(60,yıl)	6610,61	6587,58	6564,88	6553,66	6542,51	6531,44	6520,44	6509,52
d(65,yıl)	9610,42	9601,01	9591,74	9587,15	9582,59	9578,07	9573,58	9569,12
d(70,yıl)	13357,75	13375,16	13392,33	13400,82	13409,25	13417,62	13425,94	13434,20
d(75,yıl)	16262,16	16324,56	16386,06	16416,48	16446,69	16476,69	16506,48	16536,07
d(80,yıl)	15654,32	15750,81	15845,91	15892,95	15939,66	15986,05	16032,12	16077,86

Çizelge 1’e bakıldığında, 70 ve üzeri yaş grupları hariç, diğer yaş gruplarında yaşa özel ölüm sayılarının yıllar itibariyle azaldığı görülmektedir.

Çizelge 2. Hesaplanan riske maruz değerler – Kadın

Riske Maruz Değer (Kadın)	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
e(0,yıl)	95255,81	94818,35	94387,19	94173,92	93962,13	93751,83	93542,96	93335,57
e(1,yıl)	381885,29	382301,78	382712,27	382915,33	383116,96	383317,19	383516,05	383713,50
e(5,yıl)	474111,86	474738,17	475355,46	475660,80	475964,01	476265,11	476564,15	476861,07
e(10,yıl)	472290,62	472967,11	473633,86	473963,67	474291,18	474616,40	474939,40	475260,11
e(15,yıl)	470073,25	470807,52	471531,21	471889,19	472244,67	472597,66	472948,25	473296,35
e(20,yıl)	466819,30	467632,48	468433,94	468830,39	469224,07	469615,00	470003,27	470388,78
e(25,yıl)	462683,61	463588,82	464480,99	464922,30	465360,54	465795,71	466227,92	466657,06
e(30,yıl)	457819,24	458825,81	459817,88	460308,60	460795,91	461279,81	461760,42	462237,61
e(35,yıl)	451992,77	453108,63	454208,40	454752,41	455292,63	455829,06	456361,85	456890,84
e(40,yıl)	444672,50	445899,29	447108,40	447706,49	448300,41	448890,18	449475,93	450057,52
e(45,yıl)	434919,26	436252,86	437567,23	438217,39	438863,02	439504,13	440140,88	440773,10
e(50,yıl)	421318,12	422759,52	424180,14	424882,85	425580,67	426273,60	426961,82	427645,14
e(55,yıl)	402130,60	403685,07	405217,14	405974,98	406727,55	407474,84	408217,05	408953,98
e(60,yıl)	374510,00	376179,13	377824,19	378637,92	379445,99	380248,40	381045,35	381836,64
e(65,yıl)	334256,95	336008,45	337734,70	338588,59	339436,54	340278,55	341114,83	341945,17
e(70,yıl)	277211,98	278946,31	280655,64	281501,16	282340,80	283174,56	284002,64	284824,84
e(75,yıl)	201825,17	203358,52	204869,76	205617,30	206359,63	207096,77	207828,89	208555,81
e(80,yıl)	120930,48	122076,47	123205,93	123764,62	124319,43	124870,34	125417,51	125960,79

Çizelge 1 ve Çizelge 2'deki, 80 ve üzeri yaş grubuna bakıldığında, x ile $x + 1$ yaşları arasında yaşanmış toplam kişi-yıl sayısındaki, yani riske maruz değerdeki, artış oranının ölüm sayısındaki artış oranından daha fazla olduğu görülmektedir. Bu da yaşlı nüfusunda artış olasılığını akla getirmektedir.

4.1. Poisson log-bilineer yaklaşımli Lee-Carter Türkiye modeli parametre tahminleri

Bu bölümde, klasik Lee-Carter modelinin eksikliklerini gidermede kayda değer başarı sağlayan, Belçika ve uygulandığı diğer ülkelerde başarılı sonuçlar veren Poisson log-bilineer yaklaşımının, Türkiye için hesaplanmış tahmini veri üzerindeki performansı incelenecektir. Veri seti olarak, Bölüm 4'de anlatılan, 1937-1995 yıllarına ilişkin, cinsiyet ayrımında ölüm sayıları ve riske maruz değerler kullanılmıştır. Lee-Carter modelinin parametre tahminlerini hesaplamalarda LEM by Vermunt programı kullanılmıştır.

Ölüm sayıları ve riske maruz değerler LEM programı'na veri seti olarak tanımlandıktan sonra algoritma işletilmiştir. Elde edilen program çıktıları yorumlanmış ve Vermunt'un tavsiye ettiği şekilde güncellenmiştir [12].

Erkekler için elde edilen program çıktısı Ek-1'de verilmiştir.

Ek-1'de, **TABLE XT [or P(XT)]** değerleri güncellenmemiş \hat{a}_x , $X [spe(T,1a)]$ değerleri güncellenmemiş \hat{b}_x ve $spe(T,1a) [X]$ değerleri ise güncellenmemiş \hat{k}_t değerlerini verir.

Burada, \hat{a}_x vektörünün güncellenmesi için yine program çıktısı olarak verilen "main" değerinin her bir \hat{a}_x değerine eklenmesi gerekir [12].

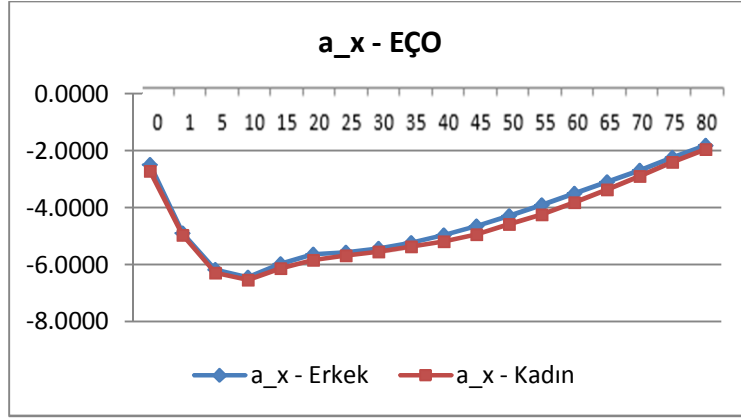
Eş.(2)'deki kısıtlar dikkate alındığından ve LEM programı tarafından \hat{b}_1 değerinin 1 olarak belirleniyor olmasından dolayı, \hat{b}_x parametresi güncellenirken basit bir ölçeklendirme düzeltmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Yani güncellenmiş \hat{b}_x değerlerini elde edebilmek için program çıktısı \hat{b}_x değerlerinin toplamıyla her bir \hat{b}_x değerini oranlamak gerekir [12].

LEM programı kaç yıllık veri seti tanımlanırsa, kullanılan veri setinin yıl sayısının bir eksiği kadar \hat{k}_t değeri vermektedir. Yani en son T yılına dair verinin olduğu setin LEM programı ile işlenmesinin ardından, çıktı olarak en son \hat{k}_{T-1} değeri alınabilecektir. Dolayısıyla öncelikle Eş.(2)'deki kısıt dikkate alınarak \hat{k}_T değeri belirlenmelidir. Bunun için $\sum_t k_t$ değerini 0 (sıfır) yapacak değeri bulmak yeterlidir. Yani;

$$\hat{k}_T = - \sum_{t=1}^{T-1} \hat{k}_t \quad (14)$$

biçimindedir [12]. Daha sonra her bir \hat{k}_t değeri güncellenmemiş \hat{b}_x 'lerin toplamı olan $\sum_x \hat{b}_x$ ile çarpılır.

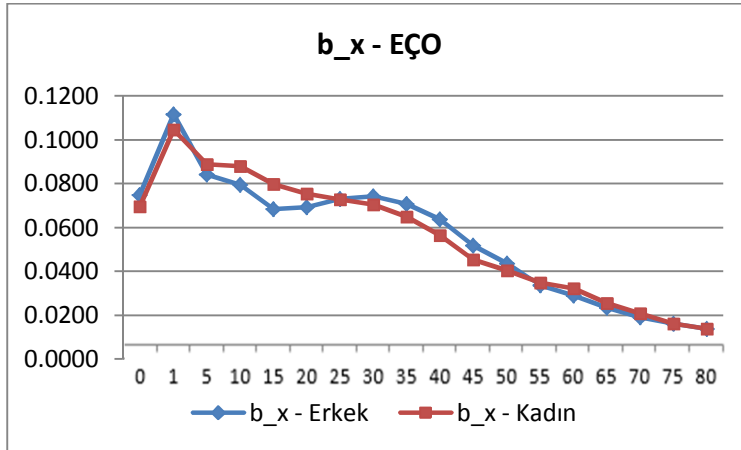
Tahmini Türkiye ölüm verisi ile yapılan çalışmadan elde edilen Poisson log-bilineer yaklaşımli Lee-Carter model parametre tahminleri sonuçları elde edilmiştir. Kadın ve erkek nüfusa ilişkin \hat{a}_x değerleri Ek-6 ve Ek-9'da verilmiştir. Şekil-1'de ise bu değerlerin çizgi grafiği gösterilmiştir.



Şekil 1. Cinsiyete göre \hat{a}_x parametresinin karşılaştırılması

Ölümlülüğün yaşa özel ve takvim yılından bağımsız örüntüsü olan \hat{a}_x değerleri incelendiğinde, ölümlülüğün her iki cinsiyet için de 0 yaşından 10-14 yaş grubuna kadar beklediği gibi azalan bir seyir izlediği, sonrasında ise giderek arttığı görülmektedir. Ayrıca erkeklere ilişkin takvim yılından bağımsız olan ölümlülüğün, tüm yaş grupları için kadın ölümlülüğünden daha fazla olduğu gözlemlenmektedir.

Kadın ve erkek nüfusa ilişkin \hat{b}_x değerleri Ek-7 ve Ek-10'da verilmiştir. Şekil 2'de ise bu değerlerin çizgi grafiği gösterilmiştir.



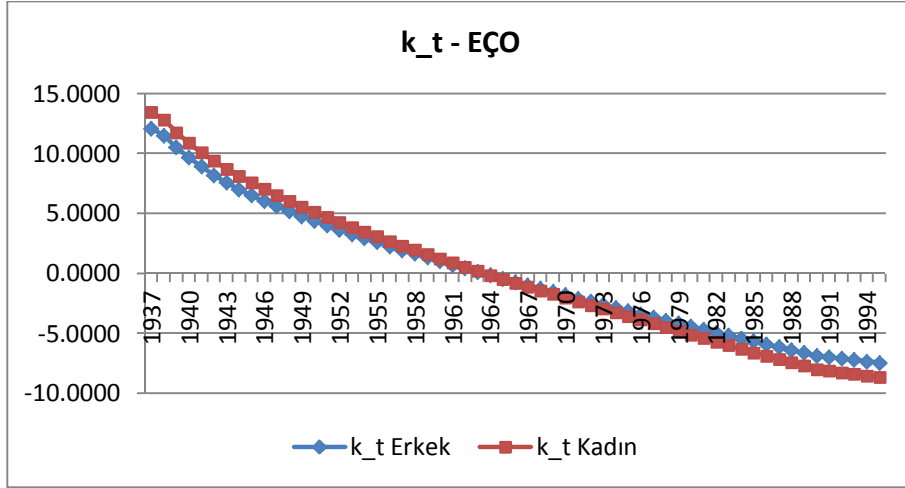
Şekil 2. Cinsiyete göre \hat{b}_x parametresinin karşılaştırılması

Ölümlülüğün yıllar içerisindeki değişiminin hangi yaşa ne oranda yansıdığını ifade eden \hat{b}_x parametresi sonuçları yorumlandığında; negatif bir değerle karşılaşılmadığı görülmektedir. Bu durum ölümlülüğün tüm yaşlar için azalmakta olduğunu ve hiçbir yaş aralığında ölümlülüğün artmayacağını göstermektedir. Grafikten de anlaşılacağı üzere, ölümlülüğün zamanla azalmakta olan yapısının en çok 1-4 yaş grubundaki nüfusa etkili olacağını ve bu yaş grubundaki ölümlülüğün diğer yaş gruplarına göre zamanla daha hızlı bir oranda azalacağı görülmektedir. Grafiğin azalış seyrinde olması, ölümlülüğün zamanla değişiminin etkisinin ilerleyen yaş gruplarında daha az olacağını göstermektedir.

Her iki cinsiyet için de \hat{b}_x değerlerinin seyrine bakıldığında, bazı yaş gruplarında erkekler için elde edilen değerlerin kadınlar için elde edilen değerlerden daha az çıktığı görülürken, bazı yaş grupları için de tam tersi gözlemlenmektedir. Bu da, ölümlülüğteki azalışın, 5-24 yaş grubunda kadınlara, 30-54 yaş grubunda ise erkeklere daha fazla etkide bulunduğunu göstermektedir. Diğer yaş gruplarında ise

\hat{b}_x değerleri arasında farkın neredeyse olmadığı da göz önüne alındığında, ölümlülükteki azalışın bu yaş gruplarındakilere eşit oranda etki etmekte olduğu düşünülebilir.

Lee-Carter modelinde ölüm hızı göstergesi olan k_t , tüm yaşlar için ölüm hızlarının yıllar boyunca gerçekleşen değişimini göstermektedir. EÇO yöntemi ile elde edilen \hat{k}_t serisinin cinsiyet ayırımına göre karşılaştırılması Ek-8 ve Ek-11’de verilmiştir. Şekil 3’te ise bu değerlerin çizgi grafiği gösterilmiştir.

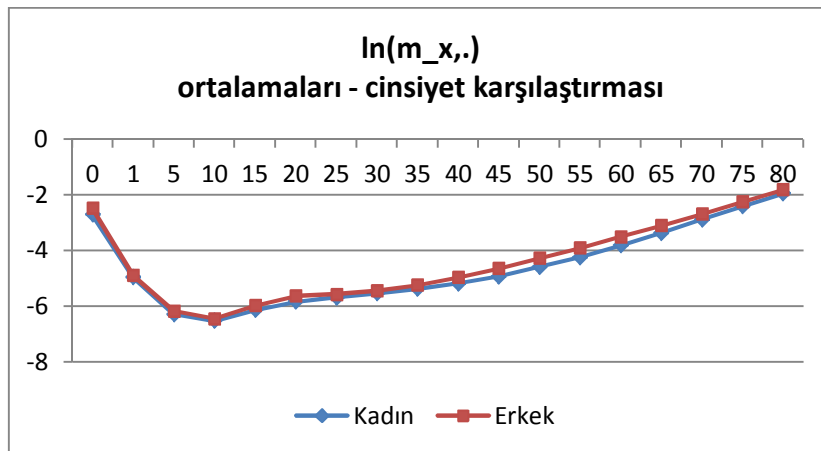


Şekil 3. Cinsiyete göre \hat{k}_t parametresinin karşılaştırılması

Ölümlülüğün yıllar içerisindeki seyrini ifade eden \hat{k}_t parametresinin kestirim değerleri, Türkiye nüfusu için ölümlülüğün, hem kadın hem de erkekler için azalmakta olan bir yapıda olduğunu göstermektedir. Elde edilen seride dönemselsel iniş ya da çıkışların bulunmaması, ham verinin derlenmesi aşamasında kullanılan regresyon modellerinden kaynaklanmaktadır.

TDA yönteminin ölüm hızlarına uygulandığı klasik Lee-Carter modelinden farklı olarak, Poisson log-bilineer yönteminde hatalar doğrudan ölüm hızlarına etkide bulunmaktadır. Dolayısıyla Eş.(7)’deki gibi ikinci aşama kestirim denkleminde ihtiyaç yoktur.

Elde edilen parametreler modelde yerine konulduğunda yıllara göre değişen yaş gruplarına özel ölüm hızlarının tahmin değerleri oluşur. Yıllar üzerinden ortalama alınarak oluşan $\hat{m}_{x,t}$ değerlerinin cinsiyet karşılaştırmaları Şekil 4’te verilmiştir.



Şekil 4. $\ln(\hat{m}_{x,t})$ değerlerinin cinsiyet karşılaştırması

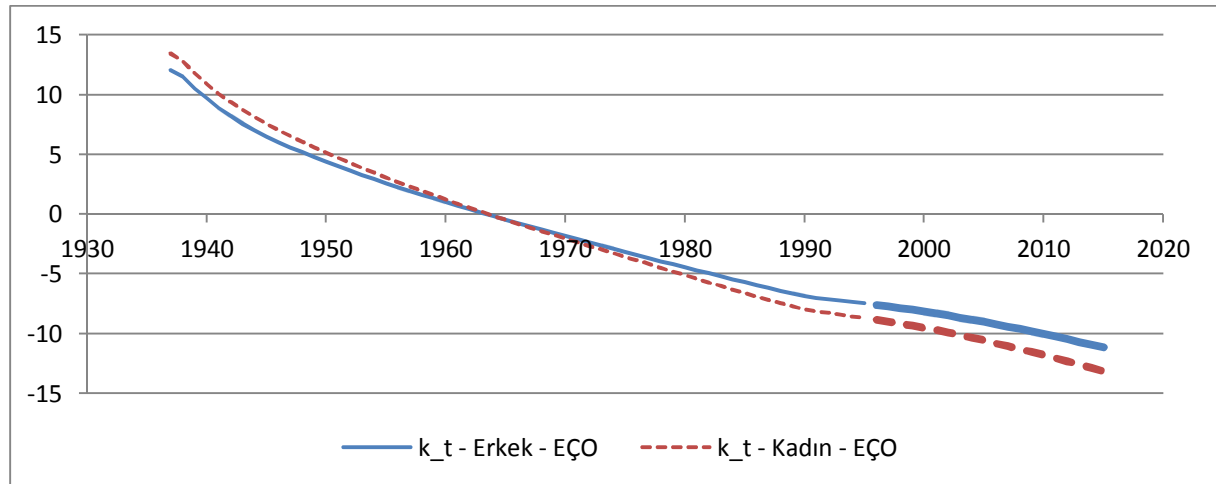
Şekil 4'te, $\ln(\hat{m}_{x,t})$ ortalamalarının cinsiyet bazında karşılaştırılması yer almaktadır. Görüldüğü üzere erkeklerin ölüm hızlarının logaritmalarının yıllar üzerinden ortalama değerleri kadınlara oranla her yaş gurubu için daha fazladır.

4.2. Gelecek yıllara ilişkin ölümlülük tahminleri

Çalışmanın bu bölümünde, Poisson log-bilineer yaklaşımı kullanılarak elde edilen 1937-1995 yılları arasındaki 59 yıllık veri kullanılarak, 2015 yılına kadar ölüm hızı öngörüsü yapılması amaçlanmıştır.

Daha önce de bahsedildiği gibi Lee-Carter modelinin en önemli iki üstünlüğü, sadeliği ve modelleme aşamasında ürettiği başarılı sonuçlardır. \hat{k}_t serisi için en uygun ARIMA(p,d,q) modelinin, her iki cinsiyet için de ARIMA(1,1,0) olduğu görülmüştür. Lee ve Carter'ın [2] çalışmasındaki projeksiyon uygulamalarında en uygun modelin ARIMA (0,1,0) çıkmış olması nedeniyle literatürdeki birçok çalışmada, en uygun model olmasa dahi sabit terimli rastgele yürüyüş modeli kullanılarak öngörü çalışmaları yapılmıştır. Ancak bu çalışmanın konusu olan Türkiye ölümlülük değerlerinin öngörülmesi çalışmasında bulunan ARIMA (1,1,0) modelinin daha uyumlu sonuçlar üretmesi nedeniyle sabit terimli rastgele yürüyüş modeli yerine, ARIMA(1,1,0) in kullanılması tercih edilmiştir.

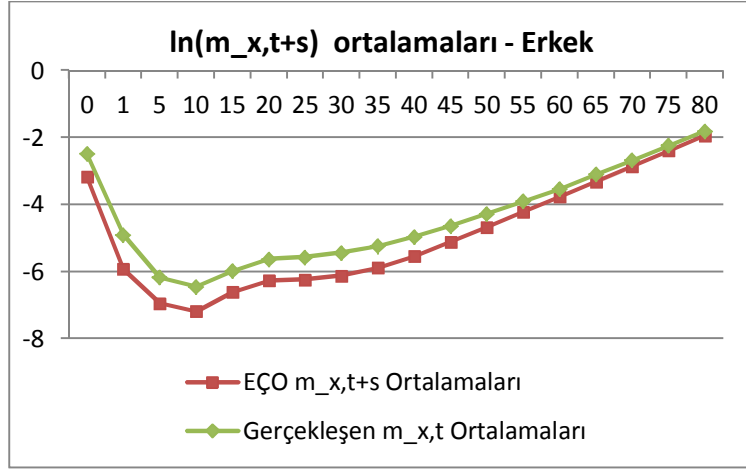
Poisson log-bilineer yaklaşımı ile ve TDA yaklaşımı ile \hat{k}_t parametresinin modellenmesi sonucu 1996 yılından itibaren yapılan 20 yıllık öngörü değerleri erkekler için Ek-12'de, kadınlar için Ek-13'de verilmektedir. Poisson log-bilineer yaklaşımı ile elde edilen \hat{k}_t parametresi öngörülerini her iki cinsiyet için de Şekil 5'te önceki yıllara göre daha kalın olarak sunulmuştur.



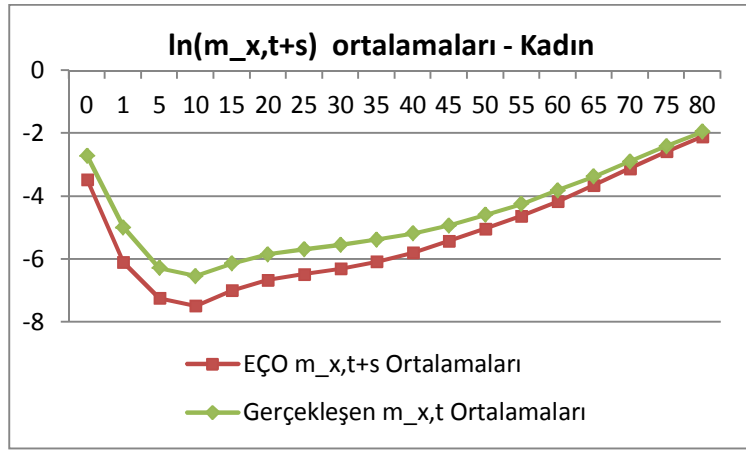
Şekil 5. Genel ölümlülük düzeyi \hat{k}_t 'nin projeksiyonu – Erkek, Kadın

Geçmişe ilişkin ölüm sayıları ve riske maruz değerlerin regresyon modellemesi sonucu pürüzsüz bir yapıda elde edilmiş olmasından dolayı, öngörü değerleri de dalgalanmalar içermemektedir.

Elde edilen \hat{k}_{t+s} değerleri ve daha önceden elde edilmiş \hat{a}_x ve \hat{b}_x parametre değerleri birlikte kullanılarak gelecek için ölüm hızı tahminleri olan $\hat{m}_{x,t+s}$ değerleri elde edilir. Projekte edilen ölüm hızları ile gerçekleşen ölüm hızları ortalamaları arasındaki farkın cinsiyet bazında incelenebilmesi için Şekil 6 ve Şekil 7'e bakılabilir.



Şekil 6. Projeksiyon değerlerinin ortalamaları ile gerçekleşen değerlerin ortalamalarının karşılaştırılması – Erkek.



Şekil 7. Projeksiyon değerlerinin ortalamaları ile gerçekleşen değerlerin ortalamalarının karşılaştırılması – Kadın.

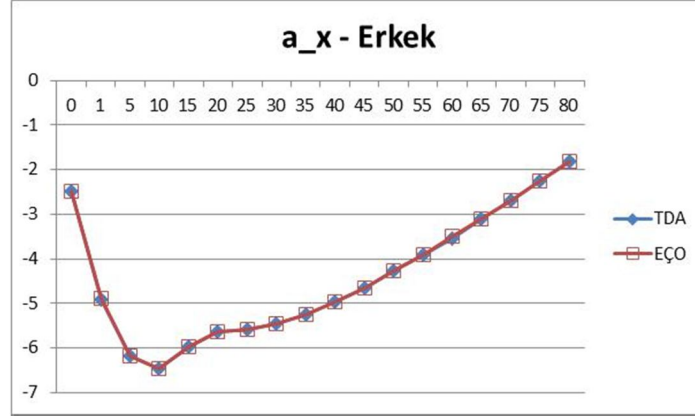
Her iki cinsiyete ait $\ln(\hat{m}_{x,t+s})$ projeksiyon değerleri, tahmin edilen $\ln(\hat{m}_{x,t})$ değerleri ile karşılaştırıldığında benzer şekilde sapma gösterdikleri görülebilir.

4.3. Klasik ve Poisson log-bilineer yaklaşımlı Lee-Carter Türkiye modellerinin karşılaştırılması

Bu bölümde, klasik Lee-Carter Türkiye modeli ve Poisson log-bilineer yaklaşımıyla yapılan Lee-Carter Türkiye modelinin sonuçlarının karşılaştırılması amaçlanmıştır.

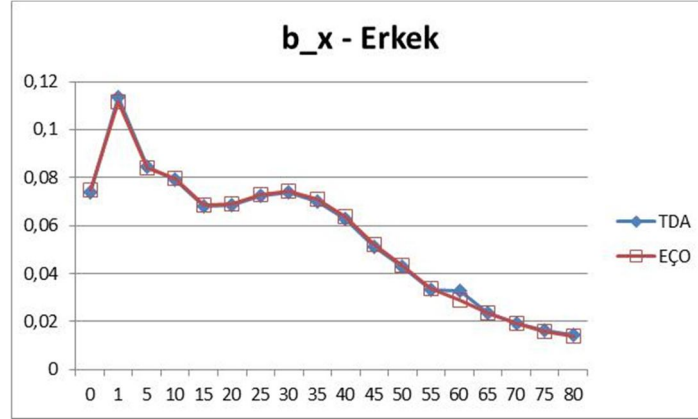
Türkiye mortalite projesi çalışmasında açıklanan regresyon modeli ile elde edilmiş olan 1937-1995 yılları arası ölüm hızları, her iki yöntem ile modellenmiş ve 1996-2015 yılları için projeksiyonları yapılmıştır. TDA yöntemi ile elde edilen yaş parametreleri erkek ve kadınlar için Ek-2 ve Ek-4'te, yıl parametreleri ise Ek-3 ve Ek-5'te verilmiştir.

Modelleme sonucu elde edilen parametre tahmini sonuçlarının görsel karşılaştırılması Şekil 8, Şekil 9 ve Şekil 10'de gösterilmiştir.



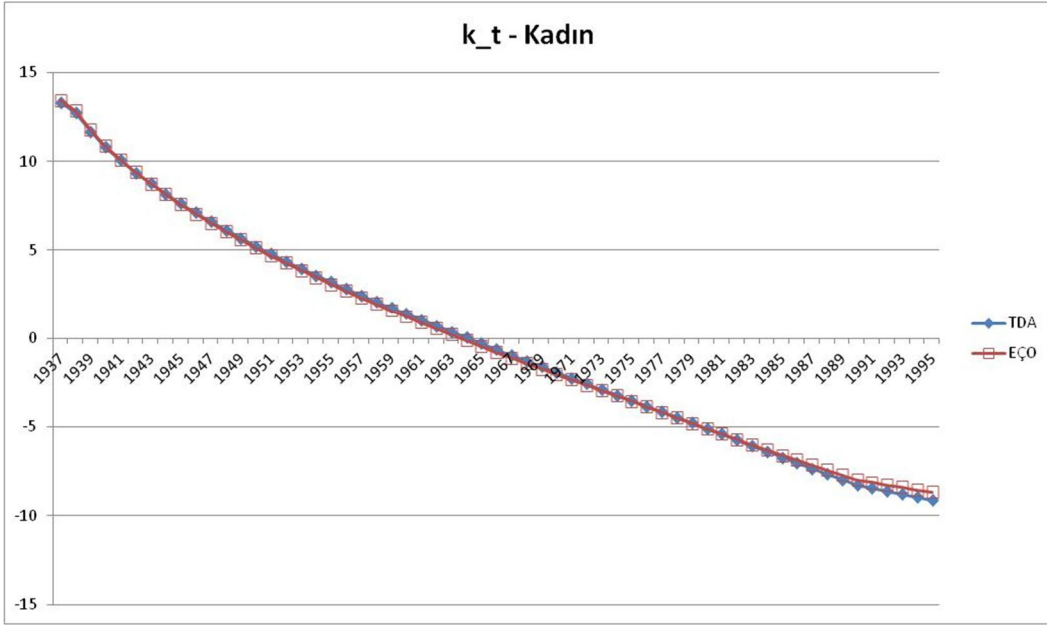
Şekil 8. Parametre tahmini sonuçları – Erkek (\hat{a}_x parametresi)

Zamandan bağımsız olan ve yaşa özel ölümlülüğü anlatan \hat{a}_x 'in her iki yöntem kullanılarak elde edilen tahmin sonuçları Şekil 8'deki grafik ile verilmiştir. Benzer durum kadınlar için de söz konusudur.



Şekil 9. Parametre tahmini sonuçları – Erkek (\hat{b}_x parametresi)

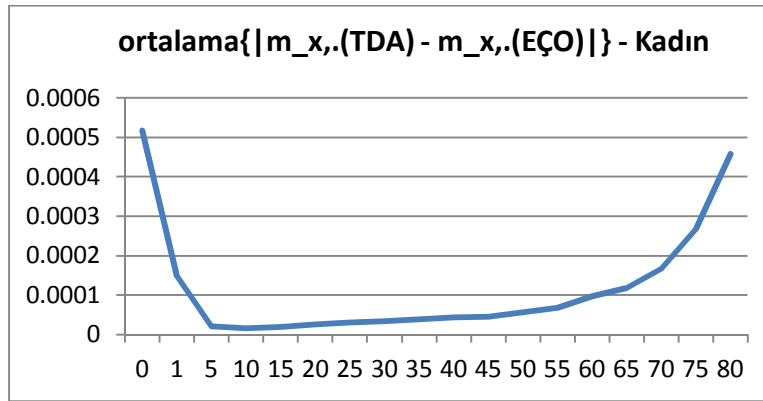
Yıllara göre değişen genel ölümlülük düzeyinin yaş gruplarına ne kadar etki edeceğini belirten \hat{b}_x parametresinin, her iki yöntem kullanılarak bulunan tahmin sonuçları Şekil 9'da verilmiştir. Görülebileceği üzere, parametre tahmin sonuçları birbirlerine çok yakın olmasına rağmen 1-4 ve 60-64 yaş gruplarında farklılaşmalar göze çarpmaktadır.



Şekil 10. Parametre tahmini sonuçları – Kadın (\hat{k}_t parametresi)

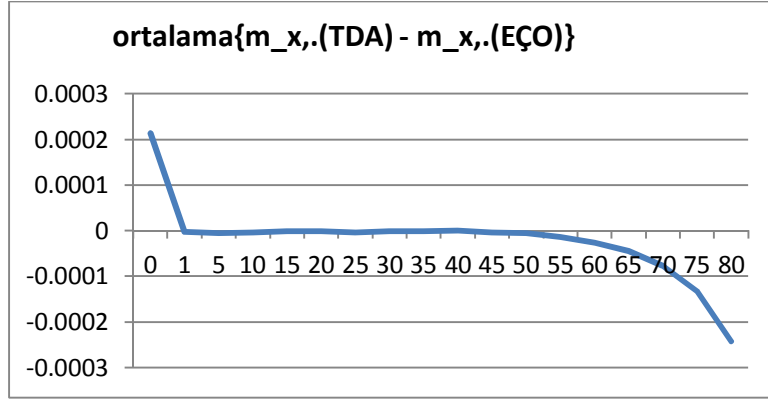
Ölümlülüğün yıllara göre değişimini açıklayan \hat{k}_t parametresinin her iki yöntemle elde edilen tahmin sonuçlarının görsel olarak karşılaştırılması Şekil 10’da görülmektedir. EÇO yönteminden elde edilen sonuçlara bakılırsa, TDA yönteminden elde edilenlere oranla ölümlülüğün 1985 yılından sonra biraz daha yavaş azalacağı anlaşılabilir.

TDA yönteminden ve EÇO yönteminden elde edilen tahmini ölüm hızlarının farklarından oluşan 18 satır (yaş grupları) ve 59 sütunlu (yıllar) matris incelenirse yöntemler arası farkın nerelerde oluştuğu görülebilir. Söz konusu matristeki hücrelerin, öncelikle ters yönlü farkların birbirini yok etmesini engellemek için mutlak değerleri ve daha sonra yıllar üzerinden ortalamaları alındığında oluşan çizgi grafiği Şekil 10’dedir.



Şekil 11. $\hat{m}_{x,t}$ değerlerinin mutlak farklarının yıllar üzerinden ortalamaları – Kadın

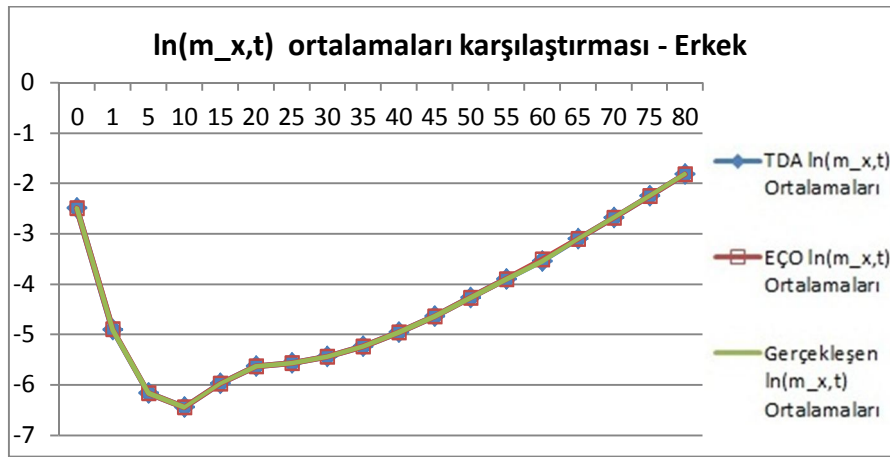
Şekil 11’de yöntemler arası farkın olduğu görülmektedir. Söz konusu olan bu farkın hangi yaş gruplarında ne yönde olduğunun anlaşılabilmesi için aynı matrisin mutlak değeri alınmadan yıllar üzerinden ortalamaları alındığında oluşan grafik ise Şekil 12’dir.



Şekil 12. $\hat{m}_{x,t}$ değerlerinin farklarının yıllar üzerinden ortalamaları – Kadın

Şekil 12den, TDA yöntemi ile “yeni doğan” ölümlülüğünün daha yüksek olarak tahmin edildiği, EÇO yönteminde ise “65 ve üzeri” yaş grupları için ölümlülüğün daha yüksek olarak tahmin edildiği, geri kalan yaş grupları içinse farkın neredeyse sıfır olduğu görülmektedir.

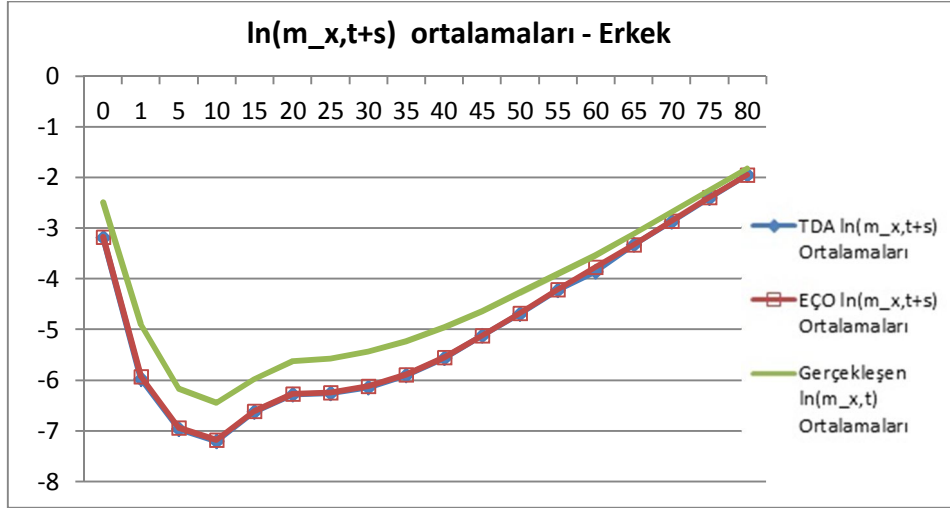
Şekil 11’den ve Şekil 12’den, “yeni doğan” ve “65 ve üzeri” yaş gruplarında, regresyonla elde edilen veri üzerinde çalışılmasına rağmen, EÇO yönteminin TDA yönteminden az da olsa farklı sonuçlar ürettiği anlaşılmaktadır.



Şekil 13. Tahmini ve gerçekleşen logaritmik ölüm hızlarının yıllar üzerinden alınan ortalamaları – Erkek.

Lee-Carter modellemesinin asıl amacı, ölüm hızlarını en doğru şekilde modelleyerek en az hata ile projekte edebilmektir. Projeksiyonun en az hata ile yapılabilmesi için de, parametre tahminlerinin hassasiyetle elde edilmesi gerekmektedir.

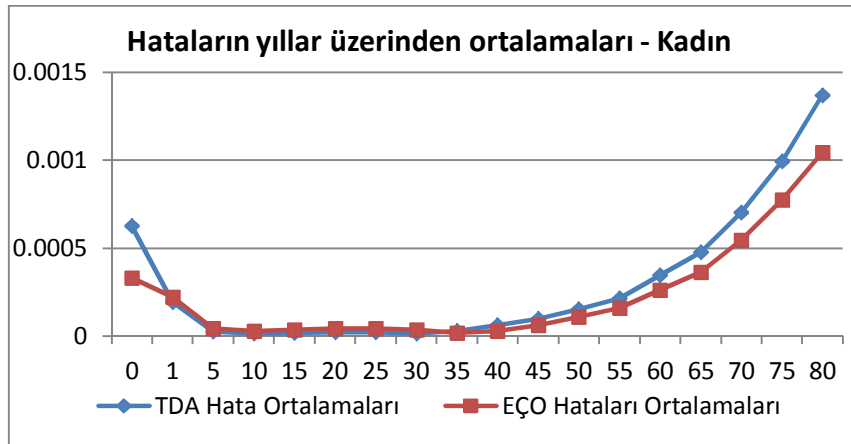
Erkekler için, yapılan projeksiyonlar sonucunda elde edilen 1996-2015 yılları ölüm hızı değerlerinin ortalamaları, gerçekleştiği kabul edilen 1937-1995 yılları ölüm hızı değerleri ortalamalarıyla karşılaştırılırsa, Şekil 14’deki grafik elde edilir.



Şekil 14. Projeksiyon değerlerinin, gerçekleşen ölüm hızı değerlerine göre karşılaştırılması – Erkek.

Şekil 14'te, projeksiyon değerleri ortalamalarının, gerçekleştiği kabul edilen değerler ortalaması altında kalması ölüm hızının zamanla azalacağı iddiasını doğrular niteliktedir. Her iki yöntem ile elde edilen sonuçlar arası fark görülememektedir. Bu durumun, uygulamada kullanılan verinin regresyonla üretilmesinden kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Ayrıca, her iki yöntem de ileri yaş gruplarında ölüm hızlarının genel seyrine çok yakın projeksiyon sonuçları vermektedir.

Tahmini değerler ile gerçekleştiği varsayılan değerler arasında oluşan fark $\epsilon_{x,t}$ değerlerini oluşturur. Kadınlar için, her iki yöntemden elde edilen hataların mutlak değerlerinin, yıllar üzerinden ortalaması alındıktan sonra oluşturduğu çizgi grafiği Şekil 15'te verilmiştir.



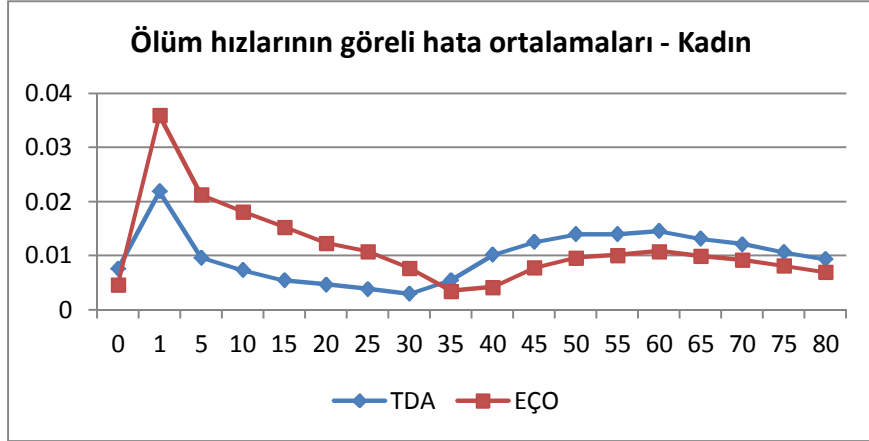
Şekil 15. Yıllar üzerinden ortalama alınan $\epsilon_{x,t}$ değerlerinin karşılaştırılması – Kadın

Şekil 15'ten, EÇO yöntemi ile elde edilen $\epsilon_{x,t}$ hatalarının yıllar üzerinden ortalaması alındığında, yeni doğan ve 40-44 ve sonraki yaş grupları ölümlülüğünde, daha az olduğu görülebilir. Benzer durum erkeklerde de söz konusudur.

İki yöntemin farklı bir açıdan daha karşılaştırılabilmesi için, yıllar üzerinden ortalama görel hatalarına bakılabilir. Ortalama görel hata,

$$\frac{\sum_t(\widehat{m}_{x,t} - m_{x,t})/m_{x,t}}{T}$$

formülü kullanılarak hesaplanır. Her iki yöntemin tüm yaş grupları için ortalama görelî hata grafiği Şekil 16’da verilmiştir.



Şekil 16. Ölüm hızlarının mutlak değışim yüzdesi ortalaması – Kadın

Şekil 16’den anlaşıldığı üzere, TDA yöntemi ile elde edilen görelî hata ortalamaları, “yeni doğan” ve “35 ve sonraki” yaş gruplarının ölümlülüğünü tahmin etmede, daha yüksektir. Diğer yaş gruplarında ise EÇO yöntemi ile elde edilen görelî hata ortalamaları daha yüksektir.

5. Sonuç

Hayat sigortası şirketlerinin ve sosyal güvenlik kurumlarının, taahhütte buldukları kişilere olan finansal yükümlülüklerini karşılayabilmeleri için gelecekte gerçekleşecek ölüm hızları hakkında başarılı tahminlerde bulunmaları hayati önem taşımaktadır.

Lee-Carter modeli, sunulduğu 1992 yılından bugüne kadar birçok kaynak tarafından en başarılı model olarak gösterilmiş ve birçok ülkenin ölümlülük yapısının modellenmesinde kullanılmıştır. Ancak Lee-Carter modellemesi, her ne kadar başarılı sonuçlar verse de, dayandığı bazı varsayımların gerçekçi olmaması nedeniyle eleştirilebilir. Bu eleştiriler, daha önce de Lee-Carter modellemesine seçenek oluşturacak yaklaşımlarda bulunulmasına sebep olmuştur.

Geçmişte Türkiye’de köy ve bucaklarda gerçekleşen ölüm sayılarının ve riske maruz değerlerin derlenememesi nedeniyle genel nüfus ölümlülük göstergeleri, araştırmacılar tarafından ancak kestirim yöntemleri ile tahmin edilebilmektedir. Bu sebepten dolayı bu çalışmada, Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi’nde elde edilmiş ölüm düzeyi göstergesi olan model hayat tablosu seviyeleri kullanılarak, 1937-1995 yılları için, yaşa özel ölüm sayıları ve riske maruz değerler tahmin edilmiştir. Bir sonraki adımda ise, tahmin edilmiş değerler hem klasik Lee-Carter modellemesi ile hem de Poisson log-bilineer yaklaşımı ile yapılan Lee-Carter modellemesi ile modellenmiş ve her iki yöntemle de elde edilen ölüm hızlarının 2015 yılına kadar öngörüsü yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara bağlı olarak iki yöntem karşılaştırılmıştır.

Gerek tıbbi gelişmeler gerekse iyileşen yaşam koşulları ile birlikte ölümlülüğün azalan bir yapıda olduğu birçok bilimsel araştırma tarafından doğrulanmıştır. Bu çalışmadan da, her iki yaklaşımla elde edilen sonuçlara göre ölümlülüğün azalmakta olduğu görülebilmektedir.

Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, Poisson log-bilineer yaklaşımı ile yapılan Lee-Carter modellemesinin, tahmin edilen Türkiye verisi üzerinde az da olsa farklı sonuçlar verdiği görülmüştür. Ek olarak, birçok uygulamada olduğu gibi Lee-Carter modellemesinden elde edilen hataların, modelin sabit varyanslılık varsayımına uyum sağlamaması bir eksiklik olarak kabul edilirken; Poisson log-

bilineer yaklaşımı ile yapılan Lee-Carter modellemesinde bu varsayımın olmaması herhangi bir ihlal durumunun gerçekleşmemesini sağlar.

Uygulama yapılırken kayıt altına alınan verinin yerine tahmin edilen veri kullanıldığından iki yöntem arasındaki fark rahatlıkla görülebilir durumda değildir. Eğer uygulamada kullanılan veri, düzenli olarak tutulmuş olan yaş gruplarına özel ölüm sayılarını ve riske maruz değerleri içeriyor olsaydı farkın daha da dikkat çekici hale gelebileceği düşünülmektedir.

Kaynaklar

- [1] Hâri, N., Waegenare, A.D., Melenberg, B., Nijman, T.E., 2007, Estimating the Term Structure of Mortality, *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 492- 504.
- [2] Lee, R.D., Carter, L.R., 1992, Modelling and forecasting U.S.mortality, *Journal of The American Statistical Association*, 419, 659-675.
- [3] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J., 2002, A Poisson Log-Linear regression approach to the construction of projected life tables, *Insurance: Mathematics and Finance*, 31, 373-393.
- [4] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J.K., 2002, Measuring the longevity risk in mortality projections, *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 105-130.
- [5] Renshaw, A.E., Haberman, S., 2003, Lee-Carter Model Forecasting with Age Specific Enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 255-272.
- [6] Renshaw, A.E., Haberman, S., 2003, Lee-Carter Mortality Forecasting: A Parallel Generalized Linear Modelling Approach for England and Wales Mortality Projections, *Applied Atatistics*, 52, 119-137.
- [7] Wilmoth, J.R., 1993, *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*, Technical Report, University of California, Berkeley, USA.
- [8] Alho, J.M., 2000, Discussion of Lee (2000), *North American Actuarial Journal*, 4, 91-93.
- [9] Delwarde, A., Denuit, M., Guillén, M., Vidiella-i-Anguera, A., 2006, Application of the Poisson Log-Bilinear Projection Model to the G5 Mortality Experience, *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 6, No. 1.
- [10] Brillinger, D.R., 1996, An analysis of an ordinal-valued time series, pp. 73-87 in *Athens Conf. On Applied Probability and Series Analysis. Volume II: Time Series Analysis*, Lecture Notes in Statistics, vol. 115, Springer-Verlag, New York.
- [11] Sithole, T.Z., Haberman, S., Verrall, R.J., 2000, An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners' data. *Insurance: Mathematics & Economics* 27, 285-312.
- [12] Vermunt, J.K., 1997, *LEM: A general program for the analysis of categorical data*, Department of Methodology and Statistics, Tilburg University. <http://www.kub.nl/mt0>.
- [13] Haberman, S., Russolillo, M., 2005, *Lee-Carter mortality forecasting: application to the Italian population*, City University – Actuarial Research Paper No. 167., 22s.
- [14] Golub, G.H., Kahan, W., 1965, Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of Matrix, *SIAM J. Numer. Anal. Ser. B.*, 2, 205-224.
- [15] Box, G.E.P., Jenkins, G.M., 1976, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- [16] Wang, J.Z., 2007, *Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model*, Working paper, Stocholm, 51s.
- [17] Wickens, T.D., 2004, *The General Linear Model*, Mathematics in Brain Imaging Graduate Summer School Program, Institute for Pure and Applied Mathematics, University of California, Los Angeles, July, 2004.
- [18] Brillinger, D.R., 1986, The Natural Variability of Vital Rates and Associated Statistics, *Biometrics*, 42, 693-734.
- [19] Vermunt, J.K., 1997, *Log-linear Models for Event Histories*. Thousand Oakes: Sage Publications.
- [20] Goodman, L.A., 1979, Simple Models for the Analysis of Association in Cross-Classification Having Ordered Categories, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 537-552.
- [21] Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi, 2010, Sigorta Bilgi ve Gözetim Merkezi, <http://www.sbm.org.tr/?p=mortaliteIstatistik>, Kasım, 2013.

Ek-1. LEM programı çıktısı

LEM: log-linear and event history analysis with
missing data.

Developed by Jeroen Vermunt (c), Tilburg
University, The Netherlands.

Version 1.0 (September 18, 1997).

*** INPUT ***

man 2
dim 18 59
lab X T
mod {wei(XT),X,spe(T,1a,X,b)}
dat deaths.dat
sta wei(XT) exposures.dat
cri 0.000001

***LOG-LINEAR PARAMETERS ***

* TABLE XT [or P(XT)] *

effect	beta	exp(beta)
main	-4.3893	0.0124

X

1	1.9033	6.7083
2	-0.5082	0.6016
3	-1.7783	0.1689
4	-2.0623	0.1272
5	-1.5917	0.2036
6	-1.2432	0.2885
7	-1.1822	0.3066
8	-1.0529	0.3489
9	-0.8482	0.4282
10	-0.5701	0.5655
11	-0.2520	0.7772
12	0.1115	1.1180
13	0.4841	1.6227
14	0.8856	2.4243
15	1.2842	3.6118
16	1.7046	5.4990
17	2.1425	8.5209
18	2.5733	13.1088

X [spe(T,1a)]

1	1.0000
2	1.4883
3	1.1241
4	1.0626
5	0.9144
6	0.9237
7	0.9756
8	0.9902
9	0.9448
10	0.8508
11	0.6926
12	0.5801
13	0.4495
14	0.3855
15	0.3138
16	0.2552
17	0.2136
18	0.1857

spe(T,1a) [X]

1	0.9053	2.4727
2	0.8621	2.3682
3	0.7885	2.2000
4	0.7253	2.0654
5	0.6666	1.9477
6	0.6142	1.8482
7	0.5682	1.7650
8	0.5256	1.6915
9	0.4868	1.6271
10	0.4521	1.5716
11	0.4193	1.5209
12	0.3881	1.4741
13	0.3577	1.4301
14	0.3284	1.3887
15	0.3001	1.3500
16	0.2729	1.3137
17	0.2464	1.2794
18	0.2203	1.2465
19	0.1949	1.2152
20	0.1702	1.1856
21	0.1461	1.1573
22	0.1225	1.1303
23	0.0993	1.1044
24	0.0761	1.0791
25	0.0534	1.0548
26	0.0310	1.0315
27	0.0091	1.0091
28	-0.0125	0.9876
29	-0.0337	0.9668
30	-0.0548	0.9467
31	-0.0759	0.9269
32	-0.0968	0.9078
33	-0.1174	0.8893
34	-0.1377	0.8714
35	-0.1578	0.8540
36	-0.1777	0.8372
37	-0.1974	0.8209
38	-0.2169	0.8050
39	-0.2364	0.7895
40	-0.2559	0.7742
41	-0.2753	0.7594
42	-0.2945	0.7449
43	-0.3135	0.7309
44	-0.3325	0.7172
45	-0.3512	0.7038
46	-0.3699	0.6908
47	-0.3884	0.6781
48	-0.4068	0.6658
49	-0.4251	0.6537
50	-0.4433	0.6419
51	-0.4613	0.6305
52	-0.4792	0.6193
53	-0.4971	0.6083
54	-0.5149	0.5976
55	-0.5237	0.5923
56	-0.5325	0.5871
57	-0.5414	0.5820
58	-0.5502	0.5769

Ek-2.EKK yönteminden TDA ile elde edilen Lee-Carter modeli yaş parametreleri – Erkek

Yaş Grupları	a_x	b_x	b_x Güncellenmiş
0	-2,48598	0,282076	0,073918819
1	-4,90285	0,434079	0,113751619
5	-6,16954	0,321912	0,084357971
10	-6,45026	0,301421	0,078988184
15	-5,98034	0,259198	0,067923614
20	-5,63136	0,261406	0,068502121
25	-5,57102	0,27725	0,072654001
30	-5,44142	0,281028	0,073644013
35	-5,23646	0,267727	0,070158617
40	-4,95811	0,24033	0,062979173
45	-4,64012	0,195055	0,051114594
50	-4,27643	0,163465	0,04283646
55	-3,90419	0,127152	0,03332055
60	-3,54103	0,125074	0,032775886
65	-3,10402	0,089562	0,02346996
70	-2,68362	0,073299	0,019208285
75	-2,24556	0,061837	0,016204475
80	-1,81466	0,054156	0,014191659

Ek-3.EKK yönteminden TDA ile elde edilen Lee-Carter modeli yılparametreleri – Erkek

Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş	Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş
1937	3,173498903	12,11015686	1967	-0,244760378	-0,934012161
1938	3,018566225	11,5189296	1968	-0,32017036	-1,221778674
1939	2,758705373	10,52729363	1969	-0,395477805	-1,509153901
1940	2,534933535	9,673374301	1970	-0,470735182	-1,796338068
1941	2,335389401	8,911908535	1971	-0,545994069	-2,083528
1942	2,152479195	8,21391829	1972	-0,621318496	-2,370968031
1943	1,996795177	7,619823904	1973	-0,69675815	-2,658847772
1944	1,849353189	7,057181329	1974	-0,772367948	-2,947376789
1945	1,713843802	6,540073874	1975	-0,842466112	-3,214873261
1946	1,595727323	6,089338227	1976	-0,907960216	-3,464800515
1947	1,481998938	5,65534766	1977	-0,973679597	-3,715587435
1948	1,371953689	5,235412041	1978	-1,039670915	-3,967412074
1949	1,268144011	4,839271529	1979	-1,105965548	-4,220394169
1950	1,168433347	4,458772963	1980	-1,172591664	-4,474641213
1951	1,071063431	4,087206756	1981	-1,239602586	-4,730356687
1952	0,975714101	3,723351156	1982	-1,307020339	-4,987624639
1953	0,8824384	3,367408583	1983	-1,374892343	-5,246626024
1954	0,793758716	3,029004532	1984	-1,443255534	-5,507501794
1955	0,706457669	2,695861398	1985	-1,511955375	-5,769662229
1956	0,620370731	2,367351335	1986	-1,577180653	-6,018563635
1957	0,535339781	2,042870949	1987	-1,642705221	-6,268607145
1958	0,451226223	1,721891357	1988	-1,70858193	-6,519994431
1959	0,369288012	1,40921295	1989	-1,774835553	-6,772820033
1960	0,29079175	1,109669109	1990	-1,841501142	-7,027217706
1961	0,212961117	0,812665329	1991	-1,874999111	-7,155046853
1962	0,135704175	0,51785077	1992	-1,908616625	-7,283332189
1963	0,058939905	0,224916258	1993	-1,942354713	-7,412077633
1964	-0,017411312	-0,066442032	1994	-1,976223072	-7,541320199
1965	-0,093426973	-0,356519833	1995	-2,010214343	-7,671031803
1966	-0,169182855	-0,645606307			

Ek-4.EKK yönteminden TDA ile elde edilen Lee-Carter modeli yaş parametreleri – Kadın

Yaş Grupları	a_x	b_x	b_x Güncellenmiş
0	-2,70958	0,263891402	0,069365421
1	-4,98237	0,41115775	0,108075255
5	-6,28293	0,34034231	0,089460996
10	-6,53067	0,335908569	0,088295561
15	-6,13288	0,30457293	0,080058802
20	-5,84011	0,287051117	0,07545309
25	-5,68699	0,275966371	0,072539398
30	-5,54092	0,267054437	0,070196844
35	-5,37395	0,244819419	0,064352237
40	-5,17998	0,211120402	0,055494251
45	-4,9281	0,169521423	0,044559712
50	-4,58835	0,151492867	0,039820799
55	-4,23989	0,130732165	0,034363725
60	-3,8086	0,121021064	0,031811105
65	-3,36927	0,096200037	0,025286751
70	-2,88677	0,078727483	0,020693986
75	-2,40592	0,061352419	0,016126847
80	-1,94622	0,053433146	0,01404522

Ek-5.EKK yönteminden TDA ile elde edilen Lee-Carter modeli yılparametreleri – Kadın

Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş	Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş
1937	3,504803615	13,33355329	1967	-0,252908987	-0,962158176
1938	3,342774814	12,71713654	1968	-0,336748564	-1,281114553
1939	3,071843395	11,68641445	1969	-0,420695625	-1,600479841
1940	2,840746811	10,80723862	1970	-0,504814506	-1,920498794
1941	2,642590424	10,05337934	1971	-0,589169359	-2,241415469
1942	2,460775333	9,361688311	1972	-0,673839209	-2,563530513
1943	2,301576992	8,756039667	1973	-0,758887975	-2,887087087
1944	2,150451648	8,18110365	1974	-0,844386456	-3,21235454
1945	2,006773669	7,634500132	1975	-0,927374265	-3,528070482
1946	1,870836223	7,117344427	1976	-1,008260386	-3,835790838
1947	1,739260876	6,61678374	1977	-1,089591507	-4,14520413
1948	1,611271491	6,129865365	1978	-1,171443382	-4,456598564
1949	1,491524348	5,674303489	1979	-1,253873534	-4,770192975
1950	1,376722471	5,23755521	1980	-1,336936284	-5,086194022
1951	1,264116014	4,80915911	1981	-1,420718395	-5,404931777
1952	1,153347424	4,387754932	1982	-1,505268845	-5,726592575
1953	1,044759228	3,974645764	1983	-1,590669886	-6,051489335
1954	0,943695012	3,590160568	1984	-1,676992441	-6,379891866
1955	0,843843122	3,2102875	1985	-1,763993244	-6,710874706
1956	0,745018423	2,834322245	1986	-1,845545555	-7,021129488
1957	0,647040687	2,461579143	1987	-1,927879398	-7,334357502
1958	0,549749782	2,091449	1988	-2,011081231	-7,650887669
1959	0,455044618	1,73115596	1989	-2,095204327	-7,970922659
1960	0,36485819	1,388053843	1990	-2,180317114	-8,294722792
1961	0,27512695	1,046683424	1991	-2,223266357	-8,458117403
1962	0,185741942	0,706630202	1992	-2,266494213	-8,62257196
1963	0,096605365	0,3675221	1993	-2,310005683	-8,788105485
1964	0,007619587	0,028987693	1994	-2,353817138	-8,954780267
1965	-0,081312077	-0,309340847	1995	-2,397923067	-9,122575333
1966	-0,169099446	-0,643316067			

Ek-6. EÇO yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{a}_x parametresi değerleri – Erkek

Yaş Grupları	a_x	a_x Güncellenmiş
0	1,9033	-2,4860
1	-0,5082	-4,8975
5	-1,7783	-6,1676
10	-2,0623	-6,4516
15	-1,5917	-5,9810
20	-1,2432	-5,6325
25	-1,1822	-5,5715
30	-1,0529	-5,4422
35	-0,8482	-5,2375
40	-0,5701	-4,9594
45	-0,2520	-4,6413
50	0,1115	-4,2778
55	0,4841	-3,9052
60	0,8856	-3,5037
65	1,2842	-3,1051
70	1,7046	-2,6847
75	2,1425	-2,2468
80	2,5733	-1,8160
main	-4,3893	

Ek-7. EÇO yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{b}_x parametresi değerleri – Erkek

Yaş Grupları	b_x	b_x Güncellenmiş
0	1,0000	0,074903562
1	1,4883	0,111478971
5	1,1241	0,084199094
10	1,0626	0,079592525
15	0,9144	0,068491817
20	0,9237	0,06918842
25	0,9756	0,073075915
30	0,9902	0,074169507
35	0,9448	0,070768885
40	0,8508	0,06372795
45	0,6926	0,051878207
50	0,5801	0,043451556
55	0,4495	0,033669151
60	0,3855	0,028875323
65	0,3138	0,023504738
70	0,2552	0,019115389
75	0,2136	0,015999401
80	0,1857	0,013909591
sum:	13,3505	1,0000

Ek-8. EÇÖ yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{k}_t parametresi değerleri - Erkek

Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş	Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş
1937	0,9053	12,08620765	1967	-0,076	-1,01330295
1938	0,8621	11,50946605	1968	-0,097	-1,2923284
1939	0,7885	10,52686925	1969	-0,117	-1,5673487
1940	0,7253	9,68311765	1970	-0,138	-1,83836385
1941	0,6666	8,8994433	1971	-0,158	-2,1067089
1942	0,6142	8,1998771	1972	-0,178	-2,37238385
1943	0,5682	7,5857541	1973	-0,197	-2,6353887
1944	0,5256	7,0170228	1974	-0,217	-2,89572345
1945	0,4868	6,4990234	1975	-0,236	-3,1560582
1946	0,4521	6,03576105	1976	-0,256	-3,41639295
1947	0,4193	5,59786465	1977	-0,275	-3,67539265
1948	0,3881	5,18132905	1978	-0,295	-3,93172225
1949	0,3577	4,77547385	1979	-0,314	-4,18538175
1950	0,3284	4,3843042	1980	-0,333	-4,43904125
1951	0,3001	4,00648505	1981	-0,351	-4,6886956
1952	0,2729	3,64335145	1982	-0,37	-4,93834995
1953	0,2464	3,2895632	1983	-0,388	-5,1853342
1954	0,2203	2,94111515	1984	-0,407	-5,4309834
1955	0,1949	2,60201245	1985	-0,425	-5,67529755
1956	0,1702	2,2722551	1986	-0,443	-5,91827665
1957	0,1461	1,95050805	1987	-0,461	-6,15858565
1958	0,1225	1,63543625	1988	-0,479	-6,3975596
1959	0,0993	1,32570465	1989	-0,497	-6,63653355
1960	0,0761	1,01597305	1990	-0,515	-6,87417245
1961	0,0534	0,7129167	1991	-0,524	-6,99165685
1962	0,031	0,4138655	1992	-0,533	-7,10914125
1963	0,0091	0,12148955	1993	-0,541	-7,2279607
1964	-0,0125	-0,16688125	1994	-0,55	-7,3454451
1965	-0,0337	-0,44991185	1995*	-0,559	-7,4602594
1966	-0,0548	-0,7316074	b_x sum:	13,351	0

Ek-9. EÇO yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{a}_x parametresi değerleri – Kadın

Yaş Grupları	a_x	a_x Güncellenmiş
0	1,8729	-2,7060
1	-0,3870	-4,9659
5	-1,7017	-6,2806
10	-1,9518	-6,5307
15	-1,5521	-6,1310
20	-1,2605	-5,8394
25	-1,1083	-5,6872
30	-0,9619	-5,5408
35	-0,7958	-5,3747
40	-0,6019	-5,1808
45	-0,3504	-4,9293
50	-0,0105	-4,5894
55	0,3378	-4,2411
60	0,7690	-3,8099
65	1,2084	-3,3705
70	1,6909	-2,8880
75	2,1717	-2,4072
80	2,6312	-1,9477
main	-4,5789	

Ek-10. EÇO yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{b}_x parametresi değerleri – Kadın

Yaş Grupları	b_x	b_x Güncellenmiş
0	1,0000	0,069619945
1	1,5035	0,104673587
5	1,2741	0,088702772
10	1,2648	0,088055306
15	1,1465	0,079819267
20	1,0851	0,075544602
25	1,0451	0,072759804
30	1,0136	0,070566776
35	0,9338	0,065011104
40	0,8089	0,056315573
45	0,6508	0,04530866
50	0,5816	0,04049096
55	0,5012	0,034893516
60	0,4631	0,032240996
65	0,3660	0,0254809
70	0,2976	0,020718896
75	0,2296	0,015984739
80	0,1984	0,013812597
sum:	14,3637	1,0000

Ek-11. EÇO yöntemi ile elde edilen Lee-Carter modeli \hat{k}_t parametresi değerleri – Kadın

Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş	Yıllar	k_t	k_t Güncellenmiş
1937	0,9359	13,44298683	1967	-0,077	-1,10744127
1938	0,8931	12,82822047	1968	-0,099	-1,42056993
1939	0,8198	11,77536126	1969	-0,121	-1,73082585
1940	0,7577	10,88337549	1970	-0,142	-2,0396454
1941	0,7028	10,09480836	1971	-0,163	-2,34415584
1942	0,6535	9,38667795	1972	-0,184	-2,64722991
1943	0,6084	8,73887508	1973	-0,205	-2,94886761
1944	0,5666	8,13847242	1974	-0,226	-3,24763257
1945	0,5274	7,57541538	1975	-0,248	-3,55501575
1946	0,4902	7,04108574	1976	-0,269	-3,86814441
1947	0,455	6,5354835	1977	-0,291	-4,1798367
1948	0,4213	6,05142681	1978	-0,313	-4,48865625
1949	0,3889	5,58604293	1979	-0,334	-4,79603943
1950	0,3576	5,13645912	1980	-0,355	-5,10054987
1951	0,3273	4,70123901	1981	-0,376	-5,40362394
1952	0,2981	4,28181897	1982	-0,397	-5,70526164
1953	0,2696	3,87245352	1983	-0,418	-6,0040266
1954	0,2417	3,47170629	1984	-0,439	-6,30135519
1955	0,2144	3,07957728	1985	-0,459	-6,59724741
1956	0,1877	2,69606649	1986	-0,479	-6,87733956
1957	0,1617	2,32261029	1987	-0,498	-7,15599534
1958	0,1361	1,95489957	1988	-0,518	-7,43321475
1959	0,111	1,5943707	1989	-0,537	-7,71043416
1960	0,0861	1,23671457	1990	-0,556	-7,98765357
1961	0,0617	0,88624029	1991	-0,566	-8,12698146
1962	0,0376	0,54007512	1992	-0,575	-8,26487298
1963	0,014	0,2010918	1993	-0,585	-8,4027645
1964	-0,0094	-0,13501878	1994	-0,595	-8,54065602
1965	-0,0324	-0,46538388	1995*	-0,604	-8,6756748
1966	-0,0551	-0,79143987	b_x sum:	14,364	0

Ek-12. Her iki yöntemle elde edilen \hat{k}_t parametrelerinin 20 yıllık öngörüsü ve %95'lik güven aralıkları – Erkek

EÇO - Erkek				TDA - Erkek			
Yıllar	Öngörü	Alt Limit	Üst Limit	Yıllar	Öngörü	Alt Limit	Üst Limit
1996	-7,5834	-7,7064	-7,4604	1996	-6,941963	-7,2461	-6,6378
1997	-7,7145	-7,9855	-7,4435	1997	-7,1404049	-7,7325	-6,5483
1998	-7,8533	-8,3003	-7,4063	1998	-7,3716946	-8,247	-6,4964
1999	-7,9995	-8,6447	-7,3544	1999	-7,6250011	-8,7688	-6,4812
2000	-8,1529	-9,0145	-7,2913	2000	-7,8930649	-9,2875	-6,4986
2001	-8,3132	-9,4063	-7,2200	2001	-8,17102	-9,7983	-6,5437
2002	-8,4800	-9,8176	-7,1425	2002	-8,455605	-10,2991	-6,6121
2003	-8,6533	-10,2462	-7,0603	2003	-8,7446339	-10,7895	-6,6997
2004	-8,8326	-10,6905	-6,9748	2004	-9,0366413	-11,2697	-6,8036
2005	-9,0179	-11,1487	-6,8871	2005	-9,3306451	-11,7403	-6,921
2006	-9,2089	-11,6197	-6,7980	2006	-9,6259871	-12,2022	-7,0498
2007	-9,4053	-12,1023	-6,7084	2007	-9,922226	-12,656	-7,1884
2008	-9,6070	-12,5953	-6,6188	2008	-10,219066	-13,1027	-7,3355
2009	-9,8138	-13,0979	-6,5297	2009	-10,516309	-13,5428	-7,4898
2010	-10,0255	-13,6092	-6,4418	2010	-10,813822	-13,9771	-7,6505
2011	-10,2419	-14,1285	-6,3553	2011	-11,111516	-14,4061	-7,8169
2012	-10,4628	-14,6550	-6,2706	2012	-11,409332	-14,8304	-7,9883
2013	-10,6881	-15,1882	-6,1880	2013	-11,707229	-15,2503	-8,1642
2014	-10,9176	-15,7275	-6,1077	2014	-12,00518	-15,6662	-8,3442
2015	-11,1511	-16,2722	-6,0300	2015	-12,303168	-16,0785	-8,5278

Ek-13. Her iki yöntemle elde edilen \hat{k}_t parametrelerinin 20 yıllık öngörüsü ve %95'lik güven aralıkları – Kadın

EÇO - Kadın				TDA - Kadın			
Yıllar	Öngörü	Alt Limit	Üst Limit	Yıllar	Öngörü	Alt Limit	Üst Limit
1996	-8,8218	-8,9548	-8,6889	1996	-9,3026	-9,4322	-9,173
1997	-8,9786	-9,2705	-8,6868	1997	-9,4942	-9,7776	-9,2108
1998	-9,1456	-9,6253	-8,6658	1998	-9,6968	-10,161	-9,2325
1999	-9,3222	-10,0124	-8,632	1999	-9,9096	-10,5751	-9,2441
2000	-9,5080	-10,4268	-8,5893	2000	-10,1322	-11,015	-9,2494
2001	-9,7027	-10,8647	-8,5407	2001	-10,364	-11,4767	-9,2513
2002	-9,9057	-11,3231	-8,4883	2002	-10,6045	-11,9573	-9,2517
2003	-10,1168	-11,7997	-8,4339	2003	-10,8532	-12,4542	-9,2521
2004	-10,3355	-12,2923	-8,3787	2004	-11,1096	-12,9654	-9,2539
2005	-10,5615	-12,7993	-8,3238	2005	-11,3734	-13,489	-9,2578
2006	-10,7945	-13,3190	-8,27	2006	-11,6441	-14,0235	-9,2646
2007	-11,0341	-13,8501	-8,2181	2007	-11,9213	-14,5676	-9,275
2008	-11,2800	-14,3915	-8,1686	2008	-12,2047	-15,1201	-9,2892
2009	-11,5320	-14,9420	-8,122	2009	-12,4939	-15,68	-9,3078
2010	-11,7898	-15,5008	-8,0787	2010	-12,7886	-16,2463	-9,3309
2011	-12,0530	-16,0670	-8,039	2011	-13,0885	-16,8183	-9,3587
2012	-12,3215	-16,6398	-8,0032	2012	-13,3933	-17,3951	-9,3915
2013	-12,5950	-17,2186	-7,9715	2013	-13,7028	-17,9762	-9,4293
2014	-12,8733	-17,8026	-7,944	2014	-14,0166	-18,561	-9,4722
2015	-13,1561	-18,391	-7,9209	2015	-14,3346	-19,1489	-9,5202