Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Vol: 50 Numb: 2 Page: 698-720
https://dergipark.org.tr/tr/pub/cuefd

Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Descriptions of Definite Integral and Indefinite Integral

Esra DEMİRAY [a*] **(ORCID ID - 0000-0002-1839-5376)**

Elif SAYGI [a] **(ORCID ID - 0000-0001-8811-4747)**

[a]Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ankara/Türkiye

Article Info

DOI: 10.14812/cufej.745658

Article history:
Received 30.05.20
Revised 17.03.21
Accepted 05.08.21

Keywords:
Definite integral,
Indefinite integral,
Calculus
Pre-service middle school mathematics teachers.

Abstract

The importance of calculus in mathematics, mathematics education, and other disciplines and the necessity of developing students' conceptual understanding regarding integral, which is one of the major concepts in calculus course, are among the issues emphasized by researchers. Thus, the purposes of this study were to examine how pre-service middle school mathematics teachers describe definite integral and indefinite integral and also to what extent they can see the relation between definite integral and indefinite integral. For these purposes, 173 pre-service middle school mathematics teachers were asked to answer three questions. According to the findings, the concepts pre-service middle school mathematics teachers mentioned while describing both definite and indefinite integral are similar which are bound, notation, mathematical formula, example, area, volume, antiderivative, calculation process, the form of result (number, function, algebraic expression or unknown), and the constant c. It was also seen that mostly mentioned concept is bound for each type of integral. However, the minority of them presented evidence regarding the relation between definite integral and indefinite integral in their responses.

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Belirli İntegral ve Belirsiz İntegral Tanımlamaları

Makale Bilgisi

DOI: 10.14812/cufej.745658

Makale Geçmişi:
Geliş 30.05.20
Düzeltme 17.03.21
Kabul 05.08.21

Anahtar Kelimeler:
Belirli integral,
Belirsiz integral,
Analiz
Ortaokul matematik öğretmeni adayı

Öz

Araştırmacılar analizin matematik, matematik eğitimi ve diğer disiplinlerdeki önemini ve bu dersin temel kavramlarından biri olan integrale ilişkin öğrencilerin kavramsal anlamalarının geliştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu nedenle, bu çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmen adaylarının belirli integrali ve belirsiz integrali nasıl tanımladıklarını ve ayrıca belirli integral ve belirsiz integral arasındaki ilişkiyi ne derece ifade edebildiklerini araştırmaktır. Bu amaçla, 173 ortaokul matematik öğretmen adayından üç soruyu cevaplamaları istenmiştir. Elde edilen bulgulara göre, ortaokul matematik öğretmen adayları hem belirli hem de belirsiz integrali tanımlarken benzer kavramlara değinmektedir. Bu kavramlar sınır, notasyon, matematiksel formül, örnek verme, alan, hacim, ters türev, hesaplama süreci, sonucun yapısı (sayı, fonksiyon, cebirsel ifade veya bilinmeyen) ve c sabiti olarak sınıflandırılmıştır. Ayrıca her bir integral türü için en çok bahsedilen kavramın sınır olduğu görülmüştür. Ancak, katılımcıların azınlığının cevaplarında belirli integral ve belirsiz integral arasındaki ilişkiye dair ifadeler bulunmuştur.

Introduction

Studies regarding mathematics education at the undergraduate level, particularly related to calculus course, have been increased throughout the last decades (Bezuidenhout, 1998; Jones, 2013; Park, 2015;

[*] **Author:** esrademiray@hacettepe.edu.tr

2016). Calculus is a complicated and fundamental area within mathematics (Hall, 2010; Orton, 1983). It is also a central mathematics course since it constitutes a basis for the following advanced mathematics courses (Liu, 2009; Mahir, 2009; Nasari, 2008). In calculus course, students are expected to develop both conceptual and procedural understanding (Bezuidenhout, 2001), represent concepts graphically, numerically, and algebraically (Berry & Nyman, 2003), and move between different representations (Goerdt, 2007). The main purpose of calculus instruction is to change students' conceptual knowledge in a way that their prior understandings and beliefs approach to the knowledge of an expert (Pyzdrowski et al., 2013). Moreover, in teaching calculus, students' awareness of the connection between concepts should be taken into consideration (Yerushalmy & Swidan, 2012). Regarding the process of successive abstraction, Skemp (1986) stated that "if a particular level is imperfectly understood, everything from then on in peril. This dependency is probably greater in mathematics than in any other subject" (p.20). In calculus course, concepts are not independent and they are built on previous ones (Mahir, 2009; Park, 2015). For example, learning derivative is difficult for students since they need to understand some other concepts such as function and limit accurately before derivative (Park, 2015). Similarly, to be able to understand integral, students should first understand some concepts such as limit and derivative.

Studies conducted so far showed that there is a gap between students' actual learning from calculus course and what they should learn. Moreover, students' comprehension of routine procedures in calculus, which is generally related to memorization, is misinterpreted as conceptual understanding (Grundmeier, Hansen, & Sousa, 2006). Similarly, students accept calculations as the fundamental outcome of calculus and generally focus on calculations through calculus course which might lead to a lack of conceptual understanding (Aspinwell & Miller, 1997). As expected, according to the findings of related studies, most of the students do not understand fundamental concepts of calculus properly and focus on routine procedures by memorization (Bezuidenhout, 1998; Bezuidenhout, 2001; Ferrini-Mundy & Graham, 1991; Nasari, 2008; Oberg, 2000).

According to the review of the literature, researchers have studied calculus concepts by focusing on various aspects such as learning and teaching of calculus, representations, integration of technology, students' understanding, concept definitions, concept images, misconceptions, and mistakes regarding concepts of calculus. It was also noticed that studies were conducted based on particular concepts of calculus. For example, the concepts of calculus mostly studied by researchers are functions (e.g., Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989), limit (e.g., Bezuidenhout, 2001), continuity (e.g., Bezuidenhout, 2001; Tall & Vinner, 1981), derivative (e.g., Park, 2015), and integral (e.g., Grundmeier et al., 2006; Rasslan & Tall, 2002; Sağlam, 2011). Although derivative and integral should be studied to enlighten students' understanding of calculus course, it was noticed that limit was the highly investigated concept (Jones, 2013). In this respect, the present study seeks to contribute to the body of knowledge about integral.

Integral is an important concept not only for pure mathematics such as calculus and complex analysis but also for other disciplines such as physics and economics (Jones, Lim, & Chandler, 2017; Yerushalmy & Swidan, 2012). Despite the importance of integral in calculus course, research showed that integral is one of the concepts in which students generally have difficulty (Bezuidenhout & Olivier, 2000; Jones, 2013; Oberg, 2000; Rasslan & Tall, 2002). Students accept integral as "the opposite of differentiation" and consider integral techniques as "little more than a bag of tricks" (Berry & Nyman, 2003, p.482). According to the review of related literature, there are studies focusing on particular parts of integral such as definite integral (e.g., Oberg, 2000; McGee & Martinez-Planell, 2014) and indefinite integral (e.g., Swidan & Naftaliev, 2019; Swidan & Yerushalmy, 2014) or focusing on integral from a broader perspective (e.g., Orton, 1983; Sağlam, 2011). In the present study, definite integral, indefinite integral, and the relation between them are the issues focused on.

Definite Integral

Definite integral is an essential and important subject for students while learning integral (Jones et al., 2017; Rasslan & Tall, 2002) so that students' understanding of it is critical. In addition to conducting routine procedures or calculations related to definite integral, students are also expected to understand what definite integral is. The definition of Stewart (2010, p.343) for a definite integral mentions interval, bounds, notation, and the relation between area and definite integral. Similarly, Thomas, Weir, Hass, and Giordano (2005) also focused on Riemann sums in defining definite integral. Definite integral was generally associated with finding the area under a curve (Hall, 2010). According to Oberg (2000), definite integral might be explained by relating to computation, area, accumulation or summation, total change between x=a and x=b, function, and an abstract object. Similarly, Rasslan and Tall (2002) categorized definite integral explanation of final year high school students under five themes, which are the area between graph and x-axis, calculation procedure, giving examples, incorrect answer, and no answer.

It was reported in the studies that students have difficulties regarding definite integral (Grundmeier et al., 2006; Oberg, 2000; Rasslan & Tall, 2002). For example, students do not have the necessary conceptual understanding in some concepts such as area-integral relation, the meaning of sum of areas in terms of integral, the definition of definite integral, and the Fundamental Theorem of Calculus (Hall, 2010; Mahir, 2009; Rasslan & Tall, 2002). Attorps, Björk, and Radic (2013) stated some aspects for teaching definite integral effectively. For instance, students should not relate definite integral to area only, they also should look from a wider perspective and see it as a real number which is the output of a limit process. By this way, they can accept definite integral as not only a positive number but also zero or a negative number. Moreover, it was seen that students' concept images of definite integral are mostly related to area. To change this situation, textbooks might be revised since they generally emphasize the area aspect.

Indefinite Integral

Similar to definite integral, students are also expected to comprehend the notion of indefinite integral. The conceptualization of indefinite integral has a critical role in associating definite integral with derivative (Swidan & Yerushalmy, 2014). Thomas et al. (2005) stated the following definition of indefinite integral; "The set of all antiderivatives of f is the indefinite integral of f with respect to x, denoted by $\int f(x)dx$" (p.312). In other words, an indefinite integral $\int f(x)dx$ refers to a particular antiderivative of f or a family of antiderivatives in which each member differs by an arbitrary constant (Stewart, 2010; Swidan & Yerushalmy, 2014). The mentioned constant is generally represented with the letter c.

Despite the importance of the indefinite integral in developing relational understanding of concepts, Hall (2010) mentioned the scarcity of studies conducted about students' understanding of indefinite integral. For example, Metaxas (2007) examined first-year mathematics students' understanding of indefinite integral and reported that their interpretation of indefinite integral were generally procedural and there were some points in which students have difficulty. Moreover, Hall (2010) asked students of an introductory calculus course to define definite integral and indefinite integral. According to the results of the study, students' responses concerning indefinite integral were coded under four headings, which are antiderivative, area, generality, and other. The categories area, generality, and other also appeared in the analysis of definite integral. Hall (2010) also pointed out that definite integral is more precise and indefinite integral is vague for students.

The Fundamental Theorem of Calculus

The Fundamental Theorem of Calculus is accepted as the central theorem in integral calculus since it forms a connection between differentiation and integration and offers a way to calculate integrals via using the antiderivative of the integrand instead of finding the limit of Riemann sums (Stewart, 2010; Thomas et al., 2005). Moreover, it demonstrates the relation between definite and indefinite integral (Adams & Essex, 2010). However, Attorps et al. (2013) stated that undergraduate students have difficulty in the application of the Fundamental Theorem of Calculus when its assumptions are not verified.

The Fundamental Theorem of Calculus is explained in two parts in the textbook of Thomas et al. (2005) as follows:

The Fundamental Theorem of Calculus Part 1

If f is continuous on $\left[a,b\right]$ then $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ is continuous on $\left[a,b\right]$ and differentiable on (a,b) and its derivative is $f(x)$;

$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$ (p.358)

The Fundamental Theorem of Calculus Part 2

If f is continuous at every point of $\left[a,b\right]$ and F is any antiderivative of f on $\left[a,b\right]$, then

$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)$ (p.361)

As seen, the first part of the theorem is about the derivative of an integral and presents how to differentiate a definite integral by considering its upper limit. Moreover, the second part of the theorem is about the integral of a derivative and explains a way to calculate integral when an antiderivative of the integrand can be found (Adams & Essex, 2010). The relation between definite integral and indefinite integral in accordance with the Fundamental Theorem of Calculus is among the issues focused in the present study.

Rationale of the Study

The review of the related literature presented that students have difficulty in integral (Jones, 2013; Mahir, 2009; Oberg, 2000; Orton, 1983). For instance, Orton (1983) investigated whether calculus students who can conduct integral procedures properly also have a conceptual understanding related to integral and stated that students had many critical difficulties. One of the main difficulties of students was related to the interpretation of integral as the limit of sums. Similarly, Grundmeier et al. (2006) examined calculus students' understanding of integral by considering five criteria; interpreting the meaning of integration verbally, representing integrals graphically, defining integral with symbols, evaluating integrals, and relating integral application to the real world. At the end of the study, Grundmeier et al. (2006) reported that the participants have deficiencies in concept definitions and concept images of integration although they are good at the calculation process of integral. Moreover, Orton (1983) stressed that "rules without reasons cannot be justified" (p.10). Therefore, students should be aware of the meaning of integral concept before being competent at integration techniques.

The reason behind students' deficiencies might be that they are unable to form concrete meaning via interpreting formal definitions (Özdemir, 2017). Students' deficiencies regarding interpreting the definitions and understanding the meanings of definite integral and indefinite integral might lead them to have misconceptions about integral in further applications of calculus (Grundmeier et al., 2006). To determine the points which students have lack of conceptual understanding is an important step for structuring further teaching (Mahir, 2009). Similarly, to understand how students perceive a concept such as integration can be considered as an effective step for instructors to help students to overcome issues they faced through their undergraduate education. By this way, instructors might frame their teaching depending on the students' prior knowledge, determine possible misconceptions of students, and prepare some methods to overcome these misconceptions in particular concepts (Hall, 2010). Therefore, how pre-service mathematics teachers explain definite integral and indefinite integral was framed as one of the purposes of this study.

It is important to highlight the fact that students should be competent at concepts of calculus and the proper applications of them (Mahir, 2009). Since integral is considered as one of the essential concepts for the following mathematics courses, pre-service mathematics teachers should learn integral concept properly. Moreover, since definite integral and indefinite integral have similar points and students may transfer some notions of indefinite integral to definite integral incorrectly (Oberg, 2000), how students see the relation between them and detecting incorrect interpretation of them should be taken into consideration by instructors. In this respect, this study also sought to examine to what extent pre-service middle school mathematics teachers can state the relation between definite integral and indefinite integral.

As Oberg (2000) stated, instructors of calculus course should know the importance of undergraduate students' conceptualization of integral. Since this study was conducted with pre-service teachers at all levels in the program, it can be stated that this study might be helpful for instructors of calculus course by presenting a portrait of how students at the collegiate level understand the notions of definite integral and indefinite integral. Then, instructors might prepare more effective methods in teaching and improve classroom practices in conjunction with integral concept.

By considering these issues, the first purpose of the present study is to investigate how pre-service mathematics teachers describe definite integral and indefinite integral. Another purpose of the study is to examine to what extent they can explain the relation between them. To this end, the study aims to address the following research questions;

1. Which concepts do pre-service middle school mathematics teachers focus on when describing and explaining definite integral and indefinite integral?

2. To what extent do pre-service middle school mathematics teachers explain the relation between definite integral and indefinite integral?

Method

Research Design, Participants and the Context of the Study

In this study, a cross-sectional survey was used to investigate the research questions. The participants of this study were determined by convenience sampling as 173 pre-service middle school mathematics teachers in Elementary Mathematics Teacher Education program in a state university located in Ankara, Turkey. Among 173 pre-service teachers, 149 of them (86.1%) were female and 24 of them (13.9%) were male. Based on the year level, 25 of them (14.5%) were freshmen, 57 of them (32.9%) were sophomores, 51 of them (29.5%) were juniors, and 40 of them (23.1%) were seniors. As seen, the number of freshman pre-service middle school mathematics teachers was the least since they did not volunteer to participate in this study. The reasons for their unwillingness to participate were that they took only General Mathematics course as an undergraduate mathematics course during data collection of this study, this course does not involve integral concept, and they did not remember integral from high school mathematics course properly. On the other hand, only a few students in other year levels did not volunteer to participate. The reason for this situation might be that they have already taken Calculus I course which covers integral concept at the time of the data collection. Therefore, freshman pre-service teachers' participation in the current study has a lower percentage compared to other year levels.

In Turkey, Elementary Mathematics Teacher Education program is a four-year bachelor's degree program. The ones who graduated from this program can be employed as teachers in the mathematics course from 5th to 8th grades. Moreover, students in this program generally work on integral throughout Calculus I and Calculus II courses which are offered in the third and fourth semesters. The integral concept is also seen in the content of the courses Calculus III and Differential Equations. Moreover, in Turkey, some calculus concepts such as functions, limit, continuity, derivative, and integral are covered in the mathematics course of high school. According to the secondary school mathematics curriculum in Turkey (Ministry of National Education, MoNE, 2013), students in the 12^{th} grade start to work on integral.

Data Collection Process

The purposes of this study were to investigate the concepts that pre-service middle school mathematics teachers mention while describing definite integral and indefinite integral and whether they were aware of the relation between them. For these purposes, three open-ended questions were prepared by reviewing the related literature (Adams & Essex, 2010; Hall, 2010; Orton, 1983; Stewart, 2010; Thomas et al., 2010). In the pilot study, two pre-service middle school mathematics teachers from each year level in the teacher education program participated. In more detail, they were first asked to write their answers to questions. After that, they were also asked to criticize questions whether it is clear or not and then think aloud and discuss questions in pairs. According to the feedbacks of the pilot study, the final version of the questions was prepared for the actual administration. Question 1 (Q1) asks pre-service teachers to describe and explain definite integral, Question 2 (Q2) asks them to describe and explain indefinite integral, and Question 3 (Q3) asks them to explain the relation between indefinite integral and definite integral. By means of Q1 and Q2, it was aimed to address the first research question. More precisely, the concepts that the participants considered while describing indefinite integral and definite integral were examined via their responses to these questions. Since it is difficult to deduce how the participants relate indefinite integral and definite integral from their descriptions in Q1 and Q2, another question was asked to direct them to think about relation particularly. Thus, to address the second research question, Q3 was employed.

Data Analysis

In data analysis, thematic analysis framework stated by Braun and Clarke (2006) was used and the findings were presented via frequencies and percentages. By following the six phases of thematic analysis which are listed as "familiarizing yourself with the data, generating initial codes, searching for themes, reviewing themes, defining and naming themes, and producing the report" (Braun & Clarke, 2006, p.87), participants' responses to three questions were analyzed. Moreover, pre-service teachers' responses were firstly analyzed by researchers and codes were prepared. Then, all responses were coded by a graduate student in mathematics education. After coding, they checked the matched codes and determined the different codes together. It was observed that the majority of the codes were matching. Finally, all coders discussed these unmatched situations and reached a consensus for all coding.

Findings

As mentioned, in Q1 and Q2, pre-service middle school mathematics teachers are asked to describe and explain definite integral and indefinite integral, respectively. Their responses were analyzed and codes were formed by focusing on the concepts they mentioned. In Table 1, the concepts reached at the end of the analysis are presented.

Table 1.
The Frequencies of the Concepts Mentioned related to Definite and Indefinite Integral

Concepts	Definite Integral	Indefinite Integral
No answer	-	5 (2.9 %)
Bound	160 (92.5 %)	130 (75.1 %)
Notation	70 (40.5 %)	56 (32.4 %)
Area	54 (31.2 %)	22 (12.7 %)
Example	30 (17.3 %)	23 (13.3 %)
Mathematical formulas	13 (7.5 %)	11 (6.4 %)
Calculation process	16 (9.2 %)	5 (2.9 %)
Antiderivative	8 (4.6 %)	14 (8.1 %)
Volume	9 (5.2 %)	3 (1.7 %)
Result is a number	16 (9.2 %)	-
Result is a function or algebraic expression or unknown	-	23 (13.3 %)
Absence of the constant c	3 (1.7 %)	-
Existence of the constant c	1 (0.6 %)	27 (15.6 %)

According to Table 1, all participants in the present study wrote a response for Q1, but 5 of them (2.9 %) did not answer Q2. Moreover, the concepts mentioned in both definite integral and indefinite integral are considerably similar. As related to both definite and definite integral, bound has the highest percentage. While 160 pre-service teachers (92.5 %) stated that there are bounds and limits while describing definite integral in Q1, 130 pre-service teachers (75.1 %) expressed the absence of bound for indefinite integral in Q2. For example, the response of participant 9 to Q1 and the response of participant 106 to Q2 were given.

Response of participant 9 (freshman) to Q1:
Definite integral has a lower bound and an upper bound.
$\int_a^b f(x)dx$ The letters a and b correspond to particular numbers.

Response of participant 106 (junior) to Q2:
In indefinite integral, the lower and upper bounds are not known. There is not any boundary. $\int e^x dx$ can be stated as an example of this type of integral.

At this point, these examples can be helpful to make the coding process clearer. The response of participant 9 was coded for two concepts in Table 1, which are bound and notation, since this participant both stated about bound and notation regarding definite integral. Similarly, the response of participant 106 was coded for both bound and example categories in Table 1. This participant was not coded in the notation category since she preferred to give an example $\int e^x dx$ instead of writing simply the notation $\int f(x)dx$ or $\int$ for indefinite integral. Thus, in data analysis, a response was coded for more than one category if related concepts exist in the response since these categories are not mutually exclusive.

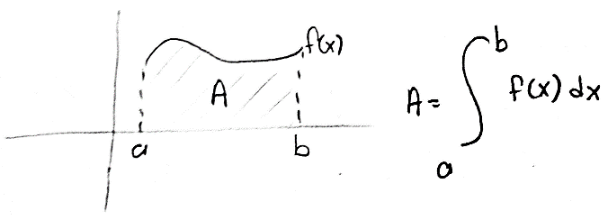
As seen from Table 1, the notion which has the second highest percentage in the responses was notation of the definite integral and indefinite integral. While describing definite integral, 70 of them (40.5 %) gave the notation. Similarly, 56 of them (32.4 %) wrote the notation of indefinite integral. For example, participant 107 wrote the notation while explaining both definite and indefinite integral.

Response of participant 107 (junior) to Q1:
It is represented as $\int_a^b f(x)dx$. The bounds of it are a and b.

Response of participant 107 (junior) to Q2:
It is represented as $\int f(x)dx$. It does not have particular values as bounds.

Area concept has the third highest percentage in the responses to both questions. Among 173 pre-service teachers, 54 students (31.2 %) mentioned the area in Q1 and 22 students (12.7 %) wrote about the area in Q2. As examples, the response of participant 167 to Q1 and the response of participant 4 to Q2 were given below.

Response of participant 167 (junior) to Q1:
It is used to find the area under a function when lower and upper bounds are given.



Response of participant 4 (freshman) to Q2:
The bounds are unknown. Thus, area cannot be calculated.
Its form is $\int f(x)dx$.

The area concept in the responses to indefinite integral is three-faceted. That is, in addition to the responses such as the one given above which is stating the impossibility of calculating area, some pre-service teachers wrote about area calculation in an infinite manner or wrote only the word area without stating the reasoning behind it. To give examples for the second type, the responses of participants 16 and 147 were presented below.

Response of participant 16 (freshman) to Q2:
To find area which does not have a particular bound.

Response of participant 147 (junior) to Q2:
Calculation of an infinite area. The result is a function.

Some pre-service teachers preferred to give examples in their answers. In Q1, 30 of them (17.3 %) wrote an example and 23 of them (13.3 %) gave an example in Q2. For example, participants 60 and 76 stated an example while explaining definite integral and indefinite integral respectively.

Response of participant 60 (sophomore) to Q1:
We know the limits of the integral.
For example, $\int_0^2 xdx$ is a definite integral. We find the result by writing firstly 2 and then 0 for the x value. We use definite integral in finding the area.

Response of participant 76 (sophomore) to Q2:
In indefinite integral, there is not a bound for the expression in it. That is, when $\int \cos x dx$ is given, the calculation of this integral is not related to a particular bound.

Regarding another concept in Table 1, 13 pre-service teachers (7.5 %) in Q1 and 11 pre-service teachers (6.4 %) in Q2 wrote down mathematical formulas. For example, the response of participant 70 to Q1 and the response of participant 129 to Q2 were given.

Response of participant 70 (sophomore) to Q1:
The bounds of integral are known. Assume that $f'(x)=F(x)$.

$$\int_a^b F(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$$

Response of participant 129 (junior) to Q2:
In this integral, limits are unspecific.
Indefinite integral for $f(x)$, $f(x)=F'(x)$

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

The minority of pre-service teachers attempted to describe the calculation process for both definite and indefinite integral when they were asked to describe them. While 16 pre-service teachers (9.2 %) wrote about the calculation process of definite integral, the number of participants representing the calculation process for indefinite integral is 5 (2.9 %). As examples for Q1 and Q2, the responses of participants 39 and 136 were presented below.

Response of participant 39 (sophomore) to Q1:
There are bounds in definite integral. That is, integral is calculated between two values. These two values correspond to upper bound and lower bound. In integral questions, after solving the question, the upper and lower bounds are subtracted by using them as values and then the result is found.

Response of participant 136 (senior) to Q2:
The expression given in the integral is considered as derivative of another expression and then it is found. In indefinite integral, this expression is written as a function. Unlike definite integral, the result is not calculated by writing the values.

Another concept referred by pre-service teachers while answering Q1 and Q2 is antiderivative. For this one, the number of pre-service teachers mentioned it as related to indefinite integral is higher compared to other. Eight pre-service teachers (4.6 %) stated antiderivative in explaining definite integral and 14 pre-service teachers (8.1 %) stated it for indefinite integral. For example, participants 50 and 118 simply inferred to antiderivative in their responses to Q1 and Q2, respectively.

Response of participant 50 (sophomore) to Q1:
It is an integral between particular bounds. Antiderivative

Response of participant 118 (junior) to Q2:
I can say that definite integral is the status of a function when its derivative is calculated.

In addition to the area, pre-service teachers associated the volume to both types of integrals. Nine of them (5.2 %) mentioned volume in Q1 and 3 of them (1.7 %) stated it in Q2. For instance, the responses of participant 138 to Q1 and participant 92 to Q2 were presented below.

Response of participant 138 (senior) to Q1:
There are specific boundary values for integral. The result is a number which is depending on the unknown. It is used in the area and volume calculations.

Response of participant 92 (junior) to Q2:
It is used to find the area of a shaded region given by an unlimited graph or a graph which goes to infinity or it is used to find the volume of a shape which is formed by rotating this graph with respect to any axis by any degree.

As given in Table 1, 16 pre-service teachers (9.2 %) stated that the result of definite integral is a number while 23 pre-service teachers (13.3 %) stated that the result of indefinite integral is an algebraic expression or a function or involves unknowns. The response of participant 89 regarding definite integral and the response of participant 170 regarding indefinite integral were presented as examples for these concepts.

Response of participant 89 (junior) to Q1:
When the bounds of an integral are known, we can reach a number as a result.

Response of participant 170 (senior) to Q2:
The result of integral is stated algebraically.

The last concept mentioned in the responses is the constant c. Regarding definite integral, 3 pre-service teachers (1.7 %) declared that there is not the constant c while 1 pre-service teacher (0.6%) asserted the existence of the constant c. The examples of these two cases were given below.

Response of participant 81 (sophomore) to Q1:
The bounds are known in definite integral. We find the result by using the bounds without writing the constant c.

Response of participant 142 (senior) to Q1:
The area is found by definite integral. After calculating integral, we write a constant.
$\int_1^2 2x\,dx$ Definite integral

On the other hand, 27 pre-service teachers (15.6 %) mentioned the constant c in describing indefinite integral. As an example, the response of participant 102 was presented.

Response of participant 102 (junior) to Q2:
The bounds are not known and the result cannot be stated numerically.
While calculating this type of integral, the expression +c is written.

To answer the second research question, the responses of participants to Q3 were analyzed and categorized under three codes, the details of which are given in Table 2.

Table 2.
The Frequencies of the Responses to Q3

Response Types	Frequency
No answer	18 (10.4 %)
Comparing definite integral and indefinite integral	130 (75.1 %)
Referring to the relation between definite integral and indefinite integral	25 (14.5 %)

As presented in Table 2, 18 pre-service teachers (10.4 %) did not answer Q3. The remaining answers involve the comparison of definite integral and indefinite integral by listing some characteristics of them. In this respect, pre-service teachers' responses were coded by focusing on whether they showed evidence regarding the relation between definite integral and indefinite integral or simply compared the characteristics of them. According to Table 2, 130 of them (75.1 %), nearly two-thirds of the participants, listed the concepts related to both types of integral without referring to the relation between them. As examples, the responses of participants 79 and 146 were presented below.

Response of participant 179 (sophomore) to Q3:
If the bounds are known in an integral, then it is named as definite integral. If it is not, then it is called as indefinite integral.

Response of participant 146 (senior) to Q3:
There are bounds in definite integral, we calculate the area. In indefinite integral, there is no bound.

On the other hand, 25 pre-service teachers (14.5 %) showed evidence related to the relation between definite and indefinite integral. For example, participant 95 wrote about the Fundamental Theorem of Calculus in Q3 even though she did not directly state the name of theorem.

Response of participant 95 (junior) to Q3:
In definite integral, there is no need to write the constant c. In indefinite integral, we find the result by relating to derivative.
In definite integral, we do the same operations in indefinite integral. Then, we calculate according to the bounds.
Indefinite integral $\int f'(x)dx = f(x) + c$
Definite integral $\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

Discussion & Conclusion

The findings of the present study pointed out that the concepts pre-service middle school mathematics teachers mentioned in describing definite integral and indefinite integral are quite similar. These concepts are summed up as follows; bound, notation, mathematical formula, example, area, volume, antiderivative, calculation process, the form of result (number, function, algebraic expression or unknown), and the constant c. Since participants of this study were taught indefinite integral and definite integral consecutively in Calculus I course, they might focus on the same concepts in their descriptions. Moreover, some of the concepts determined related to definite integral in this study are also mentioned in the studies of Grundmeier et al. (2006), Oberg (2000), Rasslan and Tall (2002), Yerushalmy and Swidan (2012), and Hall (2010). In more detail, Grundmeier et al. (2006) asked calculus students to define definite integral in words and reported that students focused on finding area, anti-derivative, infinite sum, and bounded quantity while defining definite integral. In the study of Oberg (2000), definite integral was mentioned as relating to computation, area, accumulation or summation, total change between boundaries, function, and an abstract object. Rasslan and Tall (2002) categorized definite integral as area, calculation procedure, giving examples, incorrect answer, and no answer. According to Yerushalmy and Swidan (2012), there are different focuses related to integral concept such as the area between x-axis and a graph, the Riemann sum as related to length, area or volume, and anti-derivative. Finally, in the study of Hall (2010), responses of introductory calculus course students regarding definite integral were categorized under five headings, which are Riemann sums, procedure, area, generality, and other. On the other hand, it can be stated that a few concepts mentioned related to indefinite integral in this study is similar to the study of Hall (2010), which coded students' responses concerning indefinite integral under four headings which are antiderivative, area, generality, and other. Because of the scarcity of studies about indefinite integral, this study might provide a deeper perspective regarding students' conceptualization of indefinite integral.

It was noticed that the aforementioned studies reported a few similar concepts regarding indefinite integral and definite integral, but the frequency order of concepts was different. As stated, the most mentioned concept in the present study was bound, which is inconsistent with the study of Grundmeier et al. (2006) which labeled bounded quantity as the last popular answer. Similarly, in the study of Oberg (2000), students' viewpoints of definite integral are mostly area and computation. However, the percentages of responses involving area and computation are not high in this study. The reason for the different degrees of focus on concepts might be related to the instructor in Calculus and the content of the textbooks used.

Although only one participant mentioned the existence of constant c in definite integral question, it might be considered among the substantial results of the study. This finding also matched with the study of Oberg (2000) which pointed out that some participants assumed the constant c should be added after computing definite integral but did not propose a reasonable explanation for adding the constant c. The reason behind this might that students generally do not comprehend the function of the constant c and assume it as a rule in the integration process. It was also reported in the studies that the constant c in indefinite integral was one of the points students have difficulty (Sağlam, 2011).

Another finding of this study is that students used notation in both definite integral and indefinite integral explanations. It is inconsistent with the study of Oberg (2000) which reported that students could not use notation and language correctly while explaining definite integral. Oberg (2000) mentioned this issue as a cognitive obstacle for students while presenting their understanding of definite integral. In this study, the reason for pre-service teachers' tendency to use notation while describing both definite and indefinite integral might be related to the fact that they are introduced with the notation of integral in high school. Moreover, pre-service teachers studied integral and solved many questions involving notations while preparing for the university entrance exam. Thus, it can be stated that they are familiar with the notations before the undergraduate Calculus course.

In this study, it was also pointed out that pre-service middle school mathematics teachers were considerably unsuccessful in explaining the relation between definite integral and indefinite integral. The majority of them listed the characteristics of them without referring to the relation between them. Although the Fundamental Theorem of Calculus indicates the relation between definite and indefinite integral (Adams & Essex, 2010), the participants had difficulty in evaluating and relating this theorem in this context. Since the participants generally used this theorem with the purpose of routine integral calculations, they might not understand the meaning of the theorem conceptually.

This study is limited to the responses of 173 pre-service middle school mathematics teachers in one university. To investigate how they describe definite integral and indefinite integral thoroughly, the follow-up interviews might be involved. According to Grundmeier et al. (2006), there was no clue whether students' knowledge about the definition of definite integral affects their ability in routine integral calculations. They thought that their ability to conduct routine calculations might be related to their ability to interpret integrals graphically. In further studies, how pre-service mathematics teachers' definitions affect their ability in routine integral calculations might be investigated.

All rules included in the "Directive for Scientific Research and Publication Ethics in Higher Education Institutions" have been adhered to, and none of the "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics" included in the second section of the Directive have been implemented.

Türkçe Sürümü

Giriş

Matematik eğitimi ile ilgili lisans düzeyindeki, özellikle analiz dersi ile ilgili çalışmalar, son on yılda artış göstermektedir (Bezuidenhout, 1998; Jones, 2013; Park, 2015; 2016). Analiz, matematiğin karmaşık ve temel bir alanıdır (Hall, 2010; Orton, 1983). Bunun yanında, analiz takip eden ileri matematik derslerine temel oluşturduğu için de önem teşkil etmektedir (Liu, 2009; Mahir, 2009; Nasari, 2008). Analiz dersinde öğrencilerin hem kavramsal hem de işlemsel anlama düzeylerini geliştirmeleri (Bezuidenhout, 2001), kavramları grafiksel, sayısal ve cebirsel olarak temsil etmeleri (Berry ve Nyman, 2003) ve farklı temsiller arasında geçiş yapabilmeleri (Goerdt, 2007) beklenmektedir. Analiz öğretiminin temel amacı, öğrencilerin önceki bilgilerini ve inançlarını bir uzmanın bilgi düzeyine yaklaşacak şekilde değiştirmektir (Pyzdrowski vd., 2013). Ayrıca, analiz öğretiminde öğrencilerin kavramlar arasındaki bağlantılara dair farkındalık düzeyleri de dikkate alınmalıdır (Yerushalmy ve Swidan, 2012). Ardışık soyutlama süreci baz alındığında, Skemp'e (1986) göre, "eğer belirli bir düzey kusurlu anlaşılırsa, sonrasındaki her şey tehlikededir. Bu bağımlılık muhtemelen matematikte başka herhangi bir konudan daha fazladır" (s.20). Analiz dersinde kavramlar bağımsız değildir ve önceki kavramlar üzerine inşa edilir (Mahir, 2009; Park, 2015). Örneğin, türevden önce fonksiyon ve limit gibi bazı kavramları doğru anlamaları gerektiğinden türev öğrenmek öğrenciler için zordur (Park, 2015). Benzer şekilde, integrali anlayabilmek için öğrencilerin öncelikle limit ve türev gibi kavramları anlamaları gerekmektedir.

Bu alanda yapılan çalışmalar, öğrencilerin analiz dersindeki gerçek öğrenmeleri ile öğrenmesi gerekenler arasında farklılık olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin analiz konularındaki genellikle ezberleme üzerine kurulu rutin işlemleri gerçekleştirmeleri, kavramsal anlama olarak yanlış yorumlanmaktadır (Grundmeier, Hansen ve Sousa, 2006). Benzer şekilde, öğrencilerin hesaplamaları analizin temel gerekliliği olarak kabul etmeleri ve bu hesaplama süreçlerine odaklanmaları, kavramsal anlamanın eksikliğine neden olmaktadır (Aspinwell ve Miller, 1997). İlgili araştırmalardan elde edilen bulgulara göre, öğrencilerin çoğu analizin temel kavramlarını tam olarak anlamamakta ve ezberleyerek rutin işlemlere odaklanmaktadır (Bezuidenhout, 1998; Bezuidenhout, 2001; Ferrini-Mundy ve Graham, 1991; Nasari, 2008; Oberg, 2000).

Alan yazın taramasına göre, araştırmacılar analizin öğrenilmesi ve öğretilmesi, temsiller, teknoloji entegrasyonu, öğrencilerin anlamaları, kavram tanımları, kavram imajları, kavram yanılgıları ve hatalar gibi çeşitli noktalara odaklanarak analiz kavramları üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, analizde yer alan belirli kavramlara doğrudan odaklanan çalışmalar da yürütülmüştür. Örneğin, araştırmacılar tarafından çoğunlukla incelenen analiz kavramlarının, fonksiyon (örn., Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989), limit (örn., Bezuidenhout, 2001), süreklilik (örn., Bezuidenhout, 2001; Tall ve Vinner, 1981), türev (örn., Park, 2015) ve integral (örn., Grundmeier vd., 2006; Rasslan ve Tall, 2002; Sağlam, 2011) olduğu görülmüştür. Öğrencilerin analiz dersini ne derece anladıklarını araştırmak adına yapılan çalışmalarda, limitin sıklıkla araştırılan bir kavram olduğu görülmüştür, ancak bu bağlamda türev ve integral üzerine de çalışılması gerekmektedir (Jones, 2013). Bu nedenle, bu çalışma integral ile ilgili alan yazına katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

İntegral, yalnızca analiz ve karmaşık analiz gibi pür matematik için değil, aynı zamanda fizik ve ekonomi gibi diğer disiplinler için de önemli bir kavramdır (Jones, Lim ve Chandler, 2017; Yerushalmy ve Swidan, 2012). Her ne kadar integral analiz dersindeki önemli konulardan biri olsa da, araştırmalar öğrencilerin genellikle integral üzerine çalışırken zorluk yaşadıklarını göstermektedir (Bezuidenhout ve Olivier, 2000; Jones, 2013; Oberg, 2000; Rasslan ve Tall, 2002). Öğrenciler integrali "türevin tersi" olarak kabul etmekte ve integral tekniklerini "eldeki işe yarar yöntemlerden biraz daha fazlası" olarak görmektedir (Berry ve Nyman, 2003, s.482). Alan yazın taramasında, belirli integral (örn., Oberg, 2000; McGee ve Martinez-Planell, 2014) ve belirsiz integral (örn., Swidan ve Naftaliev, 2019; Swidan & Yerushalmy, 2014) gibi integralin belirli bir bölümüne odaklanarak ya da integrali daha geniş bir perspektiften ele alan (örn., Orton, 1983; Sağlam, 2011) çalışmalar yapıldığı görülmüştür. Bu çalışmada ise belirli integral, belirsiz integral ve aralarındaki ilişki üzerinde durulmaktadır.

Belirli İntegral

Öğrenciler için integral öğrenme sürecindeki kritik konulardan biri belirli integraldir (Jones vd., 2017; Rasslan ve Tall, 2002). Öğrencilerden, belirli integral ile ilgili rutin işlemleri veya hesaplamaları yapmanın yanı sıra belirli integralin ne olduğunu da anlamaları beklenmektedir. Stewart (2010, s.343) belirli integral tanımında aralık, sınırlar, notasyon ve alan ile belirli integral arasındaki ilişkiye yer vermiştir. Benzer şekilde, Thomas, Weir, Hass ve Giordano (2005) belirli integrali tanımlarken Riemann toplamlarına odaklanmıştır. Belirli integral genellikle bir eğrinin altındaki alanı bulmakla ilişkilendirilmiştir (Hall, 2010). Oberg'e (2000) göre, belirli integral, hesaplama, alan, birikim veya toplama, x=a ve x=b arasındaki toplam değişim, fonksiyon ve soyut bir nesne olma gibi kavramlarla ilişkilendirilerek açıklanabilir. Rasslan ve Tall (2002) ise, lise son sınıf öğrencilerinin belirli integral tanımlamalarını, grafik ile x ekseni arasındaki alan, hesaplama prosedürü, örnek verme, yanlış cevap ve cevap yok olmak üzere beş tema altında kategorize etmiştir.

Yapılan çalışmalarda öğrencilerin belirli integral konusunda zorluk yaşadıkları ifade edilmiştir (Grundmeier vd., 2006; Oberg, 2000; Rasslan ve Tall, 2002). Örneğin, alan-integral ilişkisi, alanların toplamının integral açısından anlamı, belirli integralin tanımı ve Analizin Temel Teoremi gibi bazı konularda öğrenciler gerekli kavramsal anlamaya sahip değildir (Hall, 2010; Mahir, 2009; Rasslan & Tall, 2002). Attorps, Björk ve Radic (2013) belirli integrali etkili bir şekilde öğretmek adına bazı noktalara değinmiştir. Örneğin, öğrenciler belirli integrali yalnızca alanla ilişkilendirmemeli, daha geniş bir perspektiften bakmalı ve limit sürecinin çıktısı olan gerçek bir sayı olarak görmelidir. Bu şekilde, belirli integrali yalnızca pozitif bir sayı olarak değil, aynı zamanda sıfır veya negatif bir sayı olarak da kabul edebilirler. Ayrıca öğrencilerin belirli integral kavram imajlarının çoğunlukla alanla ilgili olduğu görülmüştür. Bu durumu değiştirmek adına, genellikle alan boyutunu vurgulayan ders kitapları revize edilebilir.

Belirsiz İntegral

Öğrencilerden belirsiz integral kavramını anlamaları da beklenmektedir. Belirsiz integralin kavranması, belirli integrali türevle ilişkilendirmede kritik bir role sahiptir (Swidan ve Yerushalmy, 2014). Thomas vd. (2005) belirsiz integrali şu şekilde tanımlamıştır; " f 'nin bütün ters türevlerinin kümesine, f 'nin x'e göre belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx$ ile gösterilir" (s.312). Başka bir deyişle, belirsiz bir integral, f 'nin belirli bir ters türevini veya her bir üyenin rastgele bir sabitle farklılaştığı bir ters türev ailesini ifade eder (Stewart, 2010; Swidan & Yerushalmy, 2014). Bahsedilen sabit genellikle c harfiyle temsil edilir.

Kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılmasında belirsiz integralin önemine rağmen, Hall (2010) öğrencilerin belirsiz integrali anlamaları konusunda yapılan çalışmaların azlığından bahsetmektedir. Örneğin, Metaxas (2007) birinci sınıf matematik öğrencilerinin belirsiz integrali anlamalarını incelemiş ve genellikle işlemsel olarak yorumladıklarını ve zorlandıkları bazı noktaların olduğunu ifade etmiştir. Hall (2010) ise, bir analize giriş dersindeki öğrencilerinden belirli integrali ve belirsiz integrali tanımlamalarını istemiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre, öğrencilerin belirsiz integrale ilişkin yanıtları ters türev, alan, genelleme ve diğer olmak üzere dört başlık altında sınıflandırılmıştır. Belirli integralin analizinde de alan, genelleme ve diğer kategorileri yer almaktadır. Ayrıca, Hall (2010) öğrenciler için belirli integralin daha açık olduğunu ve belirsiz integralin anlaşılmaz olduğunu belirtmiştir.

Analizin Temel Teoremi

Analizin Temel Teoremi, türev ve integral arasında bir bağlantı oluşturduğu ve Riemann toplamlarının limitini bulmak yerine integrandın ters türevini kullanarak integralleri hesaplamanın bir yolunu sunduğu için integral analizde temel bir teorem olarak kabul edilir (Stewart, 2010; Thomas vd., 2005). Ayrıca, Analizin Temel Teoremi belirli ve belirsiz integral arasındaki ilişkiyi gösterir (Adams ve Essex, 2010).

Ancak, Attorps ve diğerleri (2013), Analizin Temel Teoreminin varsayımları doğrulanmadığında, lisans öğrencilerinin bu teoremi uygulamada zorluk yaşadıklarını belirtmiştir.

Analizin Temel Teoremini, Thomas ve diğerleri (2005) kitaplarında iki kısım olarak aşağıdaki gibi açıklamışlardır:

Analizin Temel Teoremi Kısım 1

f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ üzerinde sürekli ise, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$ üzerinde süreklidir ve $\left(a,b\right)$'de türevlenebilir ve türevi $f(x)$'dir;

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$ (s.358)

Analizin Temel Teoremi Kısım 2

f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığının her noktasında sürekli ve F ise f'nin $\left[a,b\right]$ aralığındaki herhangi bir ters türevi ise,

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ olur (s.361)

Görüldüğü gibi, teoremin ilk bölümü bir integralin türevi ile ilgilidir ve belirli bir integralin üst limitini dikkate alarak nasıl türevlenebildiğini göstermektedir. Teoremin ikinci bölümü ise, bir türevin integrali hakkındadır ve integrandın ters türevi bulunduğunda integrali hesaplamanın yolunu açıklar (Adams & Essex, 2010). Analizin Temel Teoremine göre belirli integral ve belirsiz integral arasındaki ilişki, bu çalışmada odaklanılan konular arasındadır.

Çalışmanın Önemi

İlgili alan yazın incelendiğinde, öğrencilerin integral konusunda zorluk yaşadıkları görülmektedir (Jones, 2013; Mahir, 2009; Oberg, 2000; Orton, 1983). Örneğin, Orton (1983), integral yöntemlerini düzgün bir şekilde uygulayabilen analiz öğrencilerinin integrale ilişkin kavramsal anlamaya sahip olup olmadıklarını araştırmış ve öğrencilerin birçok kritik güçlük yaşadığını belirtmiştir. Öğrencilerin temel zorluklarından biri, integrali toplamların limiti olarak yorumlamasıdır. Benzer şekilde, Grundmeier ve diğerleri (2006) analiz öğrencilerinin integrali nasıl anladıklarını beş kriteri göz önünde bulundurarak incelemiştir; integralin anlamını sözlü olarak ifade etme, integralleri grafik olarak temsil etme, integrali sembollerle tanımlama, integralleri değerlendirme ve integral uygulamalarını gerçek dünya ile ilişkilendirme. Çalışmanın sonunda, Grundmeier ve diğerleri (2006), katılımcıların integral hesaplama sürecinde iyi olmalarına rağmen integrale dair kavram tanımlarında ve imajlarında eksiklikler olduğunu bildirmiştir. Bunun yanında, Orton (1983) "sebepsiz kuralların gerekçelendirilemeyeceğini" (s.10) vurgulamaktadır. Bu nedenle, öğrencilerin integral tekniklerinde yetkin hale gelmeden önce integral kavramının anlamının farkında olmaları gerekmektedir.

Öğrencilerin eksikliklerinin nedeni, formal tanımları yorumlayarak somut anlam oluşturamamaları olabilir (Özdemir, 2017). Öğrencilerin tanımları yorumlama ve belirli integralin ve belirsiz integralin anlamlarını kavrama konusundaki eksiklikleri, analizin gelecek uygulamalarında integral hakkında yanlış anlamalara yol açabilir (Grundmeier vd., 2006). Öğrencilerin kavramsal anlamadan yoksun oldukları noktaları belirlemek, ileri aşamadaki öğretimin yapılandırılmasında önemli bir adımdır (Mahir, 2009). Benzer şekilde, öğrencilerin integral gibi bir kavramı nasıl algıladıklarını anlamak, öğrencilerin lisans eğitimlerinde karşılaştıkları sorunların üstesinden gelmelerine yardımcı olmak adına eğitmenler için etkili bir adım olarak düşünülebilir. Böylece, eğitmenler öğrencilerin ön bilgilerine göre öğretim sürecini şekillendirebilir, belirli kavramlarda öğrencilerin olası yanılgılarını belirleyebilir ve bunların üstesinden gelmek için bazı yöntemler hazırlayabilir (Hall, 2010). Bu nedenle, matematik öğretmen adaylarının belirli integrali ve belirsiz integrali nasıl açıkladıkları bu çalışmanın amaçlarından biri olarak belirlenmiştir.

Öğrencilerin analiz kavramları ve doğru uygulamaları konusunda yetkin olmaları önem teşkil etmektedir (Mahir, 2009). İntegral, gelecek matematik dersleri için temel kavramlardan biri olarak kabul edildiğinden, matematik öğretmen adaylarının integral kavramını doğru öğrenmeleri gerekmektedir. Ayrıca, belirli integral ile belirsiz integralin benzer noktalar içermesi ve öğrencilerin belirsiz integralle ilgili bazı özellikleri belirli integrale yanlış aktarmalarından (Oberg, 2000) yola çıkarak, öğrencilerin bu kavramlar arasındaki bağlantıyı nasıl yorumladıkları ve bu konudaki yanlışlarının tespiti de önem teşkil etmektedir. Bu bağlamda, bu çalışmada ortaokul matematik öğretmen adaylarının belirli integral ile belirsiz integral arasındaki ilişkiyi ne ölçüde ifade edebildikleri de incelenmiştir.

Oberg'in (2000) belirttiği gibi, analiz dersi eğitmenleri, lisans öğrencilerinin integrali kavramalarının öneminin farkında olmalıdır. Bu çalışma, programın her kademesindeki öğretmen adayları ile yapıldığından, üniversite düzeyindeki öğrencilerin belirli integrali ve belirsiz integrali nasıl anladıklarının bir portresini sunarak analiz dersi eğitmenlerine yardımcı olabileceği söylenebilir. Sonrasında, eğitmenler integral öğretiminde daha etkili yöntemler ve sınıf uygulamaları geliştirebilir.

Bahsi geçen konular dikkate alınarak, bu çalışmanın birinci amacı matematik öğretmen adaylarının belirli integrali ve belirsiz integrali nasıl tanımladığını incelemektir. Çalışmanın bir diğer amacı ise bu kavramlar arasındaki ilişkiyi ne ölçüde açıklayabildiklerini araştırmaktır. Bu amaçla, çalışma aşağıdaki araştırma sorularını cevaplamayı amaçlamaktadır;

1. Ortaokul matematik öğretmen adayları belirli integrali ve belirsiz integrali tanımlarken ve açıklarken hangi kavramlara odaklanmaktadır?

2. Ortaokul matematik öğretmen adayları belirli integral ve belirsiz integral arasındaki ilişkiyi ne ölçüde açıklayabilmektedir?

Yöntem

Araştırma Deseni, Katılımcılar ve Çalışmanın Bağlamı

Bu çalışmada, araştırma sorularını cevaplamak için kesitsel tarama yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcıları Ankara ilinde bulunan bir devlet üniversitesinde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında yer alan 173 ortaokul matematik öğretmen adayı olarak uygun örnekleme ile belirlenmiştir. 173 öğretmen adayının 149'u (% 86.1) kadın, 24'ü (% 13.9) erkektir. Sınıf düzeyine göre ise, 25'i (% 14.5) birinci, 57'si (% 32.9) ikinci, 51'i (% 29.5) üçüncü ve 40'ı (% 23.1) son sınıftır. Görüldüğü gibi, birinci sınıf ortaokul matematik öğretmen adaylarının sayısı, çalışmaya katılmaya gönüllü olmamaları nedeniyle en azdır. Katılmak istememelerinin nedenleri, veri toplanması sırasında matematik dersi olarak sadece Genel Matematik dersini almış olmaları, bu dersin integral kavramını içermemesi ve lise matematik dersinden integrali net hatırlamamalarıdır. Diğer sınıf seviyelerinden sadece birkaç öğrenci katılmaya gönüllü olmamıştır. Bu durumun nedeni, veri toplama sırasında integral kavramını kapsayan Analiz I dersini almış olmaları olabilir. Bu nedenle, birinci sınıf öğretmen adaylarının mevcut araştırmaya katılımı, diğer yıl seviyelerine göre daha düşük bir yüzdeye sahiptir.

Türkiye'de İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı, dört yıllık bir lisans programıdır. Bu programdan mezun olanlar, ortaokullarda 5. sınıftan 8. sınıfa kadar matematik dersinde öğretmen olarak istihdam edilebilmektedir. Ayrıca, bu programdaki öğrenciler genellikle üçüncü ve dördüncü yarıyıllarda sunulan Analiz I ve Analiz II derslerinde integral üzerine çalışmaktadır. İntegral kavramı, Analiz III ve Diferansiyel Denklemler derslerinin içeriğinde de görülmektedir. Ayrıca Türkiye'de lise matematik dersinde fonksiyonlar, limit, süreklilik, türev, integral gibi bazı analiz kavramları işlenmektedir. Türkiye'deki ortaokul matematik öğretim programına göre (Milli Eğitim Bakanlığı, MEB, 2013) 12. sınıftaki öğrenciler integral üzerinde çalışmaya başlamaktadır.

Veri Toplama Süreci

Çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmen adaylarının belirli integral ve belirsiz integrali açıklarken değindikleri kavramları ve bu kavramların arasındaki ilişkinin farkında olup olmadıklarını incelemektir. Bu amaçla, ilgili literatür taranarak üç açık uçlu soru hazırlanmıştır (Adams ve Essex, 2010;

Hall, 2010; Orton, 1983; Stewart, 2010; Thomas vd., 2010). Pilot çalışma, öğretmen eğitimi programındaki her yıl seviyesinden iki ortaokul matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Daha ayrıntılı açıklarsak, pilot çalışmada katılımcılardan önceliklere soruları cevaplamaları istenmiştir. Sonrasında, katılımcılardan soruların açık olup olmadıklarını değerlendirmeleri ve sorular üzerine ikili gruplar olarak tartışmaları istenmiştir. Pilot çalışmanın sonuçlarına göre, soruların son hali ana uygulama için hazırlanmıştır. Soru 1 (S1) öğretmen adaylarından belirli integrali tanımlamalarını ve açıklamalarını, Soru 2 (S2) belirsiz integrali tanımlamalarını ve açıklamalarını ve Soru 3 (S3) belirsiz integral ve belirli integral arasındaki ilişkiyi açıklamalarını istemektedir. S1 ve S2 ile ilk araştırma sorusunun cevaplanması amaçlanmıştır. Katılımcıların belirsiz integrali ve belirli integrali anlatırken dikkate aldıkları kavramlar, bu sorulara verdikleri yanıtlar üzerinden incelenmiştir. Katılımcıların S1 ve S2'deki açıklamalarından belirsiz integral ve belirli integrali nasıl ilişkilendirdiklerini anlamak zor olduğundan, onları özellikle ilişki hakkında düşünmeye yönlendirmek için başka bir soru eklenmiştir. Böylece, ikinci araştırma sorusunu ele almak için ise S3'e yer verilmiştir.

Veri Analizi

Verilerin analizinde Braun ve Clarke'ın (2006) tematik analiz çerçevesi kullanılmış ve bulgular frekanslar ve yüzdeler aracılığıyla sunulmuştur. Tematik analizin "verilere aşina olma, başlangıç kodlarını oluşturma, temaları arama, temaları gözden geçirme, temaları tanımlama ve isimlendirme ve raporu hazırlama" şeklinde listelenen altı aşamasını takip ederek (Braun ve Clarke, 2006, s.87), katılımcıların üç soruya verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının cevapları öncelikle araştırmacılar tarafından incelenmiş ve kodlar hazırlanmıştır. Daha sonra, tüm cevaplar matematik eğitiminde doktora yapan bir araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Kodlamadan sonra, eşleşen kodlar kontrol edilmiştir ve farklı kodlar belirlenmiştir. Kodların büyük çoğunluğunun eşleştiği görülmüştür. Son olarak, tüm kodlayıcılar eşleşmeyen durumları tartışarak, tüm kodlamalar için bir fikir birliğine varmıştır.

Bulgular

Bahsedildiği gibi, S1 ve S2'de, ortaokul matematik öğretmen adaylarından sırasıyla belirli integrali ve belirsiz integrali tanımlamaları ve açıklamaları istenmiştir. Katılımcıların cevapları analiz edilmiş ve bahsettikleri kavramlara odaklanılarak kodlar oluşturulmuştur. Tablo 1'de analiz sonunda ulaşılan kavramlar sunulmuştur.

Tablo 1.
Belirli ve Belirsiz İntegrali Açıklarken Değinilen Kavramların Frekansları

Kavramlar	Belirli İntegral	Belirsiz İntegral
Cevap yok	-	5 (% 2.9)
Limit	160 (% 92.5)	130 (% 75.1)
Notasyon	70 (% 40.5)	56 (% 32.4)
Alan	54 (% 31.2)	22 (% 12.7)
Örnek verme	30 (% 17.3)	23 (% 13.3)
Matematiksel formüller	13 (% 7.5)	11 (% 6.4)
Hesaplama süreci	16 (% 9.2)	5 (% 2.9)
Ters türev	8 (% 4.6)	14 (% 8.1)
Hacim	9 (% 5.2)	3 (% 1.7)
Sonucun bir sayı olması	16 (% 9.2)	-
Sonucun bir fonksiyon ya da cebirsel ifade ya da bilinmeyen olması	-	23 (% 13.3)
c sabitinin olmaması	3 (% 1.7)	-
c sabitinin olması	1 (% 0.6)	27 (% 15.6)

Tablo 1'e göre, mevcut araştırmadaki tüm katılımcılar S1'i cevaplamış, ancak 5 öğretmen adayı (% 2.9) S2'yi cevaplamamıştır. Hem belirli integral hem de belirsiz integrali açıklarken bahsedilen kavramlar oldukça benzerdir. Her iki integralde de, sınır kavramı en yüksek yüzdeye sahiptir. S1'de 160 öğretmen adayı (% 92.5) belirli integrali tanımlarken sınırlar olduğunu belirtirken, 130 öğretmen adayı (% 75.1)

S2'de belirsiz integralin sınırı olmadığını ifade etmiştir. Örneğin, katılımcı 9'un S1'e cevabı ve katılımcı 106'nın S2'ye cevabı aşağıda yer almaktadır.

Katılımcı 9'un (birinci sınıf) S1'e cevabı:
Belirli integralin bir alt sınırı ve bir üst sınırı vardır.
$\int_a^b f(x)dx$ a ve b harfleri belirli sayılardır

Katılımcı 106'nın (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Belirli integralde alt ve üst sınır bilinmez. Herhangi bir sınır yok. Bu integral çeşidine örnek olarak $\int e^x dx$ verilebilir.

Bu noktada, verilen örnekler kodlama sürecini daha net açıklamaya yardımcı olacaktır. Katılımcı 9'un cevabı Tablo 1'de sınır ve notasyon olmak üzere iki kavram için kodlanmıştır, çünkü bu katılımcı belirli integrale ilişkin hem sınır hem de notasyonu belirtmiştir. Benzer şekilde, katılımcı 106'nın yanıtı Tablo 1'de hem sınır hem de örnek verme kategorileri için kodlanmıştır. Bu katılımcı, belirsiz integral için $\int f(x)dx$ veya $\int$ notasyonunu yazmak yerine bir örnek $\int e^x dx$ vermeyi tercih ettiğinden, notasyon kategorisinde kodlanmamıştır. Bu nedenle, veri analizinde, kategoriler birbirinden ayrışık olmadığından bir cevapta ilgili kavramlar varsa birden fazla kategori için kodlanmıştır.

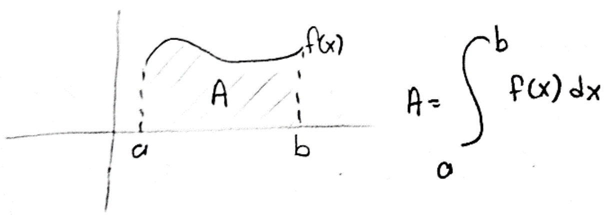
Tablo 1'den görüldüğü gibi, cevaplarda ikinci en yüksek yüzdeye sahip olan kavram, belirli integral ve belirsiz integralin notasyonu olmuştur. Belirli integrali tanımlarken 70 katılımcı (% 40.5) notasyona yer vermiştir. Benzer şekilde, 56 katılımcı ise (% 32.4) belirsiz integralin notasyonunu yazmıştır. Örneğin, katılımcı 107 hem belirli hem de belirsiz integrali açıklarken notasyona değinmiştir.

Katılımcı 107'nin (üçüncü sınıf) S1'e cevabı:
$\int_a^b f(x)dx$ olarak gösterilir. Sınırları a ve b dir.

Katılımcı 107'nin (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
$\int f(x)dx$ olarak gösterilir. Sınır olarak belirtilen belli değerleri yoktur.

Alan kavramı, her iki soruya verilen cevaplarda da üçüncü en yüksek yüzdeye sahiptir. 173 öğretmen adayından 54 kişi (% 31.2) S1'de alandan bahsederken 22 kişi (% 12.7) S2'de alan kavramına değinmiştir. Örnek olarak, katılımcı 167'nin S1'e cevabı ve katılımcı 4'ün S2'ye cevabı aşağıda verilmiştir.

Katılımcı 167'nin (üçüncü sınıf) S1'e cevabı:
Alt ve üst sınırlar verildiğinde bir fonksiyonun altındaki alanı bulmak için kullanılır.



Katılımcı 4'ün (birinci sınıf) S2'ye cevabı:
Sınırlar bilinmiyor. Bu nedenle, alan hesaplanamaz.
$\int f(x)dx$ şeklindedir.

Belirsiz integrale verilen yanıtlardaki alan kavramı üç yönlüdür. Yukarıda verilen ve alanın hesaplanmasının imkansızlığını ifade eden cevaplara ek olarak, bazı öğretmen adayları alan hesaplamasında sonsuz olmasını ele almışlar veya cevaplarının nedenini belirtmeden sadece alan kelimesini yazmışlardır. İkinci kategoriye örnek vermek için 16 ve 147 numaralı katılımcıların cevapları aşağıda sunulmuştur.

Katılımcı 16'nın (birinci sınıf) S2'ye cevabı:
Belirli bir sınır olmayan alanı bulmak

Katılımcı 147'nin (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Sınırsız bir alanın hesaplanması. Sonuç bir fonksiyondur.

Bazı öğretmen adayları cevaplarında örnek vermeyi tercih etmiştir. S1'de 30 katılımcı (% 17.3) örnek yazarken, S2'de 23 katılımcı (% 13.3) örnek vermiştir. Örneğin, 60 ve 76 numaralı katılımcılar sırasıyla belirli integrali ve belirsiz integrali açıklarken örnek vermişlerdir.

Katılımcı 60'ın (ikinci sınıf) S1'e cevabı:
İntegralin limitlerin biliyoruz.

Örneğin $\int_{0}^{2} xdx$ belirli integraldir. x değerinin yerine önce 2 sonra 0 yazarak sonucu buluruz. Belirli integrali alan bulmak için kullanırız.

Katılımcı 76'nın (ikinci sınıf) S2'ye cevabı:
Belirsiz integralde içerdiği ifade için bir sınır yoktur. Yani $\int \cos x dx$ verildiğinde, bu integralin hesaplaması belirli bir sınırla ilgili değildir.

Tablo 1'deki diğer bir kavram ise, katılımcıların matematiksel formüleri yazması üzerinedir. S1'de 13 öğretmen adayı (% 7.5) ve S2'de 11 öğretmen adayı (% 6.4) açıklamalarında matematiksel formül yazmıştır. Örnek olarak katılımcı 70'in S1'e cevabı ve katılımcı 129'un S2'ye cevabı verilmiştir.

Katılımcı 70'in (ikinci sınıf) S1'e cevabı:
İntegrali sınırları bilinmiyor. $f'(x)=F(x)$ olduğunu kabul edelim.

$$\int_{a}^{b} F(x)dx = f(x)\Big|_{a}^{b} = f(b) - f(a)$$

Katılımcı 129'un (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Bu integralde, limitler belirsiz.
$f(x)$ için belirsiz integral $f(x)=F'(x)$

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Belirli integral ve belirsiz integrali açıklamaları istendiğinde, az sayıda öğretmen adayı hesaplama sürecini betimlemiştir. 16 öğretmen adayı (% 9.2) belirli integralin hesaplama sürecini yazarken, 5 öğretmen adayı (% 2.9) belirsiz integralin hesaplama sürecini ifade etmiştir. S1 ve S2 cevaplarına örnek olarak katılımcı 39 ve 136 cevapları aşağıda sunulmuştur.

Katılımcı 39'un (ikinci sınıf) S1'e cevabı:
Belirli integralin sınırları vardır. Yani, integral iki değer arasında hesaplanır. Bu iki değer üst sınır ve alt sınırdır. İntegral sorularında, soru çözüldükten sonra üst ve alt sınırlar değeri çıkarılır ve ardından sonuç bulunur.

Katılımcı 136'nın (dördüncü sınıf) S2'ye cevabı:
İntegralde verilen ifade başka bir ifadenin türevi olarak kabul edilir ve sonra bulunur. Belirsiz integralde bu ifade fonksiyon olarak yazılır. Belirli integralin aksine, sonuç değerler yazılarak hesaplanmaz.

Öğretmen adaylarının S1 ve S2'ye cevap verirken değindikleri bir diğer kavram ise ters türevdir. Belirsiz integralde ters türevi ifade eden öğretmen adaylarının sayısı belirli integrale göre daha fazladır. Ters türeve 8 öğretmen adayı (% 4.6) belirli integrali açıklamasında, 14 öğretmen adayı (% 8.1) ise belirsiz integral açıklamasında yer vermiştir. Örneğin, katılımcı 50 ve 118, sırasıyla S1 ve S2'ye verdikleri cevaplarda ters türeve değinmiştir.

Katılımcı 50'nin (ikinci sınıf) S1'e cevabı:
Belirli sınırlar arasındaki integraldir. Terstürev

Katılımcı 118'in (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Belirli integral bir fonksiyonun türevi hesaplandığındaki halidir diyebilirim.

Alana ek olarak, öğretmen adayları hacim kavramını her iki tür integral ile ilişkilendirmiştir. İlk soruda 9 öğretmen adayı (% 5.2) hacimden bahsederken, ikinci soruda 3 öğretmen adayı (% 1.7) hacim kavramını belirtmiştir. Örneğin, katılımcı 138'in S1'e ve katılımcı 92'nin S2'ye cevapları aşağıda sunulmuştur.

Katılımcı 138'in (dördüncü sınıf) S1'e cevabı:
İntegralde belirli sınır değerleri vardır. Bilinmeyene bağlı olarak sonuç bir sayı olarak bulunur. Alan ve hacim hesaplamalarında kullanılır.

Katılımcı 92'nin (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Sınırsız bir grafik ya da sonsuza giden bir grafikle verilen taralı bölgenin alanını bulmak için kullanılır. Ya da grafiğin herhangi bir derecede herhangi bir eksene göre döndürülmesiyle oluşan şeklin hacminin hesaplanmasında kullanılır.

Tablo 1'de verildiği gibi, 16 öğretmen adayı (% 9.2) belirli integralin sonucunun bir sayı olduğunu belirtirken, 23 öğretmen adayı (% 13.3) belirsiz integralin sonucunun bir cebirsel ifade veya bir fonksiyon olduğunu veya bilinmeyenler içerdiğini yazmıştır. Katılımcı 89'un belirli integrale ilişkin yanıtı ve katılımcı 170'in belirsiz integrale ilişkin yanıtı bu kavramlara örnek olarak sunulmuştur.

Katılımcı 89'un (üçüncü sınıf) S1'e cevabı:
İntegralin sınırları bilindiğinde, sonuç olarak bir sayı buluruz.

Katılımcı 170'in (dördüncü sınıf) S2'ye cevabı:
İntegralin sonucu cebirsel olarak ifade edilir.

Cevaplarda belirtilen son kavram c sabitidir. Belirli integralde 3 öğretmen adayı (% 1.7) c sabitinin olmadığını belirtirken, 1 öğretmen adayı (% 0.6) c sabitinin varlığını ileri sürmüştür. Bu iki durumun örnekleri aşağıda verilmiştir.

Katılımcı 81'in (ikinci sınıf) S1'e cevabı:
Belirli integralde, sınırlar bilinir. Sonucu, c sabitini yazmadan sınırları kullanarak buluruz.

Katılımcı 142'nin (dördüncü sınıf) S1'e cevabı:
Belirli integralden alan bulunur. İntegrali hesapladıktan sonar, bir sabit yazarız.

$\int_{1}^{2} 2x dx$ Belirli integral

Diğer yandan, 27 öğretmen adayı (% 15.6) belirsiz integrali tanımlarken c sabitinden bahsetmiştir. Örnek olarak, katılımcı 102'nin cevabı aşağıda verilmiştir.

Katılımcı 102'nin (üçüncü sınıf) S2'ye cevabı:
Sınırlar bilinmez ve sonuç sayısal olarak ifade edilemez.
Bu integral çeşidinde hesaplama yaparken, +c ifadesi yazılır.

İkinci araştırma sorusunu cevaplamak için, katılımcıların S3'e verdikleri cevaplar incelenmiş ve Tablo 2'de verilen üç kod altında sınıflandırılmıştır.

Tablo 2.
S3 Cevaplarının Frekansları

Cevap Çeşitleri	**Frekans**
Cevap yok	18 (% 10.4)
Belirli integral ve belirsiz integrali karşılaştırma	130 (% 75.1)
Belirli integral ve belirsiz integral arasındaki bağlantıya dair belirti içeren cevaplar	25 (% 14.5)

Tablo 2'de sunulduğu üzere, 18 öğretmen adayı (% 10.4) S3'e cevap vermemiştir. Diğerlerinin cevapları ise belirli integral ile belirsiz integralin bazı özelliklerini listeleyerek karşılaştırılmasını içermektedir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının cevapları, belirli integral ile belirsiz integral arasındaki bağlantıya dair belirti içerip içermemesine odaklanılarak kodlanmıştır. Tablo 2'ye göre katılımcıların yaklaşık üçte ikisine denk gelen 130 öğretmen adayı (% 75.1), aralarındaki bağıntıya değinmeden her iki integral türü ile ilgili özellikleri listelemiştir. Örnek olarak, katılımcı 79 ve 146'nın cevapları aşağıda sunulmuştur.

Katılımcı 79'un (ikinci sınıf) S3'e cevabı:
İntegralde sınırlar biliniyorsa, belirli integral olarak isimlendirilir. Bilinmiyorsa belirsiz integral olarak isimlendirilir.

Katılımcı 146'nın (dördüncü sınıf) S3'e cevabı:
Belirli integralde sınırlar vardır, alanı hesaplarız. Belirsiz integralde, bir sınır yoktur.

Diğer yandan, 25 öğretmen adayının cevapları (% 14.5) belirli ve belirsiz integral arasındaki bağlantıya ilişkin belirtiler içermektedir. Örneğin, katılımcı 95, teoremin adını doğrudan belirtmemiş olmasına rağmen S3'te Analizin Temel Teoremine yer vermiştir.

Katılımcı 95'in (üçüncü sınıf) S3'e cevabı:
Belirli integralde, c sabitini yazmaya gerek yoktur. Belirsiz integralde, sonucu türevle ilişkilendirerek bulabiliriz.
Belirli integralde, belirsiz integraldeki aynı işlemleri yaparız. Sonrasında, sınırlara göre hesaplarız.
Belirsiz integral $\int f'(x)dx = f(x) + c$

Belirli integral $\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmanın sonuçları, ortaokul matematik öğretmen adaylarının belirli integrali ve belirsiz integrali tanımlarken bahsedilen kavramlarının oldukça benzer olduğunu göstermiştir. Bu kavramlar ise sınır, notasyon, matematiksel formül, örnek verme, alan, hacim, ters türev, hesaplama süreci, sonucun şekli (sayı, fonksiyon, cebirsel ifade veya bilinmeyen) ve c sabiti şeklinde sınıflandırılmıştır. Katılımcılara Analiz I dersinde belirsiz integral ve belirli integral ardışık olarak öğretildiği için, açıklamalarında benzer kavramlara odaklanmış olabilirler. Ayrıca, bu çalışmada belirli integrale ilişkin belirlenen bazı kavramlara Grundmeier ve diğerleri (2006), Oberg (2000), Rasslan ve Tall (2002), Yerushalmy ve Swidan (2012) ve Hall (2010) tarafından yürütülen çalışmalarda da rastlanmaktadır. Daha ayrıntılı ele alırsak, Grundmeier ve diğerleri (2006) matematik öğrencilerinden belirli integrali tanımlamalarını istemiş ve öğrencilerin tanımlarken alan, anti-türev, sonsuz toplam ve sınırlı nicelik bulmaya odaklandıklarını bildirmişlerdir. Oberg'in (2000) çalışmasında, belirli integrale dair hesaplama, alan, birikim veya toplama, sınırlar arasındaki toplam değişim, fonksiyon ve soyut bir nesne kategorilerine değinilmiştir. Rasslan ve Tall (2002) belirli integrali alan, hesaplama süreci, örnek verme, yanlış cevap ve cevap yok olarak kategorize etmiştir. Yerushalmy ve Swidan'a (2012) göre, x ekseni ile bir grafik arasındaki alan, uzunluk, alan veya hacimle ilişkili Riemann toplamı ve anti-türev gibi integral kavramına dair odaklanılan farklı noktalar vardır. Son olarak, Hall (2010) çalışmasında, matematik dersi öğrencilerinin belirli integrale ilişkin yanıtlarını, Riemann toplamı, prosedür, alan, genelleme ve diğerleri olmak üzere beş başlık altında toplamıştır. Diğer yandan, bu çalışmada belirsiz integrale ilişkin değinilen birkaç kavramın, öğrencilerin belirsiz integrale ilişkin yanıtlarını ters türev, alan, genelleme ve diğer olmak üzere dört başlık altında kodlayan Hall'ın (2010) çalışmasına benzer olduğu söylenebilir. Belirsiz integrale ilişkin çalışmaların azlığı nedeniyle, bu çalışma öğrencilerin belirsiz integrali kavramsallaştırmasına ilişkin daha derin bir bakış açısı sağlama amacındadır.

Yukarıda belirtilen çalışmalarda belirsiz integral ve belirli integrale ilişkin birkaç benzer kavram rapor edildiği, ancak kavramların sıklık sırasının farklı olduğu görülmektedir. Belirtildiği gibi, mevcut çalışmada en çok bahsedilen kavram sınırdır ve bu sonuç sınırı en az verilen cevap olarak ifade eden Grundmeier ve diğerlerinin (2006) çalışması ile çelişmektedir. Benzer şekilde, Oberg'in (2000) çalışmasında, öğrencilerin belirli integrale bakış açıları çoğunlukla alan ve hesaplamadır. Ancak, alan ve hesaplamayı içeren yanıtların yüzdeleri bu çalışmada yüksek değildir. Kavramlara farklı derecelerde odaklanılmasının nedeni, Analiz dersindeki eğitmen ve kullanılan ders kitaplarının içeriğiyle ilgili olabileceği düşünülmektedir.

Belirli integral sorusunda sadece bir katılımcı c sabitinin varlığından bahsetse de, bu durum çalışmanın önemli sonuçları arasında sayılabilir. Bu bulgu, bazı katılımcıların belirli integrali hesapladıktan sonra c sabitinin eklenmesi gerektiğini varsaydığını ancak c sabitini eklemek için makul bir açıklama önermediğini belirten Oberg'in (2000) çalışmasıyla da benzerlik göstermektedir. Bunun nedeni, öğrencilerin genel olarak c sabitinin işlevini anlamamaları ve bunu integral sürecinde bir kural olarak kabul etmeleridir. Araştırmalarda ayrıca belirsiz integraldeki c sabitinin öğrencilerin zorlandıkları noktalardan biri olduğu belirtilmiştir (Sağlam, 2011).

Bu çalışmanın bir başka sonucu, öğrencilerin hem belirli integral hem de belirsiz integral açıklamalarında notasyonu kullanmalarıdır. Bu sonuç, Oberg'in (2000) belirli integrali açıklarken öğrencilerin notasyonu ve dili doğru kullanamadıklarını bildiren çalışmasıyla çelişmektedir. Oberg (2000), belirli integral anlama sürecince bu konuyu öğrenciler için bilişsel bir engel olarak belirtmiştir. Mevcut çalışmada öğretmen adaylarının hem belirli hem de belirsiz integrali tanımlarken notasyonu kullanma eğiliminin nedeni, lisede integral notasyonu ile tanışmaları olabilir. Ayrıca, öğretmen adayları üniversite giriş sınavına hazırlanırken integral üzerine çalışmış ve notasyon içeren birçok soruyu çözmüştür. Bu nedenle üniversitedeki Analiz dersi öncesi notasyonlara aşina oldukları söylenebilir.

Mevcut çalışmada, ortaokul matematik öğretmen adaylarının belirli integral ile belirsiz integral arasındaki ilişkiyi açıklamada oldukça başarısız oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların çoğunluğu aralarındaki ilişkiye değinmeden sadece bu kavramların özelliklerini sıralamıştır. Analizin Temel Teoremi belirli ve belirsiz integral arasındaki ilişkiye işaret etse de (Adams ve Essex, 2010), katılımcıların bu teoremi bu bağlamda değerlendirmekte ve ilişkilendirmekte güçlük yaşadığı görülmüştür. Katılımcılar genellikle bu teoremi rutin integral hesaplamaları amacıyla kullandıklarından, teoremin anlamını kavramsal olarak özümsememiş olabilirler.

Bu çalışma, bir üniversitede okuyan 173 ortaokul matematik öğretmen adayının cevapları ile sınırlıdır. Belirli integrali ve belirsiz integrali kapsamlı bir şekilde nasıl tanımladıklarını araştırmak için, çalışmaya görüşmeler dahil edilebilir. Grundmeier ve diğerleri (2006), öğrencilerin belirli integralin tanımı hakkındaki bilgilerinin rutin integral hesaplamalarını etkileyip etkilemediğine dair hiçbir ipucu olmadığını belirtmiştir. Ayrıca, rutin hesaplama yapma becerilerini, integralleri grafiksel olarak yorumlamaları ile ilgili olabileceğini ifade etmişlerdir. Yapılacak çalışmalarda matematik öğretmen adaylarının tanımlarının rutin integral hesaplamalarını nasıl etkilediği araştırılabilir.

“Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında yer alan tüm kurallara uyulmuş ve yönergenin ikinci bölümünde yer alan “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemlerden” hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

References

Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus-A complete course* (7th ed.). Toronto, Pearson.

Aspinwell, L., & Miller, D. (1997). Students’ positive reliance on writing as a process to learn first semester calculus. *Journal of Instructional Psychology, 24*(4), 253-261.

Attorps, I., Björk, K., & Radic, M. (2013). Varied ways to teach the definite integral concept. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 8*(2-3), 81-99.

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students’ graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 481-497.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(3), 389-399.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500.

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students’ conceptions of the integral. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Proceeding of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73–80). Hiroshima, Japan.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K.G (1991). An overview of the Calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching and curriculum development. *American Mathematical Monthly, 98*(7), 627-635.

Goerdt, L. S. (2007). *The effect of emphasizing multiple representations on calculus students’ understanding of the derivative concept*. (Doctoral dissertation). The University of Minnesota.

Grundmeier, T. A., Hansen, J., & Sousa, E. (2006). An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *Problem, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 16*(2), 178-191.

Hall, W. L. (2010). *Language and area: influences on student understanding of integration.* (Master's thesis). University of Maine.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students’ symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 122-141.

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Integrals in pure mathematics and applied contexts. *The Journal of Mathematical Behavior, 38*, 9-28.

Jones, S. R., Lim, Y., & Chandler, K.R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1075-1095.

Liu, P. H. (2009). History as a platform for developing college students’ epistemological beliefs on mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 473-499.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 201-211.

McGee, D., & Martinez-Planell, R. (2013). A study of effective application of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 883-916.

Metaxas, N. (2007). Difficulties on Understanding the Indefinite Integral. In Woo, J.H., Lew, H.C., Park, K.S., Seo, D.Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.265-272). Seoul: PME.

Ministry of National Education [MoNE] (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12 sınıflar öğretim programı* [Secondary school mathematics curriculum grades 9 to 12]. Retrieved on February 15, 2018 from http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343.

Nasari, Y. G. (2008). *The effect of graphing calculator embedded materials on college students' conceptual understanding and achievement in a calculus I course.* (Doctoral dissertation). Wayne State University.

Oberg, R. (2000). *An investigation of undergraduate calculus students understanding of the definite integral.* (Doctoral dissertation). University of Montana.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 1-18.

Özdemir, Ç. (2017). *The development of an inquiry-based teaching unit for Turkish high school mathematics teachers on integral calculus: the case of definite integral.* (Master's thesis). Bilkent University.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 233-250.

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(3), 395-421.

Pyzdrowski, L. J., Sun, Y., Curtis, R., Miller, D., Winn, G., & Hensel, R. A. (2013). Readiness and attitudes as indicators for success in college calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(3), 529-554.

Rasslan, S., & Tall, D. O. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Norwich, UK.

Sağlam, Y. (2011). *Üniversite öğrencilerinin integral konusunda görsel ve analitik stratejileri* [Undergraduate students' visual and analytic strategies in integral topic]. (Doctoral dissertation). Hacettepe University.

Skemp, R. (1986). *The psychology of mathematics learning.* Suffolk: Penguin Books.

Stewart, J. (2010). *Calculus: Concepts and contexts.* (4th edition). Brooks/Cole, Thomson Learning.

Swidan, O., & Naftaliev, E. (2019). The role of the design of interactive diagrams in teaching–learning the indefinite integral concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 464-485.

Swidan, O., & Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *ZDM, 46*(4), 517-531.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. (2005). *Thomas' calculus* (11th Edition). Pearson Education: Addison-Wesley.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 14*(3), 239–305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Yerushalmy, M., & Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 287-306.