

A New Solution Approach for Determining Pressure Drop on Axial Non-Newtonian Flow in Annuli

 Teymuraz ABBASOV^{1,*}  Hatice BİLGİLİ² 
¹InonuUniversity, Faculty of Engineering, Department of Electric-Electronic Engineering, Battalgazi/MALATYA

²Inonu University, Faculty of Engineering, Department of Biomedical Engineering, Battalgazi/MALATYA

Graphical/Tabular Abstract

In this study, analytical calculation formula of radial coordinate of the region where the velocity of flow is maximum in the space between the concentric annuli as an empirical approach is proposed. In general, the graphic drawn according to the formula which depends on rheological conduct of the fluid environment (n) and the ratio of radii of tubes (δ) is obtained on the following picture.

Article Info:

Research article

Received: 07.08.2020

Revision: 14.09.2020

Accepted: 14.09.2020

Highlights

- Power Law.
- Concentric Annuli.
- Pressure drop
- Coordinate of the region where the flow rate is max

Keywords

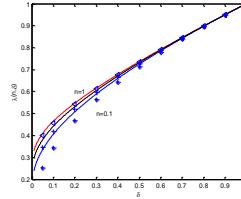
 Non-Newtonian
 Power-Law
 Flow Rate
 Pressure Drop
 Rheology
 Concentric Annuli.


Figure A. The variation of parameter $\lambda(n, \delta)$ with respect to δ .

In Figure A the symbols are numerical values from [11,12] for $n = 0.1, 0.5, 1$. The lines are the theoretical curves calculated according to Equation 9 in these values of n ; $n = 0.1$ (blue), $n = 0.5$ (black), $n = 1$ (red). As seen in Figure A, the theoretical results are agree with the results given in the literature in the form of approximate tables/graphs. Thus, the graphical solutions proposed [11-12] nearly half a century ago were integrated with the analytical solution we proposed.

Purpose: The main purpose of this study is to create an analytical calculation of the instantaneous flow rate or pressure drop, which is important for non-Newtonian flow in the space between the concentric annuli. For this, an analytical formula is proposed for calculating the $\lambda(n, \delta)$ radial coordinate, which is important for determining the non-Newtonian flow profile. This formula completes the previous formulas presented in the literature.

Theory and Methods: The solution of the problem was made by determining the radial coordinate of the point where the velocity profile is maximum, by following the approximate expression of the shear stress-shear rate characteristics according to the Power-Law model for the flow in the concentric annuli.

Results: The results showed that it is possible to determine the flow rate or pressure drop analytically in concentric cylindrical annuli. The analytical approach proposed for this purpose has been found to include other approximate solutions presented in the literature to date.

Conclusion: Simple empirical formula given in Equation 9 is proposed to calculate the parameter $\lambda(n, \delta)$ easily, which is the coordinate of the region where the flow velocity is the maximum in the axial flows of non-Newtonian rheological fluids in concentric annuli. Although this equation is not an expression derived from the solution of the hydrodynamic problem, it applies at all variation intervals ($n = 0 \dots \infty$) for non-Newtonian behavior parameter n of rheological fluids, and satisfies all hydrodynamic and rheological boundary conditions. Therefore, the approximate analytical calculation method proposed in this study will allow the calculation of basic parameters such as pressure change and flow rate without using complex methods such as interpolation, graph and table data.



Non-Newtonian Sıvıların Aksiyel Halka Akışında Basınç Kaybının Belirlenmesi için Yeni Bir Çözüm Yaklaşımı

Teymuraz ABBASOV^{1*} Hatice BİLGİLİ²

¹İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Battalgazi/MALATYA

²İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Biyomedikal Mühendisliği Bölümü, Battalgazi/MALATYA

Makale Bilgisi

Araştırma makalesi
 Başvuru: 07.08.2020
 Düzeltme: 14.09.2020
 Kabul: 14.09.2020

Anahtar Kelimeler

Non-Newtonian
Power-Law
Akış Hızı
Basınç Düşüşü
Reoloji
Konsentrik Annuli

Keywords

Non-Newtonian
Power-Law
Flow Rate
Pressure Drop
Rheology
Concentric Annuli

Öz

Bu çalışmada reodinamiğin temel problemlerinden biri olan akışkanların eş eksenli (konsentrik) silindirik borularda non-Newtonian (Power-Law) akışında basınç düşüşünü belirlemek için yeni yaklaşık analitik bir yöntem sunulmuştur. Bu yöntemde, Fredrickson & Bird (1958) ve Hanks & Larsen (1979)'in sonuçları dikkate alınarak Power-Law akış profilinin boşluktaki akış hızının maksimum olduğu bölgenin koordinatlarını analitik olarak belirleyen formül önerilmiştir. Önerilen analitik formülün Power-Law reolojik modelin parametrelerinin bütün değişim aralığında ($n = 0 \dots \infty$) geçerli olduğu saptanmıştır. Elde edilen sonuçların literatürde sunulan verilerle iyi uyum sağladıkları grafiklerle gösterilmiştir. Önerilen formülün farklı bilim dallarında hidrodinamik, ısı ve kütle transferi problemlerinin yaklaşık çözümlerine de önemli katkı sağlayacağı vurgulanmıştır.

A New Solution Approach for Determining Pressure Drop on Axial Non-Newtonian Flow in Annuli

Abstract

In this study, a new approximate analytical method is presented to determine the pressure drop in non-Newtonian (Power-Law) flow of concentric annuli of fluids, which is one of the main problems of rheodynamics. In this method, considering the results of Fredrickson & Bird (1958) and Hanks & Larsen (1979), the formula that analytically determines the coordinates of the region where the Power-Law flow profile has maximum flow velocity in annuli is proposed. The proposed analytical formula has been found to be valid across the entire change range ($n = 0 \dots \infty$) of the parameters of the Power-Law rheological model. It is shown with the graphics that the results obtained accord with the data presented in the literature. It is emphasized that the proposed formula will also contribute significantly to the solutions of hydrodynamic, heat and mass transfer problems in different disciplines.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Non-Newtonian özellikli akışkan ortamların boru ve kanallardaki aksiyel akışı reodinamiğin temel işlemlerinden olup, çeşitli sanayi uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır [1-3]. Petrol sanayisinde [1-4], gıda sanayisinde [5], ağır sanayi teknolojilerinde [1-4,6] ve diğer birçok alanda non-Newtonian sıvı akışının problemlerinin çözümleri halen güncel olarak kalmaktadır. İlave olarak günümüzde mikro ve nano akış sistemleri gibi yeni tür teknolojiler gelişmektedir. Gelişen bu tür teknolojilerle birlikte, non-Newtonian akış sistemlerinin farklı mikroeolojik problemleri de ortaya çıkmıştır [7]. Akışkan ortamların non-Newtonian özelliklerinin en etkili olduğu sistemlerden biri de tıp ve biyolojik sistemlerdir [8,9]. Özellikle kan ve kan analoglarının damarlardaki dolaşım mekanizmasının modellenmesinde ve kan ile ilgili yapılan invitro çalışmalarda akışkan ortamların reodinamiğinin düzgün olarak seçilmesi işlemi, mikroeolojik bu problemlerin çözümünde anahtar rol oynamaktadır [8-10]. Bu işlemlerin performansının yüksek olması için ise önemli parametrelerin belirlenmesi gerekmektedir.

Bunun için önce akışkan ortamın reodinamik modelinin doğru seçilmesi ve sonra anlık debi, basınç değişimi gibi önemli parametrelerin belirlenmesi gerekmektedir.

Non-Newtonian özellikli akışkan ortamların reolojik modelleri yaklaşık yüzyıl içerisinde birçok kez oluşturulmuştur. Bunlardan en yaygın olarak teorik ve pratik uygulama problemlerinin çözümünde kullanılanlar; Power-Law (Ostwald-de Waele), Bingham, Herschel Bulkley, Ellis, Sisko, Carry, Casson, Schulman gibi modellerdir [1-4].

Kan ve kan analoglarının reodinamiğinin incelenmesinde ise reolojik modeller arasında Power-Law, Casson, Carreau Yasuda gibi modellerin kullanılması daha yaygındır [9]. Biyomekanik ve hidrodinamik problemlerin analitik ve yaklaşık yöntemlerle analizinde ise, basit olmasından kaynaklı olarak en yaygın kullanılan model Power-Law (Ostwald-de Waele) reolojik modelidir [1-4]. Ancak bu model kayma hızının düşük ve çok büyük değerlerinde hatalı, kayma hızının belirli bir değer aralığında ise daha doğru sonuçlar vermektedir. Buna rağmen Power-Law akış modeli petrol, sondaj, ağır sanayi, gıda sanayisi, biyomekanikteki akışkan problemlerinde, bütün reolojik ortamlardaki ısı ve kütle transferi, konvektif taşınım olaylarının teorik ve pratik problemlerinin çözümlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır [4]. Yapılan çalışmalarda ortaya çıkan esas problemlerden biri non-Newtonian (Power-Law) akışkanların boru ve kanallardaki akış hızının, anlık debinin ve basınç değişiminin belirlenmesidir. Non-Newtonian akışkanların eş eksenli (konsentrik) veya iç içe kaçık eksenli (eksantrik) borulardaki akışının belirlenmesi hidrodinamiğin en temel problemlerinden biri olarak çok sayıda araştırmacılar tarafından incelenmiştir [11-27]. Halen de bu konu araştırmacıların dikkat merkezinde kalmaktadır [28]. Literatürde sunulan çalışmaların sonuçları incelendiğinde, bu problemle ilgili olarak, ancak Newtonian akış ortamları için analitik formüllerinin elde edildiği, fakat non-Newtonian modeller için numerik, grafo-analitik çözümler veya interpolasyon yaklaşımlar kullanıldığı açıkça görülmektedir [11-27]. Bu çözümler içerisinde ise temel yaklaşım Fredrickson & Bird (1958) ve Hanks & Larsen (1979) tarafından sunulan çözümlerdir [11,12]. Dahası Power-Law reolojik modelinin yapısına özgün hatalarından dolayı Fredrickson & Bird (1958)'ün yaptığı çözümlerde çoğu değerler interpolasyon işlemleri yapılarak elde edilmiştir [11]. Hanks & Larsen (1979) ise yaptıkları bir çalışmada, bu yaklaşımı geliştirerek anlık debi ve basınç değişimi için yaklaşık analitik çözüm formülünü önermişlerdir [12]. Fakat bu formülün içerdiği bazı parametreler de ancak tablo veya nomograflar vasıtasıyla belirlenebilmektedir. Dolayısıyla bu formüller tam anlamı ile analitik hesaplamalar için yeterince kullanışlı değildir. Daha sonraki geliştirilen teorik ve deneysel yaklaşımlar ise [29] ampirik ve yaklaşık formüller olup, yalnız belirli koşullar için geçerlidir. Non-Newtonian sıvıların pratik uygulamalarına ait bazı çalışmalarda [30] elde edilen analitik çözümler ise daha çok Newtonian'e yakın reolojik ortamlar için, yani zayıf non-Newtonian ortamlar için geçerlidir. Pratikte ise kullanılan ortamların reodinamiğinin incelenmesinde akışkanların non-Newtonian özelliklerinin geniş aralıklarda değiştiği bilinmektedir. Dolayısıyla, konsentrik boru ve yarıklarda Power-Law akış modellerinde hız profiline değişimi, anlık debi ve basınç düşüşleri için günümüze kadar kullanılan hemen hemen bütün formüller analitik bakımdan kullanışlı değildir.

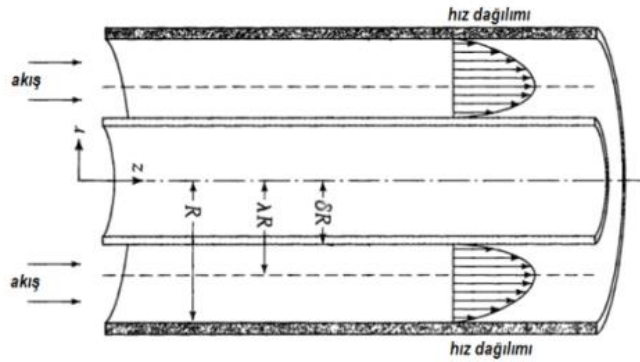
Power-Law reolojik özelliklere sahip olan akışkanların eş eksenli silindirik borularda akış değişimi ve basınç düşüşünün basit analitik bağlantılarının bulunamaması ise hem reomekanik hem de ısı ve kütle transferi problemlerinin çözümünü zorlaştırmakta, Power-Law akış sistemlerinin pratik uygulamalarına, tasarım ve optimizasyon işlemlerinin gerçekleştirilmesine engel olmaktadır. Bu makalenin esas amacı; konsentrik borularda Power-Law aksiyel laminer akış durumunda debi ve basınç düşüşünü belirlemek için mevcut kullanılan grafiksel yaklaşık yöntemler veya veri tabloları yerine basit bir yaklaşık analitik model oluşturmaktır. Sunulan bu çalışmada Fredrickson & Bird (1958) ve Hanks & Larsen (1979) tarafından elde edilen veriler ve hesaplama modelleri baz alınmıştır [11,12]. Fakat bu modeller [11,12] tam olarak analitik modeller olmadığından onların içerdiği bazı parametrelerin analitik yöntemlerle belirlenmesi mümkün değildir. Bu parametreler ya yaklaşık olarak ya da grafik ve tablolarla verilmektedir. Bu çalışmada önerilen yeni modelde, analitik yöntemle kolaylıkla belirlenemeyen parametrelerin, yeni ve basit formüller kullanılarak hesaplanması hedeflenmiştir. Sınır değerler yaklaşımı olarak tanımladığımız bu modelde, non-Newtonian (Power-Law) akış durumunda, sınır koşullarının her zaman sağlandığı ve bu akış modelinin $n = 1$ olması durumunda da kesinlikle Newtonian akış modeline dönüştüğü kriteri baz alınmıştır. Çünkü hem sınır koşulları hem de Newtonian akış formülleri analitik olarak bilinmektedir. Fredrickson & Bird (1958) ve Hanks & Larsen (1979) modellerinin analizinden görüldüğü gibi belirsiz olan parametre, esasen akışkanın borular arasındaki boşluktaki akış hızının

maksimum değerine karşılık gelen $\lambda(n, \delta)$ radyal koordinattır [11,12]. Buna göre kayma gerilimi-kayma hızı ilişkisinin yaklaşık formülü kullanılarak Power-Law reolojik akışında $\lambda(n, \delta)$ koordinatlarını belirlemek için basit bir analitik formül önerilmiştir. Bu formülün Fredrickson & Bird (1958) ve Hanks & Larsen (1979) tarafından önerilmiş nümerik verilerle iyi uyum sağladığı ve Power-Law modelinin reolojik parametrelerinin bütün değişim aralığı ($n = 0 \dots \infty$) için geçerli olduğu gösterilmiştir. Sonuçlar grafiksel ve nümerik olarak literatür verileriyle kıyaslanmış ve iyi uyum sağladıkları saptanmıştır. Böylece non-Newtonian sıvıların kullanıldığı birçok teknolojik işlemlerde ortalama akış hızının, debinin veya basınç düşüşünün doğrudan analitik olarak hesaplanması imkânı sağlanmıştır.

2. MATERYAL VE METOD (MATERIALS AND METHODS)

2.1. Problemin Formülasyonu (Formulation of the Problem)

Şekil 1’de non-Newtonian (Power-Law) reolojik akışkanların konsentrik silindirik borulardaki izotermik, inelastik sıkıştırılmayan, laminer, aksiyel akış durumundaki hız profiline ve geometrik ilişkileri gösterilmiştir.



Şekil 1. Eş eksenli borularda akışın prensip şeması [1]

Silindirik koordinatlarda (r, ϕ, z) , iç yarıçapı δR ve dış yarıçapı R olan bu iki, uzun silindir arasındaki halka kesitte sıvının aksiyel akış modelinin denklemi aşağıdaki gibidir [11];

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rz})}{dr} \quad 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0 \quad 2$$

Burada $\frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{L}$ basınç düşümü, (r, ϕ, z) silindirik koordinatlar olup, $w(r)$ akışkanın z eksen yönündeki akış bileşenidir. Denklem 1’in basit çözümü aşağıdaki gibidir [11].

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta PR}{2L} \left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right) \quad 3$$

Burada $\xi = \frac{r}{R}$ boyutsuz radyal koordinat, $\lambda(n, \delta)$ akışkanın borular arasındaki bölgede akış hızının maksimum olduğu boyutsuz koordinat olup, $\tau_{rz}(r = \lambda R) = 0$ koşullarına göre belirlenir.

Akışkanın Power-Law (Ostwald-de Waele) reolojik modeli aşağıdaki şekilde yazılır [1],

$$\tau_{rz} = \kappa \frac{\partial w}{\partial r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^{n-1} \quad 4$$

Burada κ ve n reolojik parametrelerdir. Reolojik sıvının non-Newtonian davranış parametresi olan n parametresi için, $n < 1$ akışkanın psedoplastik, $n > 1$ akışkanın dilatant özelliklerini ifade eder.

Bu yaklaşımda akış denklemini eş eksenli borularda iki farklı bölge için ayrı ayrı çözmek gerekir. Bu denklemlerin birlikte çözümünden reolojik akışkanın akış hız profili aşağıdaki gibi elde edilir [1,11];

$$w = R \left(\frac{\Delta P \cdot R}{2\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \int_{\delta}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{\xi} - \xi \right)^{\frac{1}{n}} d\xi \quad \delta \leq \xi \leq \lambda \quad 5$$

$$w = R \left(\frac{\Delta P \cdot R}{2\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \int_{\xi}^1 \left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right)^{\frac{1}{n}} d\xi \quad \lambda \leq \xi \leq 1 \quad 6$$

Burada iç ve dış silindirin yüzeylerinde sıvının akışının kaymaz (no slip) olduğu dikkate alınmıştır [$w(\delta) = w(1) = 0$]. Bu denklemlerde her iki bölgedeki akış hızının maksimum ve eşit olduğu belirsiz koordinat $\lambda(n, \delta)$, Denklem 5 ve Denklem 6'nın birbirine eşit olduğu duruma göre belirlenir,

$$\int_{\delta}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\xi} - \xi \right)^{\frac{1}{n}} d\xi = \int_{\lambda}^1 \left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right)^{\frac{1}{n}} d\xi \quad 7$$

Dolayısıyla Power-Law reolojik modele sahip olan akışkanın borulardaki izotermal ve laminar akış probleminin çözümü Denklem 7'de gösterilmiş integrallerin hesaplanmasına indirgenmiş olur. Bu eşitliğin sağlanmasında ise $\lambda(n, \delta)$ parametresinin belirlenmesi anahtar rol oynamaktadır. Denklem 7'deki integrallerin çözümünden elde edilen sonuçlara göre reolojik akışkanın borulardaki akış hız profilleri, debisi ve basınç değişimleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bunun sonucunda birçok sanayi alanlarındaki reolojik akışkan ortamların uygulanmasında ortaya çıkan pratik problemlerin çözümüne imkan sağlar [2,3]. Fakat Denklem 7'den $\lambda(n, \delta)$ parametresinin analitik olarak hesaplanması o kadar da kolay değildir. Fredrickson & Bird (1958) tarafından sunulan grafo-analitik modelin [11] üzerinden yarım asırdan fazla bir zaman geçmesine rağmen, Denklem 7'yi sağlayacak genel bir analitik çözüm elde edilememiştir. Denklem 7'nin analitik çözümü bazı özel durumlar olan $n = 1, 0.5, 0.33, 0.25$ v.s. değerleri için analitik olarak elde edilebilir [1,2,6,12]. Fakat Power-Law yasasına göre davranan non-Newtonian sıvılarda psedoplastik ve dilatant özelliklerin dikkate alınmasıyla n değeri geniş bir aralıkta ($n = 0 \dots \infty$) değişebilmektedir. Oysa yukarıda sunulan çözümler bu geniş aralık için yeterli olmamaktadır. Denklem 7'yi sağlayabilecek $\lambda(n, \delta)$ değerleri için literatürde, grafo-analitik, nümerik ve deneysel birçok çalışma sunulmuştur [1,11-27]. Fakat bütün bu çalışmaların tümünde çözüm yöntemi olarak deneysel, nümerik ve interpolasyon yaklaşımlar kullanılmış olup, daha sonraki çalışmalarda ise bu yaklaşımlar farklı yöntemlerle düzeltilerek geliştirilmiştir. Buna rağmen Power-Law reolojik modelin hesaplanması için yapılan nümerik yöntemlerin [11,12] sonucunda bile yine de $\lambda(n, \delta)$ parametresi belirsiz olarak kalmıştır. [11]'de $\lambda(n, \delta)$ ilişkisi için, Denklem 7'yi interpolasyon yöntemi kullanarak çözmüş ve sonuçları tablo ve grafikler şeklinde sunmuştur. [12]'de ise Denklem 7'nin çözümünü geliştirerek non-Newtonian (Power-Law) akışkanların konsentrik borulardaki debisi için $0 \leq \delta \leq 1$ aralığında aşağıdaki analitik formülü elde etmişlerdir.

$$Q = \frac{\pi n R^3}{1+3n} \left(\frac{\Delta P R}{2\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \left[(1 - \lambda^2)^{\frac{n+1}{n}} - \delta^{\frac{n-1}{n}} (\lambda^2 - \delta^2)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad 8$$

Denklem 8'in içerdiği $\lambda(n, \delta)$ ilişkisi ise nümerik yöntemle hesaplanarak $0.1 \leq n \leq 1$, $0.05 \leq \delta \leq 1$ değerleri için tablo şeklinde sunulmuştur [11,12]. Konsentrik borularda Power-Law akış modelinde Denklem 8 her ne kadar basit ve kullanışlı görülse de, yine de farklı durumlar için $\lambda(n, \delta)$ değerlerinin tablodan seçilmesi veya bu tablodaki değerlere göre interpolasyon yapılarak belirlenmesi gerekir [12]. Bu ise, Power-Law akış modelinin kullanıldığı çoğu uygulamalarda, özellikle ısı ve kütle transferi [4, 28], reodinamik [4], manyetik seperasyon [30] problemlerinin analitik yöntemlerle incelenmesine engel olmaktadır. Bu nedenle Denklem 8'i analitik olarak hesaplayabilmek için $\lambda(n, \delta)$ ilişkisinin oluşturulması gerekmektedir. Öte yandan önerilen ilişki [11,12]'de verilen değerleri ve diğer araştırmacıların elde ettikleri teorik ve deneysel verileri de sağlamalıdır. Başka bir deyişle yukarıdaki durumlar göz önüne alınarak $\lambda(n, \delta)$ için ampirik de olsa uygun bir formül oluşturmak gereksinimi ortaya çıkmaktadır. Bu ampirik formül aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

2.2. Problemin Çözümü (Solution of the Problem)

Öncelikle Power-Law reolojik modelinin bir hidrodinamik çözüm değil, yaklaşık bir model olduğunu hatırlatmakta yarar vardır. Bu modelin en önemli eksiklikleri ise psedoplastik akışkanlarda kayma hızının düşük değerlerinde ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$) görünür viskozitenin sonsuza ($\mu_a \rightarrow \infty$), kayma hızının büyük değerlerinde ise ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) görünür viskozitenin sıfıra ($\mu_a \rightarrow 0$) eşit olmasıdır [1,4]. Benzer zıtlıklar $n \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$ durumlarında da oluşmaktadır. Bu nedenle literatürde sunulan interpolasyon ve diğer yaklaşık modeller [11-27] ve son yıllarda sunulan diğer çoğu çalışmalar [28] bu zıtlıkların ortadan kaldırılmasını hedeflemiştir. Çalışmalardaki asıl hedef ise konsentrik silindirik borulardaki boşlukta Power-Law akışında hız profiline, basınç düşümünün, sürtünme katsayısının belirlenmesidir. Fakat bütün bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar yalnız özel durumlar için geçerli olmuştur. Non-Newtonian sıvılar için, Newtonian sıvılardaki sonuçlar gibi basit, kullanışlı ve genel formüllerin oluşturulması yapılamamıştır. Oysa non-Newtonian sıvıların boru ve kanallardaki akış özelliklerinin analitik formüllerinin elde edilmesi, hem teorik hemde pratik bakımdan her zaman büyük önem taşımaktadır. Bu formüllerin elde edilebilmesi için aşağıdaki koşulların her zaman sağlanması gerektiğini varsayabiliriz:

- Power-Law reolojik modelinden elde edilen bütün formüllerin $n = 1$ durumunda Newtonian akışlardaki uygun formüllere dönüşmesi gerekmektedir.
- Non-Newtonian akışlarda herhangi bir yöntemle (kuvvet serisi, diferansiyel, integral, basit cebirsel ilişkiler vs.) elde edilen yaklaşık ifadelerin, akışkanın $n < 1$ durumunda psedoplastik, $n > 1$ durumunda ise diatant akış özelliklerini sağlaması gerekir.
- Oluşturulan yaklaşık ifadeler mümkün olan mertebede $n = 0$ ve $n = \infty$ değerleri için de sonlu olmalıdır.

Bu koşullardan yola çıkarak Denklem 8'deki $\lambda(n, \delta)$ fonksiyonunun, Denklem 1 ve 4 için de geçerli olabilecek yaklaşık formülü aşağıdaki şekilde önerilebilir [31]:

$$(3n + 1)\lambda^{\frac{3n+1}{n+1}} = (n + 1) \frac{1 - \delta^{\frac{3n+1}{n+1}}}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} \quad 9$$

Bu formül tümüyle ampirik olarak görülse de, Power-Law akışkanların dar yarıklardaki akışlarının yaklaşık modellenmesinden de elde edilebilir. Denklem 9'daki fonksiyonun içerdiği üstler genelleştirilmiş non-Newtonian akış modelinden de türetilebilir [1]. Burada $\lambda(n, \delta)$ ampirik formülünün oluşturulması işlemlerinde elde edilen son ifadenin Denklem 3'teki $\tau_{rz} = 0$ koşulunu sağlaması gerektiği de dikkate alınmalıdır. Denklem 9'dan görüldüğü gibi önerdiğimiz yaklaşık formülde $n = 1$ konulduğunda, konsentrik borularda Newtonian sıvıların aksiyel akışı için geçerli olan aşağıdaki bilinen ifade elde edilir:

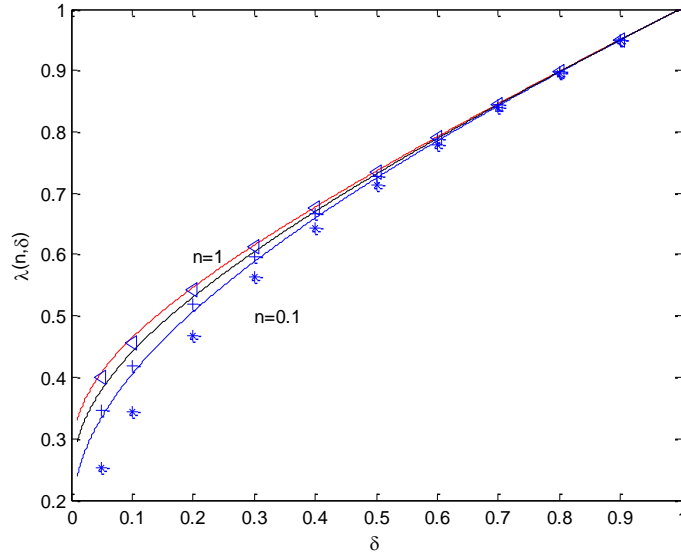
$$2\lambda^2 = \frac{1 - \delta^2}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} \quad 10$$

Ayrıca Denklem 9'dan görüldüğü gibi $\lambda(n, \delta)$, $n = 0$ ve $n = \infty$ değerlerinde de sonlu olarak kalmaktadır. Dolayısıyla Denklem 9, reolojik akışkanın non-Newtonian davranışını belirleyen n parametresinin $n = 0 \dots \infty$ bütün aralığı için geçerlidir. Böylece, konsentrik borularda Power-Law akışında belli n ve δ değerlerinde Denklem 9'dan hesaplanmış $\lambda(n, \delta)$ değeri Denklem 8'de dikkate alınarak akışkanın debisi, ortalama akış hızı ve $\frac{\Delta P}{L}$ basınç düşüşü hesaplanabilir. Bu hesaplamaların yapılması için önce Denklem 9'da önerilen $\lambda(n, \delta)$ değerleri ile literatürden grafo-analitik ve nümerik yaklaşık yöntemlerle elde edilen $\lambda(n, \delta)$ değerlerinin kıyaslanması gerekmektedir. Bu karşılaştırmalar ise sonuçlar ve tartışma bölümünde ele alınacaktır.

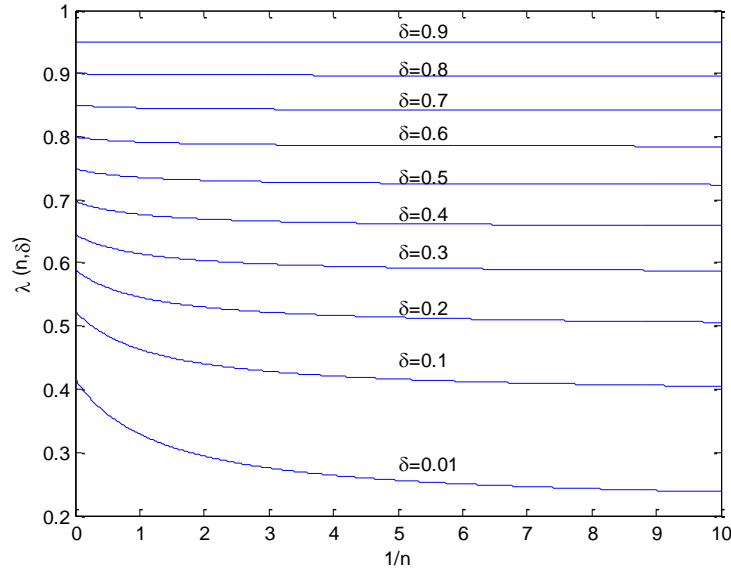
3. SONUÇ VE TARTIŞMA (RESULT AND DISCUSSION)

Şekil 2'de $\lambda(n, \delta)$ ilişkisinin Denklem 9'a göre hesaplanmış grafiği gösterilmiştir. Şekil 2 üzerinde $\lambda(n, \delta)$ ilişkisinin [11,12]'de sunulmuş ve nümerik hesaplamalardan elde edilen sonuçları ile kıyaslanması bulunmaktadır. Şekil 2'den görüldüğü gibi $n = 0 \dots \infty$ bütün aralıklarda Denklem 9'a göre

hesaplanan $\lambda(n, \delta)$ değerleri literatürde sunulan nümerik sonuçlarla iyi uyum sağlamaktadır. Diğer taraftan Denklem 9 ile belirlenen $\lambda(n, \delta)$ değişimi [15] tarafından sunulan sınır değer koşullarına göre belirlenmiş $\lambda(n, \delta)$ ilişkisinin $0 < \delta < 0.5$ aralığındaki bütün özelliklerini de sağlamaktadır. Şekil 3'te ise farklı δ değerleri için $\lambda(n, \delta)$ ilişkisi gösterilmiştir. Şekil 3'ten de görüldüğü gibi bu değişim [1]'de sunulan $\lambda(1/n)$ grafiği ile iyi uyum sağlamaktadır.



Şekil 2. $\lambda(n, \delta)$ parametresinin δ 'a göre değişimi. Simgeler [11,12]'den elde edilmiş ve $n=0.1, 0.5, 1$ için nümerik değerlerdir. Çizgiler ise n 'in bu değerlerinde Denklem 9'a göre hesaplanmış teorik eğrilerdir ($n=0.1 \rightarrow$ mavi, $n=0.5 \rightarrow$ siyah, $n=1 \rightarrow$ kırmızı).



Şekil 3. $\lambda(n, \delta)$ parametresinin $1/n$ 'e göre değişimi grafikleri.

Dolayısıyla Denklem 9'da sunulan teorik formül non-Newtonian (Power-Law) sıvıların konsentrik silindirik boşluklardaki akışında $n = 0 \dots \infty$ tüm aralıkta $\lambda(n, \delta)$ değerlerini hesaplamaya imkân verir. Başka bir deyişle, non-Newtonian (Power-Law) sıvıların konsentrik silindirik boşluklardaki akışlarında akış hızı, basınç değişimi ve sürtünme katsayısı gibi önemli karakteristiklerinin hesaplanmasında anahtar parametre olan $\lambda(n, \delta)$ değişimi belirlenmiş olur. En basit yaklaşımda bile $\lambda(n, \delta)$ değerinin analitik

hesaplanması sonucu, hiç bir ek tablo ve grafik kullanmadan basınç değişimi veya debi Denklem 8'den kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin, aşağıdaki Tablo 1'de literatürde verilen ve yardımcı grafikler kullanılarak Denklem 8'e göre yapılan hesaplamalar ve tarafımızdan sunulan hesaplamalardan elde edilen basınç düşümü değerleri verilmiştir. Bu sonuçların birbirine yakın olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 1. Bazı değerler için ΔP basınç değişimi hesabı sonuçları

Sıra No	Non-Newtonian akışkanın parametreleri	$\lambda(n, \delta)$		$\frac{\Delta P}{L}$, kPa/m		Kaynak
		literatür	Denklem 8 ve 9	Literatür	Denklem 8 ve 9	
1	$R = 2.63 \cdot 10^{-2}$ m, $\delta = 0.406$, $n = 0.716$, $k = 0.3 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.716}$, $Q = 2.768 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	–	0.6771	4	4	[11]
2	$R = 2.63 \cdot 10^{-2}$ m, $\delta = 0.406$, $n = 0.5$, $k = 14.4 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.5}$, $Q = 5.54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	–	0.6735	72.26	70.92	[11]
3	$R = 0.107$ m, $\delta = 0.533$, $n = 0.2$, $k = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.2}$, $Q = 189 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	0.7398	0.7462	$11.6 \cdot 10^{-3}$	$12.93 \cdot 10^{-3}$	[32]
4	$R = 10^{-2}$ m, $\delta = 0.5$, $n = 0.5$, $k = 3.2 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.5}$, $Q = 5.54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	0.7283	0.7308	234.17	242.77	[3]
5	$R = 0.01524$ m, $\delta = 0.507$, $n = 0.33$, $Q = 2.83 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	0.727	0.7326	79.967	81.21	[15]*
6	$R = 0.2082$ m, $\delta = 0.405$, $n = 0.22$, $k = 3.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0.22}$, $Q = 18.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$	–	0.6662	$97 \cdot 10^{-3}$	$103 \cdot 10^{-3}$	[21]*

*Denklem 8'den farklı olan grafiksel yöntemle hesaplanmıştır.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Non-Newtonian (Power-Law) reolojik akışkanların konsentrik silindirik borulardaki aksiyel akışlarında akış hızının maksimum olduğu bölgenin koordinatı olan $\lambda(n, \delta)$ parametresini analitik olarak kolaylıkla hesaplamak için Denklem 9'da verilen basit amprik formül önerilmiştir. Bu ilişki dikkate alındığında non-Newtonian akışkanların konsentrik silindirik borulardaki akışında Hanks & Larsen (1979) tarafından sunulan [12] Q veya ΔP de Denklem 8'e göre direkt olarak hesaplanabilir. Bu sonuç, Denklem 8'in petrol, gıda ve polimer sanayisinde, triboloji sistemlerde, biyoreolojik ortamların (kan, kan analogları vs) manyetoforezi uygulamalarında gerekli olan hesaplamalarda kolaylıklar sağlar. Böylece, bu yaklaşım non-Newtonian (Power-Law) sıvıların konsentrik borulardaki akış özelliğini belirlemek için yarım asırdan fazla bir sürede çözümlenemeyen bir problemin yaklaşık analitik çözümü olarak da tanımlanabilir. Denklem 9 her ne kadar hidrodinamik problemin çözümünden türetilmiş bir ifade olmasa da, reolojik sıvıların non-Newtonian davranışlarının $n = 0 \dots \infty$ tüm değişim aralıklarında geçerli olup, bütün hidrodinamik ve reolojik sınır koşullarını sağlamaktadır. Bu nedenle Denklem 9, Hanks & Larsen (1979) tarafından [12] verilen model ile birlikte non-Newtonian (Power-Law) akışkanlarının kullanıldığı geniş uygulama alanlarında tasarım, optimizasyon ve çalışma parametrelerinin belirlenmesinde analitik hesaplamalar için kullanılabilir. Dolayısıyla bu çalışmada önerilen yaklaşık analitik hesaplama yöntemi, günümüze kadar yapılan interpolasyon, grafik ve tablo verileri gibi karmaşık yöntemler kullanılmaksızın, basınç değişimi ve debi gibi temel parametrelerin hesaplamasına imkân sağlayacaktır.

TEŞEKKÜRLER (ACKNOWLEDGMENTS)

Bu çalışma İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (Proje No: FDK-2017-775) tarafından desteklenmiştir. Katkılarından dolayı İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkürlerimizi sunarız.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. (2002). *Transport Phenomena*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Chhabra, R. P., Richardson, J. F. (2008). *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*, Butterworth-Heinemann.
- [3] Chhabra, R. P., & Richardson, J. F. (1999). *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*, Butterworth-Heinemann.
- [4] Schulman, Z. P. (1975). Convective heat and mass transfer in rheologically complex fluids, Moscow, Energiya, 352.
- [5] Ilicali, C. & Engez, S. T. (1996). Laminar Flow of Power Law Fluid Foods in Concentric Annuli, *Journal of Food Engineering*, 30, 255-262.
- [6] Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymer Liquids. Vol.1: Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc.
- [7] Jiang, X. (2020). *Nanotechnology and Microfluidics*, Wiley-VCH, 419.
- [8] Danon, D., Knyszynski, A., Hayflick, L., Dieter Platt (eds.) (1988). *Blood Cells, Rheology, and Aging*, Springer Berlin Heidelberg.
- [9] Yılmaz, F., & Gundogdu, M. Y. (2008). A Critical Review On Blood Flow in Large Arteries; Relevance to Blood Rheology, Viscosity Models, and Physiologic Conditions, *Korea-Australia Rheology Journal*, 20(4), Pp. 197-211.
- [10] Rodkiewicz, C. M. (Ed.) (1983). *Arteries and Blood Flow*, Springer-Verlag Wien 417.
- [11] Fredrickson, A. G., & Bird, R. B. (1958). Non-Newtonian Flow in Annuli, *Ind. Eng. Chem.*, 50 (3), 347-352.
- [12] Hanks, R. W., & Larsen, K. M. (1979). The Flow Of Power-Law Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 18(1), 33-35.
- [13] Rotem, Z. (1962). Non-Newtonian Flow in Annuli, *J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E*, 29, 421.
- [14] Kozicki, W., Chou, C. H., Tiu, C. (1966) Non-Newtonian Flow in Ducts of Arbitrary Cross-Sectional Shape, *Chem. Eng. Sci.* 21, 665-679.
- [15] Vaughn, R. D., Bergman P. D. (1966). Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli, *I&EC Process Design and Development*, 5(1), 44-47.
- [16] Wein, O., Nebrensky, J., Wichterle, K. (1970). Non-Newtonian Flow in Annuli, *Rheologica Acta*, 9(2), 278-282.
- [17] McEachern, D. W. (1966). Axial Laminar Flow of a Non-Newtonian Fluid in an Annulus, *AIChE J.* 12(2), 328-332.
- [18] Christopher P. R., & Christiansen, E. B. (1974). Axial, Laminar, Non-Newtonian Flow in Annuli, *I&EC Process Design and Development*, 13(4), 391-396.
- [19] Malik, R., Shenoy, U. V. (1991). Generalized Annular Couette Flow of a Power-Law Fluid, *Ind. Eng. Chem. Research*, 30(8), 1950-1954.
- [20] David, J., Filip, P. (1994). Quasisimilarity of Flow Behavior of Power-Law Fluids in Concentric Annuli, *Fluid Dyn. Res.* 14(2), 63-70.
- [21] David, J., Filip, P., (1996). Explicit Pressure Drop/Flow Rate Relation for Laminar Axial Flow of Power-Law Fluids in Concentric Annuli, *J. Pet. Sci. & Eng.* 16(4), 203-208.

- [22] Tiu, C., Bhattacharyya, S. (1974). Developing and Fully Developed Velocity Profiles for Inelastic Power Law Fluids in an Annulus, *AICHE J.*, 20(6), 1140-1144.
- [23] Mishra, P., Mishra, I. (1976). Flow Behavior of Power Law Fluids in an Annulus, *AICHE J.*, 22(3) 617-619.
- [24] Gupta, R. K., Chhabra, R. P. (1996). Laminar Flow of Power Law Fluids in Concentric Annuli, *AICHE J.* 42(7), 2080-2083.
- [25] Prasanth, N., Shenoy, U. V. (1992). Poiseuille Flow of a Power-Law Fluid Between Coaxial Cylinders, *J. Appl. Polym. Sci.*, 46(7), 1189-1194.
- [26] Worth, R. A. (1979). Accuracy of the parallel-plate analogy for representation of viscous flow between coaxial cylinders, *J. Appl. Polym. Sci.*, 24(2), 319-328.
- [27] Flip, P. (2007). Couette-Poiseuille Flow of Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli, *Proceedings of the 5th IASME/WSEAS Int. Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment, Athens, Greece, August 25-27*, 9-14.
- [28] Haobo, Z., Honghai, F., Yinghu Z., Qi, P. (2014). A New Utility Calculation Model for Axial Flow of Non-Newtonian Fluid in Concentric Annuli, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 92(5), 945-952.
- [29] David, J., Filip, P. (1995). Relationship of annular and parallel-plate Poiseuille flows for power-law fluids. *Polym.-Plast. Technol. Eng. J.* 34, 947– 960.
- [30] Bilgili, H., Abbasov, T. (2019). Magnetic Separation Of Bioparticles In Rheological Suspension, III. Uluslararası AVRASYA Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, Uygulamalı Bilimler Kitabı 4-7 Nisan / Gaziantep-Türkiye, pp. 709-714.
- [31] Bilgili, H., Abbasov, T. (2020). Manyetik İlaç Hedefleme Uygulamalarında Kan Reolojik Akış Modellerinin Analizi, MAS 12. Uluslararası Matematik-Mühendislik-Fen ve Sağlık Bilimleri Kongresi, 18-19 Temmuz, İzmir-Türkiye, pp 5-6. ISBN -978-625-7139-16-8.
- [32] Leonov, E. G., Isaev, V. I. (2009). *Applied Hydro-Aeromechanics in Oil and Gas Drilling* John Wiley & Sons, Inc.