Ağırlıklı Uzaylarda q −Szász-Kantorovich-Chlodowsky Operatörlerinin Yaklaşımlar

***Reşat ASLAN[1], Aydın İZGİ[2],**

*[1] Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ŞANLIURFA
[2] Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ŞANLIURFA

(Alınış / Received: 24.11.2019, Kabul / Accepted: 07.01.2020, Online Yayınlanma / Published Online: 01.04.2020)

Anahtar Kelimeler
Voronovskaja Tip Asimtotik Teorem,
Süreklilik Modülü,
q-Szász Mirakyan Operatörleri,
Ağırlıklı Yaklaşım

Öz: Bu araştırmanın asıl amacı, son iki yüzyıla girildiğinde matematiğe önemli katkısı olan ve birçok uygulama alanına sahip olan yaklaşımlar teorisinde son yılların popüler bir çalışma alanlarından q-calculus'ün bazı lineer pozitif operatörlere uygulanması ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerinin tahmin edilmesi üzerine olacaktır. Öncelikle q-calculus ile ilgili bazı tanım ve notasyonlar verilmiş ardından $1, t, t^2, t^3, t^4$ test fonksiyonlarının q-Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörleri altındaki görüntüleri hesaplanmış ve q-Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörünün 4. mertebeye kadar olan merkezi momentleri verilmiştir. Ayrıca yukarıdaki operatörün ağırlıklı uzaylardaki düzgün yakınsaklığı ile ilgili teoremler ve bu operatörün yaklaşım derecesini elde etmek için Voronovskaja tip asimtotik teoremin ispatı verilmiştir. Son olarak süreklilik modülü yardımıyla ağırlıklı uzaylardaki yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Approximation By q −Szász-Kantorovich-Chlodowsky Operators On Weighted Spaces

Keywords
Voronovskaja Type Asymptotic Theorem,
Modulus of Continuity,
q-Szász Mirakyan Operators,
Weighted Approximation

Abstract: The main purpose of this research is to apply q-calculus to some linear positive operators and to estimate the approximation properties of these operators, which is a popular area of study in recent years of the approximation theory which has a significant contribution to mathematics in the last two centuries and has many applications. Firstly some definitions and notations related to q-calculus are given, then the images of the test functions $1, t, t^2, t^3, t^4$ under q-Szász-Kantorovich-Chlodowsky operators are calculated and the central moments of the q -Szász-Kantorovich-Chlodowsky operators up to 4-th order are given. In addition, theorems related to the uniform convergence of the above operator in the weighted spaces and to obtain the degree of approximation of this operator the proof of the Voronovskaja type asymptotic theorem are given. Finally, the rate of convergence in weighted spaces is calculated with the help of modulus of continuity.

1. Giriş

19. yüzyıldan günümüze birçok matematikçi, çalışılması zor olan bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen yani çalışılması daha kolay olan, örneğin polinomlar gibi, daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşabilir miyiz ve bu yaklaşımı en iyi nasıl sağlarız sorularına cevap aramışlardır. Bu düşünceden yola çıkarak 1885 yılında Alman Matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, sonlu bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinom dizisinin varlığı ile ilgili teoremi iddia ve ispat etmiştir [1]. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass'dan esinlenen ve halen kendi adları ile anılan Bernstein ve Szász gibi matematikçilerde çeşitli operatörler ve bu operatörlerin genellemelerini incelenmişlerdir [2-5].

Matematik Bölümü, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa
*İlgili yazar, email: resat63@hotmail.com

[2]'deki çalışmadan hareketle yola çıkan başka bir matematikçi [6]'daki çalışmasında, toplam şeklindeki lineer pozitif operatör dizisinin [0,1] aralığında sürekli olan fonksiyona yaklaşması ile ilgili problemi incelemiş ve ardından Rus Matematikçi Pavel Korovkin tarafından 1953 yılında [6]'nın koşullarını genel halde de sağlayan genel bir teorem ispatlanmıştır [7]. Bu teorem, ciddi bir uygulama potansiyeline sahip olduğu için matematik ile ilgili araştırmalarda önemli bir role sahip olmuştur. [7]'de ki çalışmadan sonra pozitif ve doğrusal operatör dizileri tarafından verilen doğrusal yaklaşım yöntemlerinin incelenmesi, yaklaşım teorisinin köklü bir parçası haline gelmiştir.

Yaklaşımlar teorisinin son 30 yılında ki araştırmalarında ise q-calculus yani quantum calculus'ün lineer pozitif operatör dizilerine uygulanması ve bu q-operatörlerin yaklaşım özelliklerinin araştırılması yaklaşım teorisine ciddi anlamda katkısı olmuştur. Bu alanla ilgili ilk öncü çalışmalar 1987 yılında L. Lupaş ve A. Lupaş tarafından [8]'de ve 1996 yılında da G. M. Phillips [9]'da q-ya dayalı genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerinin araştırılması üzerine olmuş ve bu olağanüstü polinomların birçok özelliği q-analoglarına genişletilmiştir. q-calculusun yaklaşım teorisine uygulanması ile ilgili yukarıdaki çalışmalardan esinlenen bazı başka matematikçilerde q-ya dayalı çeşitli birçok lineer pozitif operatör dizilerinin genelleştirilmesi üzerine araştırmalarda bulunmuşlardır. Örneğin; 2002 yılında H. Oruç ve N. Tuncer [10]'da q -Bernstein polinomlarının yakınsaklığı ve onların iterasyonu üzerine çalışmalar yapmış ardından 2005 yılında V. S. Videnskii [11]'de bazı q-parametrik pozitif lineer operatör sınıfları üzerine araştırma yapmıştır. A. Aral ve V. Gupta [12]'de ki çalışmalarında ise q-türev ve q-Szász Mirakyan operatörlerini $0 < q < 1,\ 0 \leq x < \frac{b_n}{(1-q)[n]_q}$, $f \in C(\mathbb{R}_0)$ ve (b_n) pozitif tamsayısı için $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ şartları altında aşağıdaki şekilde tanımlamış ve bu operatörün uygulamaları üzerine araştırmalar yapmışlardır.

$$A_n(f,q;x) =: A_n^q(f;x)$$
$$= E_q\left(-[n]_q \frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\right)\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!\, {b_n}^k} \tag{1}$$

Ayrıca 2008 yılında da H. Karlı ve V. Gupta [13]'de q -Chlodowsky operatörleri tanımlamışlar ve bazı yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Yukarıdaki çalışmaların dışında literatür taranması sonucunda q-calculus'ün lineer pozitif operatörlere uygulanması üzerine bazı çalışmalara da buradan ulaşılabilir:[14-16].

Biz de yukarıdaki çalışmalardan yola çıkarak q -Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$P_n(f,q;x)$$
$$= \frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} S_{n,k}^q(x) \int_{\frac{[k]_q [n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q [n]_q b_n}{[n+1]_q^2}} f(t)\, d_q t \tag{2}$$

(2) denkleminde $S_{n,k}^q(x) = \frac{[n]_q^k x^k}{b_n^k [k]_q!} E_q\left(-[n]_q \frac{x}{b_n}\right)$, $q \in (0,1)$, $x \in (0, b_n]$, $b_n \to \infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_q} \to 0$ şeklinde tanımlanmıştır.

Bundan sonraki bölümlerde sırasıyla q-calculus ile ilgili bazı temel kavramlar verilecek ve daha sonra sırasıyla $1, t, t^2, t^3, t^4$ fonksiyonlarının (2) operatörü altındaki görüntüleri hesaplanacak ve (2) operatörünün 4. mertebeye kadar olan merkezi momentleri verilecektir. Ayrıca (2) operatörünün ağırlıklı uzaylardaki düzgün yakınsaklığı ile ilgili teoremler ve Voronovskaja tip asimtotik teoremin ispatı yapılacaktır. Son adımda ise ağırlıklı uzaylarda ki süreklilik modülü yardımıyla (2) operatörünün yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

2. Materyal ve Metot

2.1. Temel tanımlar

Bu bölüm içerisinde vereceğimiz lemma ve teorem ispatlarına geçmeden öncelikle quantum calculus'e bağlı bazı tanım ve notasyonları hatırlayalım.

$q > 0$ ve negatif olmayan bir n tamsayısı için n'nin q'ya bağlı ifadesi (q -tamsayısı) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[n]_q := \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ 1, & q = 0 \end{cases}$$

q −faktöriyel $[n]_q!$ ifadesi ve q −binom katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$[n]_q! := \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

$[0, b]$ aralığı üzerinde bir fonksiyonun integralinin q −analogu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_0^b f(t)d_qt = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} f(q^jb)\,q^j\,, \quad 0 < q < 1$$

Son olarak (1) ve (2) denklemlerinde kullanılan eksponansiyel fonksiyon e^x'in q − analoğunu aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$e_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}, \qquad |x| < \frac{1}{1-q}$$

$$E_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{[n]_q!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Yukarıdaki iki denklemden aşağıdaki eşitlik kolaylıkla elde edilebilir.

$$e_q(x)E_q(-x) = 1$$

2.1. Temel Sonuçlar

Lemma 2.1.1 (2) operatöründe verilen $\int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} f(t)d_qt$ ifadesi için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$a) \int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} 1d_qt = \frac{q^k[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}$$

$$b)\int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} t d_qt=\frac{q^k[n]_q^2b_n^2}{[n+1]_q^2[2]_q}([2]_q[k]_q+1)$$

$$c)\int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} t^2 d_qt=\frac{q^k[n]_q^3b_n^3}{[n+1]_q^6[3]_q}([3]_q[k]_q^2+(2q+1)[k]_q+1)$$

$$d)\int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} t^3 d_qt=\frac{q^k[n]_q^4b_n^4}{[n+1]_q^8[4]_q}([4]_q[k]_q^3+(3q^2+2q+1)[k]_q^2+(3q+1)[k]_q+1)$$

$$e)\int_{\frac{[k]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_qb_n}{[n+1]_q^2}} t^4 d_qt=\frac{q^k[n]_q^5b_n^5}{[n+1]_q^{10}[5]_q}([5]_q[k]_q^4+(4q^3+3q^2+2q+1)[k]_q^3+(6q^2+3q+1)[k]_q^2$$
$$+(4q+1)[k]_q+1)$$

Lemma 2.1.2 (2) operatöründe verilen $S_{n,k}^q(x)=\frac{[n]_q^kx^k}{b_n^k[k]_q!}E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$1)\sum_{k=0}^{\infty}S_{n,k}^q(x)=1$$

$$2)\sum_{k=0}^{\infty}S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q}{[n]_q}=\frac{x}{b_n}$$

$$3)\sum_{k=0}^{\infty}S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}=\frac{qx^2}{b_n^2}+\frac{x}{[n]_qb_n}$$

$$4)\sum_{k=0}^{\infty}S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q^3}{[n]_q^3}=\frac{q^3x^3}{b_n^3}+\frac{(q^2+2q)x^2}{[n]_qb_n^2}+\frac{x}{[n]_q^2b_n}$$

$$5)\sum_{k=0}^{\infty}S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q^4}{[n]_q^4}=\frac{q^6x^4}{b_n^4}+\frac{q^3(q^2+2q+3)x^3}{[n]_qb_n^3}+\frac{q(q^2+3q+3)x^2}{[n]_q^2b_n^2}+\frac{x}{[n]_q^3b_n}$$

İspat 2.1.2 [17]'de elde edilen sonuçlardan yola çıkarak (2) denkleminde verilen $S_{n,k}^q(x)=\frac{[n]_q^kx^k}{b_n^k[k]_q!}E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)$ ifadesi yerine yazılır ve $[n]_q=[j]_q+q^j[n-j]_q$, $0\le j\le n$ eşitliği 'de kullanılırsa yukarıdaki sonuçların elde edilmesi aşikârdır.

Lemma 2.1.3 (2)'de tanımlanan operatör için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$i)\ P_n(1,q;x)=1$

$$ii)\ P_n(t,q;x)=\frac{[n]_q^2}{[n+1]_q^2}x+A_0\frac{[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}$$

$$iii)\ P_n(t^2,q;x)=\frac{q[n]_q^4}{[n+1]_q^4}x^2+A_1\frac{[n]_q^3 b_n}{[n+1]_q^4}x+A_2\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}$$

$$iv)\ P_n(t^3,q;x)=\frac{q^3[n]_q^6}{[n+1]_q^6}x^3+A_3\frac{[n]_q^5 b_n}{[n+1]_q^6}x^2+A_4\frac{[n]_q^4 b_n^2}{[n+1]_q^6}x+A_5\frac{[n]_q^3 b_n^3}{[n+1]_q^6}$$

$$v)P_n\,(t^4,q;x)=\frac{q^8[n]_q^8}{[n+1]_q^8}x^4+A_6\frac{[n]_q^7 b_n}{[n+1]_q^8}x^3+A_7\frac{[n]_q^6 b_n^2}{[n+1]_q^8}x^2+A_8\frac{[n]_q^5 b_n^3}{[n+1]_q^8}x+A_9\frac{[n]_q^4 b_n^4}{[n+1]_q^8}$$

yukarıdaki eşitliklerde $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$A_0=\frac{1}{q+1}, A_1=\frac{q^2+3q+1}{q^2+q+1}, A_2=\frac{1}{q^2+q+1}, A_3=\frac{q^5+3q^4+6q^3+5q^2+3q}{q^3+q^2+q+1},$$

$$A_4=\frac{q^3+4q^2+6q+2}{q^3+q^2+q+1}, A_5=\frac{1}{q^3+q^2+q+1}, A_6=\frac{q^3(q^6+3q^5+6q^4+10q^3+9q^2+7q+4)}{q^4+q^3+q^2+q+1},$$

$$A_7=\frac{q(q^6+4q^5+11q^4+18q^3+15q^2+11q+5)}{q^4+q^3+q^2+q+1}, A_8=\frac{q^4+5q^3+10q^2+10q+4}{q^4+q^3+q^2+q+1},$$

$$A_9=\frac{1}{q^4+q^3+q^2+q+1}$$

İspat 2.1.3 (2)'de verilen operatörün tanımı, Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'de elde ettiğimiz sonuçlar ve $[n]_q=[j]_q+q^j[n-j]_q$, $0\le j\le n$ eşitliğinden de faydalanarak yukarıdaki sonuçları sırasıyla elde etmeye çalışalım.

$$i)\ P_n(1,q;x)=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}S_{n,k}^q(x)\int_{\frac{[k]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}1d_qt=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}S_{n,k}^q(x)\frac{q^k[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}=1$$

$$ii)\ P_n(t,q;x)=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}S_{n,k}^q(x)\int_{\frac{[k]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}td_qt$$

$$=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}S_{n,k}^q(x)\frac{q^k[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^2[2]_q}\left([2]_q[k]_q+1\right)$$

$$=\frac{[n]_q^2 b_n}{[n+1]_q^2}\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q}{[n]_q}+\frac{1}{[2]_q}\frac{[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}=\frac{[n]_q^2 b_n}{[n+1]_q^2}\frac{x}{b_n}+\frac{1}{[2]_q}\frac{[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}$$

$$=\frac{[n]_q^2}{[n+1]_q^2}x+\frac{1}{[2]_q}\frac{[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}=\frac{[n]_q^2}{[n+1]_q^2}x+A_0\frac{[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}$$

$$iii)\ P_n(t^2,q;x)=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} S_{n,k}^q(x)\int_{\frac{[k]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q[n]_q b_n}{[n+1]_q^2}} t^2 d_q t$$

$$=\frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n}\sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} S_{n,k}^q(x)\frac{q^k[n]_q^3 b_n^3}{[n+1]_q^6[3]_q}\left([3]_q[k]_q^2+(2q+1)[k]_q+1\right)$$

$$=\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}\sum_{k=0}^{\infty} S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}+\frac{(2q+1)}{[3]_q}\frac{[n]_q^3 b_n^2}{[n+1]_q^4}\sum_{k=0}^{\infty} S_{n,k}^q(x)\frac{[k]_q}{[n]_q}+\frac{1}{[3]_q}\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}$$

$$=\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}\left(\frac{qx^2}{b_n^2}+\frac{x}{[n]_q b_n}\right)+\frac{(2q+1)}{[3]_q}\frac{[n]_q^3 b_n^2}{[n+1]_q^4}\frac{x}{b_n}+\frac{1}{[3]_q}\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}$$

$$=\frac{q[n]_q^4}{[n+1]_q^4}x^2+\frac{q^2+3q+1}{q^2+q+1}\frac{[n]_q^3 b_n}{[n+1]_q^4}x+\frac{1}{q^2+q+1}\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}$$

$$=\frac{q[n]_q^4}{[n+1]_q^4}x^2+A_1\frac{[n]_q^3 b_n}{[n+1]_q^4}x+A_2\frac{[n]_q^2 b_n^2}{[n+1]_q^4}$$

benzer yol izlenerek,

$$iv)\ P_n(t^3,q;x)=\frac{q^3[n]_q^6}{[n+1]_q^6}x^3+A_3\frac{[n]_q^5 b_n}{[n+1]_q^6}x^2+A_4\frac{[n]_q^4 b_n^2}{[n+1]_q^6}x+A_5\frac{[n]_q^3 b_n^3}{[n+1]_q^6}$$

$$v)P_n\ (t^4,q;x)=\frac{q^8[n]_q^8}{[n+1]_q^8}x^4+A_6\frac{[n]_q^7 b_n}{[n+1]_q^8}x^3+A_7\frac{[n]_q^6 b_n^2}{[n+1]_q^8}x^2+A_8\frac{[n]_q^5 b_n^3}{[n+1]_q^8}x+A_9\frac{[n]_q^4 b_n^4}{[n+1]_q^8}$$

Eşitlikleri de kolaylıkla elde edilir ve ispatımız tamamlanmış olur.

2.2. Ağırlıklı Yaklaşım

Bu bölümde (2)'de tanımlamış olduğumuz operatörünün ağırlıklı uzaylarda ki düzgün yakınsaklığı ile ilgili teorem ve ispatları vermeden öncelikle bazı tanımlar verelim ve kabul edelim ki;
$S_{x^2}[0,\infty)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve $|f(x)|\le M_f(1+x^2)$ şartını sağlayan tüm f fonksiyonlarının uzayı, ayrıca $C_{x^2}[0,\infty)$'da $S_{x^2}[0,\infty)$ uzayına ait tüm sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olsun. Ayrıca $C_{x^2}^*[0,\infty)$ da $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}<\infty$ şartını sağlayan tüm $f\in C_{x^2}[0,\infty)$ uzayının alt uzayı olarak verilsin. $C_{x^2}^*[0,\infty)$ uzayında ki norm aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$\|f(x)\|_{x^2}=\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

Teorem 2.2.1 Kabul edelim ki sırasıyla $0<q_n\le 1$ dizisi yeterince büyük n değeri için $q_n\to 1$ ve b_n dizisi de $b_n\to\infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}\to 0$ şartlarını sağlasın. $f\in C_{x^2}^*[0,\infty)$ fonksiyonu da $[0,\infty)$ aralığında tanımlı monoton artan olsun. O halde (2) operatörü için aşağıda ki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2}=0 \qquad (3)$$

İspat 2.2.1 Öncelikle aşağıdaki operatörü tanımlayalım

$$*\,P_n(f,q_n;x)=\begin{cases}P_n(f,q_n;x) & eğer\ 0\le x\le b_n,\\ f(x) & eğer\ x>b_n.\end{cases}$$

[1]'deki teoremin sonuçlarından yararlanarak $*\,P_n(f,q_n;x)$ operatörünün sırasıyla $r=0,1,2$ için aşağıdaki üç şartı da sağlaması gerektiği göstermeliyiz.

$$\lim_{n\to\infty}\|*\,P_n(t^r,q_n;x)-x^r\|_{x^2}=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(t^r,q_n;x)-x^r|}{1+x^2}$$

$P_n(1,q_n;x)=1$ olduğundan (3) denklemi $r=0$ için sağlar. Ayrıca Lemma 2.1.3'den sırasıyla $r=1,2$ için aşağıdaki sonuçlara da kolaylıkla ulaşabiliriz.

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(t,q_n;x)-x|}{1+x^2}=\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{\left|\left(\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}-1\right)x+\frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\right|}{1+x^2}$$

$$\le\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}$$

$q_n\to1$ ve b_n dizisi de $b_n\to\infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}\to0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}=0$$

elde edilir.

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(t^2,q_n;x)-x^2|}{1+x^2}$$

$$=\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{\left|\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-1\right)x^2+\frac{q_n^2+3q_n+2}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}x+\frac{1}{q_n^2+q_n+2}\frac{[n]_{q_n}^2b_n^2}{[n+1]_{q_n}^4}\right|}{1+x^2}$$

$$\le\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-1\right)+\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x}{1+x^2}\frac{q_n^2+3q_n+2}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{1}{q_n^2+q_n+2}\frac{[n]_{q_n}^2b_n^2}{[n+1]_{q_n}^4}$$

dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(t^2,q_n;x)-x^2|}{1+x^2}=0$$

elde edilir ve böylece ispatımız tamamlanır. Fakat şunu biliyoruz ki $f\in C_{x^2}[0,\infty)$ için Teorem 2.2.1 [1]'e göre doğru değildir. Bu durumu ortadan kaldırmak için şimdi $P_n(f,q_n;x)$'nin başka bir özelliğini vererek aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.2.2 Kabul edelim ki sırasıyla $0<q_n\le1$ dizisi yeterince büyük n değeri için $q_n\to1$ ve b_n dizisi de $b_n\to\infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}\to0$ şartlarını sağlasın. $f\in C_{x^2}[0,\infty)$ fonksiyonu da $[0,\infty)$ aralığında tanımlı monoton artan olsun. O halde (2) operatörü için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2}=0 \tag{4}$$

İspat 2.2.2 $f\in C_{x^2}[0,\infty)$ olduğundan, her $\epsilon>0$ için bir $\delta_n>0$ var öyle ki $|t-x|<\delta_n$ koşulunu sağlayan her $x\in[0,b_n]$ ve $t\in[0,\infty)$ için $|f(t)-f(x)|<\epsilon$'dur. [18]' de ağırlıklı uzaylardaki süreklilik modülü olarak tanımlanan $\Omega(f;\delta_n)$'nin özelliğinden yararlanarak sırasıyla $|t-x|<\delta_n$ ve $|t-x|\ge\delta_n$ durumları için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$|f(t)-f(x)|<\epsilon+\Omega(f;\delta_n)((t-x)^2+(1+x^2)|t-x|)$$

$x\in[0,b_n]$ ve $t\in[0,\infty)$ için $P_n(f,q_n;x)$ ‘nin lineerlik ve pozitiflik özelliğini kullanarak

$$|P_n(f,q_n;x)-f(x)|\leq\epsilon+\Omega(f;\delta_n)P_n((t-x)^2,q_n;x)+\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)P_n(|t-x|,q_n;x)$$

$$\leq\ \epsilon+\Omega(f;\delta_n)P_n((t-x)^2,q_n;x)+\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)\sqrt{P_n((t-x)^2,q_n;x)}$$

elde ederiz. Lemma 2.2.1’deki sonuçlardan

$$\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2}\leq\frac{\epsilon}{1+x^2}+\Omega(f;\delta_n)\left[\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}+1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x^2}\left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\frac{2}{q_n+1}\right)+\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}\right)\right]$$

$$+\sqrt{\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}+1\right)x^2+\left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\frac{2}{q_n+1}\right)x+\frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}}$$

Elde edilir ve buradan her tarafın $[0,b_n]$ aralığında supremumu alınırsa,

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2}\leq\epsilon\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{1}{1+x^2}+\Omega(f;\delta_n)\left[\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}+1\right)\right.$$

$$\left.+\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{x}{1+x^2}\left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\frac{2}{q_n+1}\right)+\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}\right)\right]$$

$$+\sup_{x\in[0,b_n]}\sqrt{\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}-2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}+1\right)x^2+\left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\frac{2}{q_n+1}\right)x+\frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}}$$

$$\leq\epsilon+\Omega(f;\delta_n)\left[3\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}+\sqrt{3\frac{[n]_{q_n}^3b_n}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}}\right]$$

Yukarıda ki eşitsizliği düzenlersek aşağıdaki sonuç elde edilir ve (4)’de verilen eşitliğinin ispatı tamamlanır.

$$\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2}\leq\frac{\epsilon}{\sqrt{b_n}}+\Omega(f;\delta_n)\left[3\frac{[n]_{q_n}^3\sqrt{b_n}}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^{\frac{3}{2}}}{[n+1]_{q_n}^4}+\sqrt{3\frac{[n]_{q_n}^3}{[n+1]_{q_n}^4}+\frac{[n]_{q_n}^2b_n}{[n+1]_{q_n}^4}}\right]$$

2.3. Voronovskaja Tip Asimtotik Teorem

Bu bölümde $P_n(f,q_n;x)$ operatörün için Voronovskaja tip asimtotik yaklaşımı ile ilgili teoremi vermeden ilk olarak bu teoremin ispatında da yararlanacağımız aşağıda ki Lemma’yı ispatı ile verelim.

Lemma 2.3.3 Kabul edelim ki sırasıyla $0 < q_n \leq 1$ dizisi yeterince büyük n değeri için $q_n \to 1$ ve b_n dizisi de $b_n \to \infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}} \to 0$ şartlarını sağlasın. O halde $P_n(f, q_n; x)$ operatörü için aşağıdaki limitler sağlanır.

$$i)\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n(t-x, q_n; x) = \frac{1}{2}$$

$$ii)\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n((t-x)^2, q_n; x) = x$$

$$iii)\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]_{q_n}^2}{{b_n}^2} P_n((t-x)^4, q_n; x) = 2x^2$$

İspat 2.3.3 Lemma 2.1.3'deki sonuçlardan

$$i)P_n(t-x, q_n; x) = (\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} - 1)x + \frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n} b_n}{[n+1]_{q_n}^2}$$

her tarafı $\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}$ ile çarparsak,

$$\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n(t-x, q_n; x) = \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}\left(\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} - 1\right)x + \frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}$$

yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $n \to \infty$ için limit uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n(t-x, q_n; x) = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$ii)\ P_n((t-x)^2, q_n; x) = \left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} - 2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3 b_n}{[n+1]_{q_n}^4} - \frac{2}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n} b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\right)x$$

$$+\frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2 {b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}$$

Benzer şekilde her tarafı $\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}$ ile çarparsak,

$$\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n((t-x)^2, q_n; x) = \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} - 2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} + 1\right)x^2$$

$$+\left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3}{[n+1]_{q_n}^3} - \frac{2}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}\right)x + \frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2 b_n}{[n+1]_{q_n}^3}$$

ve yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $n \to \infty$ için limit uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]_{q_n}}{b_n} P_n((t-x)^2, q_n; x) = x$$

elde edilir.

Buradan Lemma 2.1.3'de sonuçarın yardımı ve $P_n(f, q_n; x)$ operatörünün lineerlik özelliğini kullanarak aşağıda ki eşitliği

$$P_n((t-x)^4, q_n; x) = Z_{1,n}x^4 + Z_{2,n}x^3 + Z_{3,n}x^2 + Z_{4,n}x + Z_{5,n} \quad (5)$$

sırasıyla,

$$Z_{1,n} = \frac{q_n{}^8 [n]_{q_n}^8}{[n+1]_{q_n}^8} - 4\frac{q_n{}^3 [n]_{q_n}^6}{[n+1]_{q_n}^6} + 6\frac{q_n [n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} - 4\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2} + 1$$

$$Z_{2,n} = \left[\frac{q_n{}^3(q_n{}^6 + 3q_n{}^5 + 6q_n{}^4 + 10q_n{}^3 + 9q_n{}^2 + 7q_n + 4)}{q_n{}^4 + q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\frac{[n]_{q_n}^7}{[n+1]_{q_n}^7} - 4\left(\frac{q_n{}^4 + 3q_n{}^3 + 6q_n{}^2 + 5q_n + 3}{q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^5}{[n+1]_{q_n}^5} + 6\left(\frac{q_n{}^2 + 3q_n + 2}{q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^3}{[n+1]_{q_n}^3}\right]\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}$$

$$Z_{3,n} = \left[q_n\left(\frac{q_n{}^6 + 4q_n{}^5 + 11q_n{}^4 + 18q_n{}^3 + 15q_n{}^2 + 11q_n + 5)}{q_n{}^4 + q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\frac{[n]_{q_n}^6}{[n+1]_{q_n}^6} - 4\left(\frac{q_n{}^3 + 4q_n{}^2 + 6q_n + 2}{q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} + \frac{6}{q_n{}^2 + q_n + 1}\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}\right]\frac{b_n{}^2}{[n+1]_{q_n}^2}$$

$$Z_{4,n} = \left[\left(\frac{q_n{}^4 + 5q_n{}^3 + 10q_n{}^2 + 10q_n + 4}{q_n{}^4 + q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^5}{[n+1]_{q_n}^5} - \left(\frac{4}{q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^3}{[n+1]_{q_n}^3}\right]\frac{b_n{}^3}{[n+1]_{q_n}^3}$$

$$Z_{5,n} = \left[\left(\frac{1}{q_n{}^4 + q_n{}^3 + q_n{}^2 + q_n + 1}\right)\frac{[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}\right]\frac{b_n{}^4}{[n+1]_{q_n}^4}$$

elde ederiz. $q_n \to 1$ ve b_n dizisi de $b_n \to \infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}} \to 0$ özelliklerini kullanarak,

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}\{Z_{1,n}\} = 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}\{Z_{2,n}\} = 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}\{Z_{3,n}\} = 2, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}\{Z_{4,n}\} = 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}\{Z_{1,n}\} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(6)'de elde ettiğimiz sonuçları birleştirerek bizden istenen aşağıdaki sonuca ulaşır ve böylece ispatımız tamamlanır.

$$iii) \lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{b_n{}^2}P_n((t-x)^4, q_n; x) = 2x^2$$

Teorem 2.3.4. $f, f', f'' \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ ve $q_n \to 1$ ve b_n dizisi de $b_n \to \infty$ iken $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}} \to 0$ özelliklerini sağlasın o halde $P_n(f, q_n; x)$ operatörü için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}(P_n(f, q_n; x) - f(x)) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{x}{2}f''(x)$$

İspat 2.3.4 . f fonksiyonu için Taylor açılımından faydalanarak aşağıdaki eşitliği kolaylıkla yazabiliriz.

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + \varepsilon(t,x)(t-x)^2$$

burada $t \to x$ iken $\varepsilon(t,x) \to 0$ dır. $P_n(f,q_n;x)$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$P_n(f,q_n;x) - f(x) = f'(x)P_n(t-x,q_n;x) + \frac{1}{2}f''(x)P_n((t-x)^2,q_n;x) + P_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,q_n;x)$$

Lemma 2.1.3'den

$$P_n(f,q_n;x) - f(x) = f'(x)\left(\left(\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}-1\right)x + \frac{1}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}f''(x)\left[\left(\frac{q_n[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} - 2\frac{[n]_{q_n}^2}{[n+1]_{q_n}^2}+1\right)x^2 + \left(\frac{{q_n}^2+3q_n+2}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^3 b_n}{[n+1]_{q_n}^4} - \frac{2}{q_n+1}\frac{[n]_{q_n}b_n}{[n+1]_{q_n}^2}\right)x\right.$$
$$\left. + \frac{1}{{q_n}^2+q_n+1}\frac{[n]_{q_n}^2{b_n}^2}{[n+1]_{q_n}^4}\right] + P_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,q_n;x)$$

Elde edilir ve yukarıda ki eşitliğin sağ tarafının son kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliğide uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}P_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,q_n;x) \le \sqrt{\lim_{n\to\infty}P_n(\epsilon^2(t,x),q_n;x)}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{{b_n}^2}P_n((t-x)^4,q_n;x)}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\epsilon^2(t,x),q_n;x) = 0$ olduğu sürece ve bir önceki lemmadan hesapladığımız

$\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}^2}{{b_n}^2}P_n((t-x)^4,q_n;x) = 2x^2$ ifadesi sonlu olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}P_n(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,q_n;x) = 0$$

elde edilir. Bu nedenden Lemma 2.3.3 deki sonuçlar yardımı ile aşağıdaki eşitlik sağlanır ve ispatımız tamamlanır.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n+1]_{q_n}}{b_n}(P_n(f,q_n;x)-f(x)) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{x}{2}f''(x)$$

Teorem.2.3.5. Kabul edelim ki $0 < q_n \le 1$ ve $b_n \to \infty$ birer dizi olsun öyle ki $q_n \to 1$ ve $\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}} \to 0$ şartlarını sağlasın. O halde $f \in C_{x^2}^*[0,\infty)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2} \le M\Omega\left(f;\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}\right)$$

burada M=408'dir.

İspat 2.3.5 Operatörün lineerlik ve monotonluk özelliğinden;

$|P_n(f,q_n;x)-f(x)| \le P_n(|(f(t)-f(x)|,q_n;x)$ olur.

[18]' de verilen (vii) deki özellikleri kullanarak;

$$|f(t)-f(x)| \le 2(1+\delta_n^2)(1+x^2)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)(1+(t-x)^2)\Omega(f;\delta_n)|f(t) - f(x)| \le 2(1+\delta_n^2)(1+x^2)\Omega(f;\delta_n)S_n(t,x)$$

$S_n(t,x) = \left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)(1+(t-x)^2)$ dersek;

buradan

$$S_n(t,x) \le \begin{cases} 2(1+\delta_n^2), & |t-x| < \delta_n \\ 2(1+\delta_n^2)\dfrac{(t-x)^4}{\delta_n^4}, & |t-x| \ge \delta_n \end{cases}$$

ve böylece

$$S_n(t,x) \le 2(1+\delta_n^2)\left[1+\frac{(t-x)^4}{\delta_n^4}\right]$$

elde edilir.

$$|P_n(f,q_n;x)-f(x)| \le P_n(|(f(t)-f(x)|,q_n;x) \le 2(1+\delta_n^2)(1+x^2)\Omega(f;\delta_n)P_n(S_n(t,x),q_n;x)$$
$$\le 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)\left[1+\frac{1}{\delta_n^4}P_n((t-x)^4,q_n;x)\right]$$

Lemma 2.1.3 ‘deki sonuçlar yardımıyla (5)’deki eşitliğin $[0,b_n]$ aralığında supremumu alınırsa aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde ederiz.

$$\sup_{x\in[0,b_n]} P_n((t-x)^4,q_n;x) \le 8\frac{[n]_{q_n}^8 {b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^8}+20\frac{[n]_{q_n}^7 {b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^8}+15\frac{[n]_{q_n}^6 {b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^8}+6\frac{[n]_{q_n}^5 {b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^8}+\frac{1}{5}\frac{[n]_{q_n}^4 {b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^8}$$
$$\le \frac{{b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}\left(\frac{8[n]_{q_n}^8+20[n]_{q_n}^7+15[n]_{q_n}^6+6[n]_{q_n}^5+\frac{1}{5}[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}\right)$$
$$\le 50\frac{{b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}\frac{[n]_{q_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4} \le 50\frac{{b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}$$

Buradan

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)|}{1+x^2} \le 4(1+\delta_n^2)\Omega(f;\delta_n)\left(1+\frac{50}{\delta_n^4}\frac{{b_n}^4}{[n+1]_{q_n}^4}\right)$$

elde edilir. Yukarıda ki denklemde $\delta_n = \frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}$

seçilirse $\delta_n \to 0$ olduğundan belirli bir n değerinden sonra $\delta_n < 1$ olacaktır. Dolayısıyla M=408 olmak üzere

$$\sup_{0\le x\le b_n}\frac{|P_n(f,q_n;x)-f(x)-f(x)|}{1+x^2} \le M\Omega\left(f;\frac{b_n}{[n+1]_{q_n}}\right)$$

bulunur ve ispatımız tamamlanır.

3. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada q-Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörü ile elde edilen yaklaşım sonuçlardan aşikârdır ki (2) denkleminde eğer $q=1$ alınırsa, [20]’de verilen ağırlıklı uzaylarda ki klasik Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörü elde edilir. Yukarıdaki çalışma neticesinde (2) operatörü ile elde edilen yaklaşım oranı, [20]’de elde edilen yaklaşım oranına göre daha iyidir diyebiliriz.

Kaynakça

[1] Pinkus, A. 2000. Weierstrass and Approximation Theory. J. Approx Theory, 107:1-66.

[2] Bernstein, S. 1912. Démonstration du Théorémé de Weierstrass, Fondee Surla Calcul Des Probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow ,13(2): 1-2.

[3] Kantorovich, L. V. 1930. Sur Certain Developpements Suivant les Polynomes de La Forme de S. Bernstein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

[4] Chlodovsky, I. 1937. Sur le Developpement Des Fonctions Definies Dans Un Intervalle Infini en Series De Polynomes de M. S. Bernstein. Compos Math,4:380-393.

[5] Szász, O. 1950. Generalization of S.Bernstein's Polynomials to Infinite Interval, J. Research Nat. Bur. Standarts, 45, 239-245.

[6] Bohman, H. 1952. On Approximation of Continuous and of Analytic Functions. Arkiv för Matematik, *2*(1), 43-56.

[7] Korovkin, P. P. 1953. On Convergence of Linear Positive Operators In The Space of Continuous Functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90:961-964.

[8] Lupaş, L., Lupaş, A. 1987. Polynomials of Binomial Type and Approximation Operators. Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, *32*(4), 61-69.

[9] Phillips, G. M. 1997. Bernstein Polynomials based on the q−integers, Ann. Numer. Math. 4 , no. 1-4,511-518.

[10] Oruç, H., Tuncer, N. 2002. On the Convergence and Iterates of q-Bernstein Polynomials. Journal of Approximation Theory, 117(2), 301-313.

[11] Videnskii, V. S. 2005. On Some Classes of q-Parametric Positive Linear Operators. In Selected Topics in Complex Analysis (pp. 213-222). Birkhäuser Basel.

[12] Aral, A., Gupta, V. 2006. The q-derivative and Applications to q-Szász Mirakyan Operators. Calcolo 43, no. 3, 151–170.

[13] Karsli, H., Gupta, V. 2008. Some Approximation Properties of q-Chlodowsky Operators. Applied Mathematics and Computation, 195(1), 220-229.

[14] Büyükyazıcı, İ. 2010. Approximation By Stancu–Chlodowsky Polynomials. Computers & mathematics With Applications, 59(1), 274-282.

[15] Dalmanoglu, Ö., Dogru, O. 2010. On Statistical Approximation Properties of Kantorovich Type q-Bernstein operators. Mathematical and Computer Modelling, 52(5-6), 760-771.

[16] Aral, A. 2008. A Generalization of Szász–Mirakyan Operators Based on q-integers. Mathematical and Computer Modelling, 47(9-10), 1052-1062.

[17] Karaisa, A., Aral, A. 2016. Some Approximation Properties of Kantorovich Variant of Chlodowsky Operators Based on q-integer, 65,97-119 Ankara.

[18] İspir, N. 2001. On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces. Turk. J. Math. 25:355-365.

[19] Gadjiev, A. D. 1976. Theorems of the Type of P.P Korovkin's Theorems. Mat. Zametki, 20(5), 781-786.

[20] Aslan, R. 2014. Ağırlıklı Uzaylarda Kantorovich-Chlodowsky-Szász Tipi Operatörlerin Yaklaşımı ve Yaklaşım Hızı. Harran Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 29s, Şanlıurfa.