



Türkiye’de İspat Üzerine Yapılan Çalışmaların Analizi: Bir Sistemik Derleme

Tuğba ÖZTÜRK*, Damla DEMİREL**

• **Geliş Tarihi:** 19.08.2020 • **Kabul Tarihi:** 04.06.2021 • **Ç. Yayın Tarihi:** 07.06.2021

Öz

İspat yapma, üst düzey becerilerin aynı anda işe koşulmasına aracı olarak yaşamımızda karşılaşılan problemleri çözme ve olaylar arasında ilişki kurma gibi gerekliliklerin gerçekleşmesinde büyük bir rol oynamaktadır. Öğretim sürecinde matematiksel gerçeklerin sebepleri ile birlikte anlaşılması, matematiksel bilginin yapılandırılması ve bu bilginin kalıcı hale gelmesini sağlaması ispatın matematik eğitiminin merkezinde olduğunu gösterir niteliktedir. Bu önem, matematik eğitimine yön verme noktasında ispat çalışmalarının bütünsel bir bakış açısıyla incelenmesini anlamlı kılmaktadır. Bu araştırmanın amacı, Türkiye’de ispat çalışmalarını sistemik derleme yöntemiyle analiz etmek ve matematik eğitimi alanındaki eğilimi ortaya çıkarmaktır. Araştırma kapsamında amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilen 49’u makale ve 55’i tez olmak üzere toplam 104 çalışma analiz edilmiştir. Çalışmaların seçiminde YÖK Ulusal Tez Merkezi, TÜBİTAK ULAKBİM DergiPark, Google Akademik arama motorundan faydalanılmıştır. Çalışmalar; çalışmanın yılı, amacı, yaklaşımı/yöntemi, örnekleme ve veri toplama araçları olmak üzere beş boyutta incelenmiştir. Araştırmanın verileri, frekans ve yüzdeye dayalı olarak yorumlanmış ve tablo ile grafiklerin kullanımıyla mevcut durum gösterilmiştir. Araştırmanın bulguları, son yıllarda ispat çalışmalarının sayısında kayda değer bir artış olduğunu göstermiştir. Ayrıca çalışmaların önemli bir bölümünün ispat sürecini ve ispata yönelik bakış açısını incelemeye yönelik olduğu tespit edilmiştir. En çok nitel yaklaşımın kullanıldığı, öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmaların ağırlıkta olduğu, veri toplama aracı olarak çoğunlukla açık uçlu sınav/test ve mülakatın tercih edildiği şeklinde sonuçlara varılmıştır. Bu sonuçlara dayanarak her bir öğretim kademesi için ispat sürecinde yaşanan zorluklar ve bu zorlukların giderilmesine yönelik önlemler ile ispat öğretimine ilişkin sürecin tasarımına yönelik konuların aydınlatılması gerektiği önerilmiştir.

Anahtar sözcükler: matematik eğitimi, ispat, sistemik derleme

Atıf:

Öztürk, T. ve Demirel, D. (2022). Türkiye’de ispat üzerine yapılan çalışmaların analizi: bir sistemik derleme. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54, 32-68. doi: 10.9779/pauefd.782832.

* Dr. Öğr. Üyesi, Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, <https://orcid.org/0000-0003-1599-8574>, tugbaozturk@trabzon.edu.tr

** Arş. Gör. Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, <https://orcid.org/0000-0001-7940-681X>, damlakutlu@trabzon.edu.tr

Giriş

İçinde bulunduğumuz bilgi çağında bilim ve teknolojide yaşanan gelişmeler, toplumların ihtiyaç duyduğu insan profiline değişmesine neden olmuştur. Artık bireylerin yalnızca bilgiye sahip olmaları değil, bilgiye ulaşmaları beklenmektedir (Adıgüzel, 2011). Bilgiye ulaşma noktasında varsayımda bulunma, ilişkilendirme, muhakeme yapma, genelleme gibi eylemler dizisi gerçekleşmektedir. Bu eylemler birer üst düzey beceri (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) olarak çağımızda istenen insan profiline oluşumunda oldukça önemlidir. Dolayısıyla bireylerin varsayımda bulunma, ilişkilendirme, akıl yürütme, problem çözme gibi becerilerle donanması yaşamlarındaki gereklilikler arasındadır. Matematik eğitimi bireylere bu gerekliliği kazandırabilecek önemli bir alandır (Umay, 2003). İspatın yapıları ve değişkenleri belirleme, varsayımda bulunma ve mantıksal gerekçeleri organize etme gibi bir dizi zihinsel alışkanlığa (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002) dayalı bir süreç olması üst düzey becerilere ilişkin eylemleri içinde barındırdığını gösterir niteliktedir. Bununla birlikte ispatın matematik içerisinde açıklama, keşfetme, iletişim, sistematikleştirme gibi rollerinin (de Villiers, 1999; Yackel ve Hanna, 2003) olması belirtilen becerilerin gerçekleştirilebilmesinde bir köprü vazifesi görmektedir. Bu bakımdan matematik eğitiminde yaşam gerekliliklerin kazandırılması ispat yapmanın doğasının öğretim sürecine yansıtılması ile mümkün olabilmektedir (Öztürk, 2016).

Matematiksel bilginin evrensel hale gelmesinde önemli bir yere sahip olan ispat (Hanna ve Barbeau, 2008), herhangi bir problem durumu üzerinden keşifler yapma ile başlayan varsayımlarda bulunarak bunların doğruluğunu inceleme ve gerekçeler sunma ihtiyacı sonucunda formel bir ispatla sonlanan bilgi oluşum sürecidir (Öztürk, 2016; Turğut, Yenilmez ve Uygan, 2013). Bu bakımdan ispat basit bir matematiksel işlemin ötesinde zihinsel faaliyetleri içeren bir süreç niteliği taşımaktadır (Selden ve Selden, 2003) ve birçok fonksiyonu içeren bir yapıya sahiptir (Bell, 1976; de Villiers, 1990; 1999). Bu doğrultuda ispat, doğrulama fonksiyonu ile açıklama, keşfetme, sistemleştirme, iletişim ve zihinsel meydan okuma fonksiyonlarını içinde barındıran kapsamlı bir süreci temsil etmektedir. Bu bakımdan ispatın kapsamındaki işlevlerin öğretim süreci dışında tutulması düşünülemez.

Birçok araştırmacı ispatın, öğretim sürecinin en önemli unsurlarından biri olduğu konusunda hemfikirdir. (Almedia, 2000; Hanna, 1991; Hanna ve Jahnke, 1996; Knuth, 2002; Mariotti ve Balacheff, 2008; Stylianides, 2007). İspat ile öğrenciler bir ifadenin doğruluğunu göstermekten öte matematiksel iletişim kurma ve kendi matematiksel bilgilerini oluşturma

fırsatı elde ederler (Schoenfeld, 1994). İspat, öğrencilerin matematiksel kavramları derinlemesine öğrenip bu kavramlarla ilgili neden, niçin sorularına mantıklı cevaplar bulmasına olanak vermektedir (Güler ve Temizyürek, 2015). Matematiksel ispatın öğrencilerin var olan matematiksel gerçekleri sebepleri ile birlikte anlamalarını sağlayarak (Hanna, 1991) matematiksel bilginin inşasını gerçekleştirmesi ve bu bilginin kalıcı hale gelmesine imkân sunması (Stylianides, 2007) öğretim sürecindeki önemini daha da pekiştirmektedir. Bu durum, ispatın kavramsal öğrenmeyi desteklediğine ve anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesinde bir köprü görevi gördüğüne (Tucker, 1999) işaret etmektedir. Öğretim sürecinde öğrencilerin bilgiyi daha anlamlı hale getirmesini sağlamanın yanında bir problemin çözümü için farklı yöntem, strateji geliştirmeleri, tahminlerde bulunmaları ve kavramları ilişkilendirmelerini de sağlamaktadır (Dede ve Karakuş, 2014; Mariotti ve Balacheff, 2008). Bunlar ise matematik eğitiminin en önemli amaçlarından olan matematiksel düşünme ve akıl yürütme gibi becerilerin gelişimiyle doğrudan ilişkilidir (Stylianides, 2007). NCTM (2000, s. 342) matematiksel ispatın öğretim sürecindeki önemini “*Muhakeme ve ispat belirli zamanlar ya da öğretim programlarında yer alan belirli konular için ayrılmış özel bir etkinlik değildir. Aksine hangi konu olduğuna bakılmaksızın öğretim sürecinin doğal bir parçası olmalıdır.*” şeklindeki ifadelerle vurgulamakta ve öğretimin ayrılmaz bir parçası olması gerektiğine işaret etmektedir. Başka bir ifadeyle ispatın öğretim sürecinin her kademesinde ve her konuda yer verilmesi gerektiğinin altını önemle çizmektedir. İspatın matematik eğitimindeki rolünü benzer ifadelerle birçok araştırmacı destekleyerek önemine özellikle vurgu yapmakta ve öğretim kademelerinin en alt basamağından itibaren ispatın öğretim sürecinde yer alması gerektiğini belirtmektedirler (Ball ve Bass, 2003; Stylianides ve Ball, 2008; Stylianides ve Stylianides, 2008).

Matematik öğretim programları incelendiğinde öğrencilere kazandırılması öngörülen beceriler arasında problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme ve iletişim gibi üst düzey becerilere yer verildiği (MEB, 2018) dikkat çekmektedir. Ancak matematik eğitimindeki tüm önemine rağmen ispata kavram olarak doğrudan yer verilmemesi dikkat çeken ve üzerinde durulması gereken önemli bir husustur (Aylar, 2014; Doğan, 2019). Bunun doğal bir sonucu olarak ispat, matematik öğretimi uygulamalarına yansımamakta ve öğrenciler önceki öğrenimlerinden ön bir bilgiye sahip olmaksızın ispat kavramı ile lisans seviyesinde karşılaşmaktadır. Bu durum, ülkemizde ispatın matematik eğitimi için öneminin ne kadar anlaşıldığı sorusunu akıllara getirmektedir. Ülkemizde ispat ile ilgili yapılan çalışmalarını incelemek ve ardından bu çalışmaların içinde bulunduğu duruma yönelik ayrıntılara yer

vermek bu soruyu cevaplamada yol gösterici bir rol oynayacaktır. İlgili literatür incelendiğinde ise Türkiye’de yapılan ispat çalışmalarının nasıl bir eğilim içinde olduğunu kapsamlı bir şekilde ortaya koyan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ancak matematiksel ispat çalışmalarının incelendiği bir araştırma olarak Öztürk, Akkan, Kaleli-Yılmaz ve Kaplan’ın (2015) yaptığı bir çalışmadan söz edilebilir. Belirtilen çalışmada ispat ile ilgili son üç yılda ulusal ve uluslararası literatürde ortaokul öğrencileri ve öğretmenleri ile yürütülen lisansüstü tezler incelenmiştir. Dolayısıyla Öztürk ve diğerlerinin (2015) çalışmasında yıl, örneklem, çalışmanın türü ve sayısı bakımından belirgin bir sınırlama mevcuttur. Bu çalışma, yıl sınırlaması yapılmaksızın matematik eğitiminde ulusal literatürdeki tüm ispat çalışmalarını (bildiri ve teorik makale hariç) ele alma ve araştırma yaklaşımı açısından bir ayırım yapmama bakımından belirtilen araştırmadan farklılaşmaktadır. Bu bakımdan Türkiye’deki ispat çalışmalarındaki yönelimi resmedebilecek ve ilgili konudaki araştırmaların gidişatına yön verebilecek bir çalışmanın gerekliliği açıkça görülmektedir. Bu çalışmada ispata yönelik yapılan araştırmaların bütünsel bir bakış açısıyla incelenmesi, öğretim süreçlerine ya da araştırmaların uygulamalarına yönelik eksikliklerin görülebilmesi açısından oldukça önemlidir. Ayrıca çalışmanın ispata yönelik bir farkındalık oluşturulabileceği düşünüldüğünde alana önemli katkılar sunabileceği öngörülmektedir. Bu doğrultuda ispata yönelik yapılan çalışmalara genel bir çerçeveden bakmak, çalışmaları çeşitli boyutlarda incelemek, ispat araştırmalarının içinde bulunduğu durumu değerlendirerek eğitim sistemimiz içerisinde ispat öğretiminin yerini ortaya koymak ve ileride yapılacak çalışmalara ışık tutmak amacıyla bu çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında “Ulusal literatürde matematik eğitimi alanında yapılan ispat ile ilgili çalışmaların genel durumu (eğilimi) nasıldır?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu araştırma problemi doğrultusunda cevap aranan alt problemler ise şu şekildedir:

- 1) Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların yıllara göre dağılımı nasıldır?
- 2) Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların amaçlarına göre dağılımı nasıldır?
- 3) Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların kullanılan yöntem dağılımı nasıldır?
- 4) Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların yapıldığı örneklem dağılımı nasıldır?
- 5) Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmalarda kullanılan veri toplama araçlarının dağılımı nasıldır?

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu araştırmada Türkiye’de matematik eğitiminde yürütülen ispat ile ilgili çalışmaların nasıl bir eğilim içerisinde olduğunu tespit etmek amacıyla sistematik derleme yöntemi kullanılmıştır. Sistematik derleme, çeşitli dahil etme ve hariç tutma kriterleri kullanılarak aynı konuda yapılan tüm çalışmaları kapsamlı bir şekilde tarayıp hangi çalışmaların derlemeye alınacağını belirlemesi ve bu çalışmaların araştırma soruları bağlamında sentez edilmesidir (Petticrew ve Roberts, 2006; Torgerson, 2003; Oakley, 2012). Sistematik derleme; geleneksel bir literatür taraması değil (Lo, 2020), sistemli bir şekilde yürütülen, şeffaf ve tekrarlanabilir olma özellikleri taşıyan bir araştırma yöntemidir (Petticrew ve Roberts, 2006; Zawacki-Richter, 2020). 1990’lı yıllardan itibaren eğitim araştırmalarının sayısındaki artış, belirli bir konuya yönelik birbirinden bağımsız çok sayıda çalışmanın bir bütün halinde görülebilme ihtiyacını beraberinde getirmiştir. Son zamanlarda eğitim araştırmalarında sistematik derleme yönteminin daha fazla kullanılır hale gelmesi (ör., Cevher ve Yıldırım, 2020; Ilgaz, 2018; Lin, Yin, Tang, Hadad ve Zhai, 2020; Magalhães, Ferreira, Cunha ve Rosário, 2020; Martin, Sun ve Westine, 2020) de bu ifadeyi destekler niteliktedir. Sistematik derleme bir süreci temsil etmekle birlikte belirli işlem basamaklarına sahiptir (Gough, Oliver ve Thomas, 2012; Torgerson, 2003). Bu işlem basamakları dikkate alınarak mevcut çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu işlem basamaklarını temsil eden akış şeması Şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Sistematik derleme yönteminin işlem basamakları

Sistemik derleme, bir konuda yapılan çok sayıda çalışmanın sentezini sunarak ilgili konudaki genel eğilimi ortaya koymaktadır (Petticrew ve Roberts, 2006). Bunun yanında sistemik derleme sonucunda ilgili konuya yönelik literatürdeki boşluklar ve alana yönelik yapılabilecek uygulamalar belirlenmektedir (Gough vd., 2012). Böylece ileride yapılacak olan çalışmalara ve uygulamalara ışık tutularak hem konunun bağlı olduğu alan ve araştırmacılar hem de politika yapıcılar için zengin bir içerik sunmaktadır (Petticrew ve Roberts, 2006; Polanin, Maynard ve Dell, 2017).

Çalışmaların Seçiminde Kullanılan Ölçütler

Bu araştırmanın örneklemini oluşturan çalışmaların seçiminde ölçüte dayalı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Çalışmaların seçiminde göz önüne alınan ölçütler şu şekildedir:

- a) Matematik eğitimi alanında yapılmış olması
- b) İspat, ispatlama, kanıt, kanıtlama anahtar kelimelerinin kullanılmış olması
- c) Ulusal olması
- d) Nitel/nicel/karma veri içermesi
- e) Tez ve makale olması
- f) Erişime açık olması ve tam metnine ulaşılması

Veri Toplama Süreci

Çalışma kapsamında öncelikle YÖK Ulusal Tez Merkezi, TÜBİTAK ULAKBİM Dergipark, Google Akademik arama motoru üzerinde anahtar kelime olarak “*ispat*”, “*ispatlama*”, “*kanıt*”, “*kanıtlama*” olmak üzere ifadeleri geçen ve matematik eğitimi alanında yayımlanmış makale ve tezler taranmıştır. Ulaşılan çalışmalar iki araştırmacı tarafından incelenmiştir. İnceleme sonucunda 6 çalışmanın nicel/nitel/karma veri sunmayıp ispat yöntemleri, ispatın matematik eğitimindeki önemi gibi bilgi içerikli başlıklara yer verdiği ve 3 çalışmanın da bildiri olduğu tespit edilmiştir. Böylece toplamda 9 çalışma belirtilen ölçütleri sağlamadığı için analize dâhil edilmemiştir. Belirlenen ölçütleri sağlayan 49 makale ve 55 tez (Ek 1) analize tabi tutulmuştur.

Veri Toplama Aracı ve Veri Analizi

Çalışmanın değerlendirme sürecinde, öncelikle araştırma problemleri göz önüne alınarak bir değerlendirme formu hazırlanmıştır. Hazırlanan “İspat Çalışmaları Değerlendirme Formu” Tablo 1’de yer almaktadır.

Tablo 1. İspat Çalışmalarını Değerlendirme Formu

Araştırmanın Adı:
Araştırmanın Künyesi:
Araştırmanın Yapıldığı Yıl:
Araştırmanın Amacı:
Araştırmanın Örneklemi:
Araştırmanın Yaklaşımı*:
Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçları:

*Araştırmanın modeli açıkça not edilmelidir.

Yukarıdaki değerlendirme formu her bir çalışma için doldurulmuştur. Verilerin çözümlenmesinde içerik ve betimsel analiz teknikleri bir arada kullanılmıştır. Her bir çalışma için doldurulan değerlendirme formu, iki araştırmacı tarafından incelenmiş ve bu formdaki araştırmanın amacı kısmı için ortak kodlar belirlenmiştir. Türkiye’de matematik eğitiminde yürütülen ispat ile ilgili çalışmaların nasıl bir eğilim içerisinde olduğunun tespit edilmesi amaçlandığından çalışmaların seçiminde yıl kısıtlaması getirilmemiştir. Ulaşılan çalışmaların fazla sayıda olmasından dolayı formda yer alan araştırmanın yapıldığı yıl kısmı için kategorik yapılar oluşturulmuştur. Ayrıca her bir çalışma, değerlendirme formunda incelendikten sonra araştırmanın örneklemi, araştırmanın yaklaşımı ve modeli, araştırmada kullanılan veri toplama aracı kısımlarına yönelik kategoriler belirlenmiştir. Formun her bir kısmı için kod ve kategorilerin belirlenmesi ile birlikte değerlendirme formunun son hali oluşturulmuştur. Bununla birlikte çalışmaların her birine kodlar verilmiştir. Çalışmalardan makale olanlar M1, M2, M3, ...; tez olanlar ise T1, T2, T3, ... şeklinde kodlanmıştır. İspat Çalışmaları Değerlendirme Formu’nun son hali Tablo 2’de yer almaktadır.

Her bir çalışma, değerlendirme formunun son hali kullanılarak tekrar analiz edilmiştir. Son olarak formun her bir kısmına yönelik kategori ve kodların frekansları ile birlikte yüzdeleri hesaplanmıştır.

Tablo 2. İspat Çalışmaları Değerlendirme Formu

Araştırmanın Kodu:

Araştırmanın Adı:

Araştırmanın Künyesi:

Araştırmanın Yapıldığı Yıl: 2005-2009 2010-2014 2015-2020

Araştırmanın Amacı:

İspat yapmaya yönelik zorlukları belirleme İspat ile ilgili bakış açılarını inceleme

İspat şemalarını inceleme Argümantasyon ile ispat sürecini inceleme

İspat sürecini inceleme Öğretim yaklaşımlarının ispat sürecine etkisini belirleme

İspata yönelik ölçme aracı geliştirme Ders kitaplarını ispat açısından inceleme

Araştırmanın Örneklemi:

Ortaokul öğrencileri Ortaöğretim öğrencileri Öğretmen adayları

Farklı lisans programları Öğretmen Öğretim elemanı Ders kitapları

Doküman

Araştırmanın Yaklaşımı:

Nitel:

Eylem araştırması Durum çalışması Kuram oluşturma Fenomenoloji

Doküman analizi Öğretim deneyi Gelişimsel çalışma

Nicel:

İlişkisel çalışma Tarama çalışması Yarı deneysel çalışma

Betimsel çalışma

Karma:

Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçları:

Mülakat* Açık uçlu sınav/Test Anket/Ölçek Gözlem

Ders kitapları Doküman Etkinlikler

*Mülakat türünü açıkça not ediniz.

Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Araştırmanın geçerliliği ve güvenirliliğini sağlamak amacıyla belirli adımlar izlenmiştir. Öncelikle analize dâhil edilecek çalışmaların seçiminde hangi ölçütlerin dikkate alınacağı ve ne tür anahtar kelimelerin kullanılacağı iki araştırmacının tartışmaları sonucunda belirlenmiştir. Belirlenen anahtar kelimeler ile yapılan tarama sonucunda dâhil etme ölçütlerine uygun olmayan çalışmalar her iki araştırmacının ortak görüşü üzerine çıkarılmıştır. Her bir çalışma tek tek incelenerek İspat Çalışmaları Değerlendirme Formu'nun ilk hali üzerinde ilgili kısımlar doldurulmuştur. İki araştırmacının değerlendirme formunu incelemesi üzerine yaptıkları tartışmalar sonucunda her bir kısım için ortak kod ve kategoriler oluşturulmasının daha uygun olacağına karar verilmiştir. Bu doğrultuda iki araştırmacının tekrar bir araya gelmesi sonucunda ortak kod ve kategorilerin yer aldığı değerlendirme formunun son hali oluşturulmuştur. Ardından bu değerlendirme formu ile analize dâhil edilen çalışmalar tekrar incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda iki araştırmacının kodlamaları arasındaki tutarlılık tespit edilmiştir. Kodlama güvenirliliği, Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı) (Miles ve Huberman, 1994) formülü yardımıyla hesaplanmıştır. Bu doğrultuda iki araştırmacının kodlamaları arasındaki uyum %92,35 olarak bulunmuştur.

Bulgular

Bu bölümde verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular, belirtilen alt problemler bağlamında sunulmuştur. Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların yıllara göre dağılımı Tablo 3'te yer almaktadır.

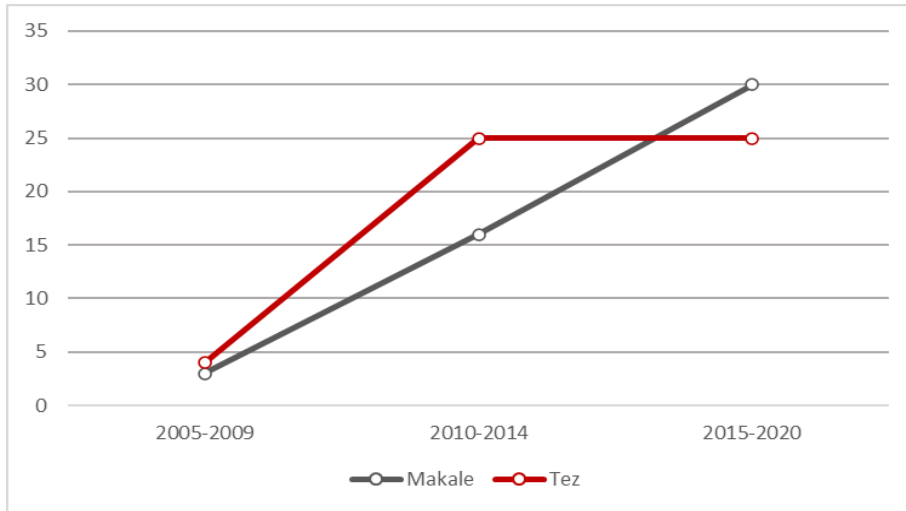
Tablo 3. *Ulusal Literatürde Yer Alan İspat ile İlgili Çalışmaların Yıllara Göre Dağılımı*

YIL	MAKALELER	f	%	TEZLER	f	%
2005-2009	M4, M16, M44	3	%6,12	T8, T11, T22, T42	4	%7,4
2010-2014	M1, M3, M5, M6, M8, M13, M15, M20, M27, M29, M31, M32, M34, M37, M40, M43	16	%32,65	T1, T2, T3, T4, T12, T13, T15, T16, T17, T18, T21, T23, T24, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T38, T40, T41, T48, T50, T52	25	%46,29

	M2, M7, M9, M10,					
	M11, M12, M14,					
	M17, M18, M19,			T5, T6, T7, T9, T10,		
	M21, M22, M23,			T14, T19, T20, T31,		
2015-2020	M24, M25, M26,	30	%61,23	T32, T33, T34, T35,	25	%46,29
	M28, M30, M33,			T36, T37, T39, T43,		
	M35, M36, M38,			T44, T46, T47, T49,		
	M39, M41, M42,			T51, T53, T54, T55		
	M45, M46, M47,					
	M48, M49					

Not: T45 kodlu çalışma 2003 yılında yayımlanmıştır. Oluşturulan kategorinin dışında bulunduğu için ayrıca belirtilmesi uygun görülmüştür.

Ulusal literatürde yer alan ispat çalışmalarının yıllara göre genel durumu Grafik 1’de sunulmuştur. Böylece belirlenen yıl aralıklarında ispat konusu kapsamında makale ve tezlerin sayısı karşılaştırmalı olarak görülebilmektedir.



Grafik 1. İspat ile ilgili makale ve tezlerin yıllara göre dağılımı

Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların amaçlara göre dağılımı Tablo 4’te yer almaktadır.

Tablo 4. Ulusal Literatürde Yer Alan İspat ile İlgili Çalışmaların Amaçlara Göre Dağılımı

AMAÇ	MAKALELER	f	%	TEZLER	f	%
İspat yapmaya yönelik zorlukları belirleme	M4, M21, M28	3	%5,55	T5, T13, T23, T49	4	%5,12
İspat ile ilgili bakış açılarını inceleme	M5, M6, M8, M16, M20, M27, M29, M30, M31, M32, M34, M37, M40, M44, M46, M48	16	%29,63	T2, T6, T9, T12, T17, T18, T19, T20, T21, T23, T24, T26, T27, T28, T30, T31, T33, T38, T40, T48	20	%25,64
İspat şemalarını inceleme	M17, M25, M41, M42	4	%7,41	T11, T27, T36, T45, T48	5	%6,41
Argümantasyon ile ispat sürecini inceleme	M19, M35, M39	3	%5,55	T10, T14, T19, T50	4	%5,12
İspat sürecini inceleme	M2, M3, M6, M7, M9, M10, M12, M14, M18, M23, M24, M26, M31, M38, M40, M44, M45	17	%31,49	T3, T4, T7, T9, T12, T13, T22, T23, T25, T28, T29, T30, T32, T34, T35, T39, T41, T42, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T53, T54, T55	28	%35,89
Öğretim yaklaşımlarının ispat sürecine etkisini belirleme	M1, M11, M13, M47	4	%7,41	T1, T6, T8, T15, T16, T17, T18, T20, T26, T31, T33, T37, T38, T43, T52	15	%19,23
İspata yönelik ölçme aracı geliştirme	M8, M15, M22, M43	4	%7,41	-	-	-
Ders kitaplarını ispat açısından inceleme	M33, M36, M49	3	%5,55	T4, T21	2	%2,56

Çalışmanın amacının birden fazla olması durumunda veri analizi sürecinde her bir amaç dikkate alınarak Tablo 4 oluşturulmuştur. Örneğin T30 kodlu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanında ispat yapma süreçlerinin incelenmesinin yanı sıra ispata yönelik tutumlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda T30, her iki amaç için ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu durumda toplam çalışma sayısı yerine incelenen özelliğe bağlı olarak toplam veri sayısı belirlenmiştir. Tablo 4'ten görüldüğü gibi makale ve tezlerde çoğunlukla ispat sürecinin ve ispat ile ilgili bakış açılarının incelenmesi amaçlanmıştır. Argümantasyon ile ispat sürecinin incelenmesi ve ders kitaplarının ispat açısından incelenmesi ise amaçlanan durumlar arasında oldukça az bir orana sahiptir. Argümantasyon ile ispat sürecinin incelenmesi amacı altında yer alan T50 kodlu çalışma, argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışmaların bir derlemesidir. Ayrıca ulusal literatürde ispata yönelik ölçme aracı geliştirme amacına sahip 4 makale bulunurken bu amaca yönelik hiçbir tez bulunmamaktadır. Tablo 4'ten görüldüğü üzere öğretim yaklaşımlarının ispat sürecine etkisini belirlemeye yönelik oldukça az sayıda makale yapılmıştır. Tezlerde ise aynı amaca yönelik yapılan çalışmaların oranının daha fazla olduğu dikkat çeken bir durumdur.

Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların yaklaşım/yönteme göre dağılımı Tablo 5'te yer almaktadır.

Tablo 5. Ulusal Literatürde Yer Alan İspat ile İlgili Çalışmaların Yaklaşım/Yönteme Göre Dağılımı

YAKLAŞIM	YÖNTEM	MAKALELER	f	%	TEZLER	f	%
NİTEL	Eylem Araştırması	M1, M11, M45	3	%6,12	T1, T38	2	%3,63
	Durum Çalışması	M2, M3, M6, M7, M9, M10, M17, M18, M21, M23, M25, M26, M28, M35, M38, M39, M40, M41, M44, M47	20	%40,81	T3, T5, T7, T14, T16, T17, T18, T19, T24, T26, T30, T32, T34, T35, T36, T40, T41, T42, T45, T46, T47,	26	%45,27

				T49, T51, T53, T54, T55		
	Kuram Oluşturma	M30	1	%2,05	T25	1 %1,81
	Fenomenoloji	M29, M32	2	%4,08	T8	1 %1,81
	Doküman Analizi	M33, M36, M49	3	%6,12	T50	1 %1,81
	Öğretim Deneyi	-	-	-	T6, T37, T52	3 %5,45
	Gelişimsel Çalışma	-	-	-	T48	1 %1,81
	İlişkisel Yöntem	M5, M15, M20, M24	4	%8,16	T12, T20	2 %3,63
	Tarama Yöntemi	M8, M27, M42, M43, M48	5	%10,2	T2	1 %1,81
NİCEL	Yarı Deneyisel Yöntem	M13	1	%2,05	-	- -
	Betimsel Yöntem	M16, M22, M37	3	%6,12	-	- -
KARMA		M4, M12, M14, M19, M31, M34, M46	7	%14,29	T4, T9, T10, T11, T13, T15, T21, T22, T23, T27, T28, T29, T31, T33, T39, T43, T44	17 %30,9

Tablo 5'ten görüldüğü üzere gerek makale gerekse tez çalışmalarında çoğunlukla nitel yaklaşım tercih edilmiştir. Bununla birlikte nitel yaklaşım kullanılarak yapılan çalışmalarda ise çoğunlukla durum çalışması yönteminin tercih edildiği dikkat çekmektedir. Bu araştırma kapsamında incelenen tezlerin oldukça az bir kısmının nicel yaklaşımla yürütüldüğü dikkat çeken diğer bir durumdur. Karma yaklaşımla yürütülen çalışmaların ise azımsanmayacak bir oranda olduğu görülmektedir.

Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların örnekleme göre dağılımı Tablo 6'da yer almaktadır.

Birden fazla örneklem grubu içeren çalışmaların analizi sırasında her bir örneklem grubu dikkate alınarak Tablo 6 oluşturulmuştur. Örneğin M11 kodlu çalışmanın örneklem grubu, öğretmen ve ortaöğretim öğrencileridir. Bu doğrultuda M11, her iki örneklem grubu için ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu durumda toplam çalışma sayısı yerine incelenen özelliğe bağlı olarak toplam veri sayısı belirlenmiştir. İncelenen makale ve tezlerde ilkökul öğrencileri ile yapılan bir çalışmaya rastlanmadığı için bu düzeye yönelik bir örneklem grubu oluşturulmamıştır. Tablo 6'dan görüldüğü üzere makale ve tezlerde örneklem grubu olarak en fazla öğretmen adayları tercih edilmiştir. İncelenen makalelerde ortaokul öğrencileriyle çok az oranda çalışma yürütülürken tezlerde ise bu düzeydeki öğrenciler ile daha fazla çalışma yürütüldüğü görülmektedir. İspat üzerine yapılan çalışmalarda genel anlamda farklı lisans programları, öğretmen ve öğretim elemanlarının örneklem grubu olarak tercih edilmediği dikkat çekmektedir. Bununla birlikte farklı lisans programları ile yürütülen çalışmaların tümünün (M23, T12, T24 ve T39) matematik bölümü öğrencileri olduğu dikkat çeken bir durumdur. Dolayısıyla öğretmen adayları ve matematik bölümü öğrencileri dışında farklı bir lisans grubuyla hiçbir çalışma yapılmadığı söylenebilir.

Tablo 6. Ulusal Literatürde Yer Alan İspat ile İlgili Çalışmaların Örnekleme Göre Dağılımı

ÖRNEKLEM	MAKALELER	f	%	TEZLER	f	%
Ortaokul Öğrencileri	M1, M2, M45, M47	4	%7,4	T1, T2, T3, T4,	12	%19,67
				T10, T15, T22, T34, T37, T43, T45, T51		
Ortaöğretim Öğrencileri	M3, M11, M13, M38, M39	5	%9,26	T5, T6, T7, T9, T11, T20, T38, T41, T42, T55	10	%16,39

Öğretmen Adayı	M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, M12, M14, M15, M16, M17, M18, M19, M20, M21, M23, M24, M25, M27, M28, M29, M31, M32, M34, M35, M37, M40, M41, M42, M43, M44, M46, M48	34	%62,97	T8, T12, T13, T14, T16, T17, T18, T19, T21, T23, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T31, T32, T33, T35, T36, T39, T40, T44, T46, T47, T48, T49, T52, T53	30	%49,18					
	Farklı Lisans Programları			M23			1	%1,85	T12, T24, T39	3	%4,91
	Öğretmen			M3, M11, M12, M22, M26, M47			6	%11,11	T41, T54	2	%3,27
	Öğretim Elemanı			M30			1	%1,85	T21	1	%1,63
	Ders Kitapları			M33, M36, M49			3	%5,56	T4, T21	2	%3,27
	Doküman			-			-	-	T50	1	%1,63

Not: İncelenen çalışmaların bazıları birden fazla örneklem düzeyi içermektedir.

Ulusal literatürde yer alan ispat ile ilgili çalışmaların veri toplama araçlarına göre dağılımı Tablo 7’de yer almaktadır.

Tablo 7. *Ulusal Literatürde Yer Alan İspat ile İlgili Çalışmaların Veri Toplama Araçlarına Göre Dağılımı*

VERİ TOPLAMA ARAÇLARI	MAKALELER	f	%	TEZLER	f	%
Mülakat	M1, M2, M7, M9, M12, M14, M18, M19, M22, M25, M29, M30, M31, M32, M34, M35, M38, M40, M41, M42, M44, M45, M46	23	%28,05	T1, T5, T6, T7, T8, T9, T14, T16, T17, T18, T19, T21, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T29, T30, T31, T32, T33, T35, T36, T38,	37	%31,35

				T39, T40, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T52, T53		
Açık Uçlu Sınav/Test	M1, M2, M4, M6, M7, M9, M10, M12, M13, M14, M17, M19, M21, M22, M23, M24, M25, M28, M35, M39, M40, M41, M42, M44, M45	25	%30,49	T1, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, T12, T13, T15, T19, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T31, T32, T33, T34, T35, T36, T38, T39, T42, T43, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T52, T53, T54, T55	44	%37,28
Anket/Ölçek	M5, M8, M15, M16, M20, M27, M31, M32, M34, M37, M42, M43, M46, M48	14	%17,07	T2, T12, T18, T20, T21, T23, T27, T28, T29, T33, T48	11	%9,32
Gözlem	M3, M11, M12, M26, M44	5	%6,1	T9, T39, T41, T47	4	%3,38
Ders Kitapları	M33, M36, M49	3	%3,66	T4, T21	2	%1,69
Doküman	M3, M11, M14, M18, M26, M44 M47	7	%8,53	T6, T9, T14, T16, T17, T25, T31, T32, T37, T39, T41, T50, T52	13	%11,01
Etkinlikler	M12, M13, M26, M34, M47	5	%6,1	T14, T15, T16, T17, T18, T20, T37	7	%5,93

Not: İncelenen çalışmaların bazılarında birden fazla veri toplama aracı kullanılmıştır.

Birden fazla veri toplama aracı kullanılan çalışmaların analizi sırasında her bir veri toplama aracı dikkate alınarak Tablo 7 oluşturulmuştur. Örneğin T33 kodlu çalışmada açık uçlu sınav/test ile birlikte yarı yapılandırılmış mülakat ve anket/ölçek kullanılmıştır. Bu doğrultuda T33, her üç veri toplama aracı için ayrı ayrı kodlanmıştır. Bu durumda toplam çalışma sayısı yerine incelenen özelliğe bağlı olarak toplam veri sayısı belirlenmiştir. Tablo 7 incelendiğinde hem makale hem de tezlerde çoğunlukla açık uçlu sınav/test ve mülakatların kullanıldığı dikkat çekmektedir. Bununla birlikte açık uçlu sınav/testlerin kullanıldığı çalışmaların bir kısmının mülakatlarla desteklendiği görülmektedir. Veri toplama aracı olarak mülakatların kullanıldığı makalelerin 17'si (M2, M9, M12, M14, M19, M22, M29, M30, M31, M32, M34, M35, M38, M42, M44, M45, M46) yarı yapılandırılmış mülakat, 5'i (M1, M7, M25, M40, M41) klinik mülakat, 1'i (M18) de odak grup görüşmesi ile yürütülmüştür. Tezlerde ise yarı yapılandırılmış mülakat 29 (T1, T5, T6, T7, T8, T9, T17, T18, T21, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T29, T30, T32, T33, T38, T39, T40, T44, T46, T47, T49, T51, T52, T53), klinik mülakat 7 (T16, T19, T31, T35, T36, T45, T48), odak grup görüşmesi 2 (T14, T37) çalışmada kullanılmıştır. Dolayısıyla makale ve tezlerde mülakat türlerinden çoğunlukla yarı yapılandırılmış mülakatın tercih edildiği dikkat çekmektedir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu araştırmada ülkemizdeki ispat çalışmalarının genel eğiliminin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda ulusal literatürde yer alan ispat çalışmaları; araştırmanın yılı, amacı, yaklaşım/yöntemi, örnekleme, veri toplama aracı olmak üzere beş boyut açısından incelenmiştir. Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlar belirtilen boyutlar bağlamında tartışılmıştır. Araştırmanın sonucunda ispat ile ilgili yapılan çalışmaların sayısında son yıllara doğru bir artışın olduğu görülmüştür. Buradan hareketle ülkemizde ispat ile ilgili araştırmaların eğiliminin günümüze doğru bir ivme kazandığı söylenebilir. Matematiğin temel yapı taşlarından biri olan ispatın ortaya çıkışı çok eskiye dayanmasına rağmen matematik eğitiminde yerini alması yeni denecek kadar yakın bir tarihte gerçekleşmiştir. Matematiksel bilginin inşa edilmesi ve geliştirilmesinde ispatın önemli bir yere sahip olmasının anlaşılmasıyla birlikte yapılan çalışmalarda da ispatın okul matematiğinin merkezinde yer alması gerektiğine yönelik vurgulamalar artmıştır (Knuth, 2002; Stylianou, Blanton ve Knuth, 2010; Stylianides, 2007). Bu vurgulamalar, ülkemizdeki araştırmacıların bir kısmının odağını ispat konusuna yöneltmiş olabilir. Dolayısıyla ülkemizde ispat çalışmalarının sayısının son yıllarda artması bu durum ile açıklanabilir. Benzer şekilde uluslararası literatürde ispat üzerine yapılan çalışmaların sayısının son

yıllarda bir artış gösterdiği belirtilmektedir (Fan ve Jones, 2018; Karakuş, Erşen ve Ocak, 2017; Stylianides, Bieda ve Morselli, 2016). Bu bağlamda ulusal ve uluslararası literatürde son yıllara doğru ispat çalışmalarının yapılma eğiliminin daha fazla olması yönünden bir benzerlik olduğu söylenebilir. Ancak uluslararası literatür, ispat çalışmaları bakımından çok eski bir geçmişe sahiptir. Ulusal literatürde ispat ile ilgili ilk çalışmaların ise 2000'li yılların başına dayandığı fark edilmektedir. Bu bakımdan ispat çalışmaları kapsamında uluslararası literatürün 1900'lü yıllara dayanması ve günümüze kadar yayın yapma kapasitesinin devamlılığına bağlı olarak ulusal literatüre göre dağılımının genel anlamda istikrarlı bir ilerleyişe sahip olduğundan söz edilebilir.

Ulusal literatür incelendiğinde matematik eğitimi alanında ispat sürecini incelemeyi ve ispata yönelik bakış açısını belirlemeyi amaçlayan çalışmaların çoğunlukta olduğu görülmüştür. Matematik eğitiminin merkezinde yer alan ispat; doğası gereği keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme, mantıksal çıkarımda bulunma gibi zihinsel etkinlikleri içeren bir süreçtir (Ball vd., 2002; Greenberg 1993; Hoyles ve Healy, 2007; Öztürk, 2016). Dolayısıyla ispat sürecinin kapsamlı bir yapıya sahip olması, içinde barındırdığı her bir eyleme yönelik farklı araştırmaların yapılmasını ya da bu boyutlar dahilinde ispat sürecinin incelenmesini gerektirebilir. Bu çalışma kapsamında; ispat yapma düzeylerinin incelenmesi, bölünebilme/fonksiyon ve sayılar konusu bağlamında ispat yapma becerilerinin incelenmesi, ispat yapma etkinliği esnasındaki iletişim durumlarının incelenmesi, ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi, ispatlama becerisinin gelişiminin incelenmesi, muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi, ispat yöntemlerini kullanabilme becerilerinin incelenmesi, ispat değerlendirme süreçlerinin incelenmesi gibi pek çok amaç ispat sürecinin incelenmesi teması altında kodlanmıştır. Bu durum, ispat sürecini incelemeyi amaçlayan çalışmaların sayısının fazla olmasını açıklar niteliktedir. Öztürk ve diğerlerinin (2015) meta-sentez çalışmasında 2012-2015 yılları arasında yayımlanan ve nitel yöntemi benimseyen ispata yönelik 6 ulusal, 9 uluslararası tez incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda belirtilen yıllar arasında yapılan çalışmaların çoğunlukla ispata yönelik görüş belirleme ve ispat yazma süreçlerini incelemeye yönelik olduğunu tespit etmeleri yıl aralığı değişse de bu eğilimin devam ettiğini göstermektedir. İspata yönelik yurt dışında yapılan çalışmalar incelendiğinde de öğrencilerin, öğretmen adaylarının, öğretmenlerin ya da öğretim elemanlarının ispata yönelik bakış açılarını belirleme ve ispat yapma süreçlerini inceleme amacına sahip çalışmaların çoğunlukta olduğu dikkat çekmektedir (Alcock ve Weber, 2005; Alcock, 2010; Almeida, 2000, 2003; Bleiler,

Thompson, ve Krajcevski, 2014; Fukawa-Connelly, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Hemmi, 2010; Jones, 2000; Knuth, 2002; Lai ve Weber, 2014; Lesseig, 2016; Martin ve Harel, 1989; Raman, 2003; Solomon, 2006; Stylianides ve Stylianides, 2009; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Stylianou, Blanton ve Rotou, 2015; Varghese, 2009; Weber, 2012; Yopp, 2011; Zazkis, Weber ve Mejia-Ramos, 2016). Bu doğrultuda ulusal ve uluslararası literatürdeki ispat çalışmalarının amaçları dikkate alındığında genel anlamda ispata ilişkin bakış açılarının (inanç, tutum, görüş vb.) belirlenmesi ve ispat süreçlerinin incelenmesi amaçlı araştırmaların çoğunlukta olması bakımından eş değer bir durumun varlığından söz edilebilir.

Gerek ulusal gerekse uluslararası literatür incelendiğinde ispata yönelik bakış açılarını belirleme amacına sahip çalışmaların büyük çoğunluğunda öğretim kademeleri ayırt edilmeksizin öğrencilerin ispata yönelik olumsuz bir tutuma sahip oldukları, ispat yapmayı başaramayacaklarına inandıkları, ispat yapmaktan korktukları belirtilmektedir (ör., Almeida, 2003; de Villiers, 1990; Doruk, Kıymaz, Horzum ve Morkoyunlu, 2014; Doruk, Özdemir ve Kaplan, 2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Jones, 2000; Raman, 2003). Benzer şekilde ispat sürecini inceleme amacına sahip çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin herhangi bir matematiksel ilişkinin ispatını yapamadıkları ya da verilen bir ispatı anlayamadıkları ileri sürülmektedir (ör., Anapa ve Şamkar, 2010; Doruk ve Kaplan, 2017; Güler ve Ekmekçi, 2016; Ko ve Knuth, 2009; Moore, 1994; Stylianides vd., 2007; Şahin, 2016). Çalışmalarda süregelen bu durum, ispat ile ilgili düşüncelerde ve bu süreç içinde yaşanan zorluklarda değişim olup olmadığını belirleme amaçlı olarak araştırmacıları daha çok ispat süreci ve ispata yönelik bakış açısını inceleme eğilimi göstermelerine sebep olabilir. İspat konusu kapsamında öğretimin nasıl şekillenebileceği ile ilgili fikirler edinme bakımından bu tür araştırmaların yapılması önemlidir. Bu durumlar dikkate alındığında öğrencilerin ispat sürecinde ne tür zorluklar yaşadıkları ve bu zorlukları ortadan kaldırabilmek için ne gibi önlemler alınabileceği ile birlikte öğrencilere ispat yapmanın önemini kavratılabilmek için öğretim sürecini nasıl tasarlamak gerektiği gibi konuların aydınlatılması gerekmektedir. Başka bir ifadeyle ulusal literatür kapsamında ispat ile ilgili çalışmalarda bu yöndeki araştırmalara yer verilmesinin ayrı bir öneme sahip olduğu söylenebilir.

Ulusal literatürde yer alan ispat çalışmaları kapsamında ispata yönelik ölçme aracı geliştirme ve ders kitaplarının ispat açısından incelenmesi amaçlarına yönelik araştırmaların oldukça az bir oranda olduğu dikkat çekmektedir. İspat sürecinin keşfetme, varsayımda bulunma, ilişkilendirme, genelleme vb. zihinsel eylemleri içeren bir yapıya sahip olması her

bir eyleme yönelik farklı boyutlara yönelik incelemeleri gerektirmesi bu amaca sahip çalışmaların az sayıda olmasına sebep olmuş olabilir. Daha açık bir ifadeyle ispat sürecinin çok boyutlu bir yapıya sahip olmasına bağlı olarak tek bir ölçekle belirlenmesinin mümkün olmaması bu duruma yol açmış olabilir. Bu doğrultuda ispata yönelik ölçme aracı geliştirme amaçlı çalışmaların azınlıkta olması beklenen durumlardan biridir. Bununla birlikte belirtilen amaca yakın bir oranda olmasına rağmen ulusal literatürde ders kitaplarının ispat açısından incelenmesinin daha az bir oranda olduğu fark edilmektedir. Tüm öğretim kademelerinde ve yürürlükte olan öğretim programlarında ispat kavramına gerekli önemin verilmediği dikkat çekmektedir (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Çalışkan, 2012; Yıldız, 2019). Bu durum, ispat ile ilgili çalışmalarda bu amacın pek fazla ele alınmamasını açıklar niteliktedir.

İspat çalışmaları araştırmanın yaklaşımına göre değerlendirildiğinde incelenen araştırmaların çoğunlukla nitel yaklaşımla yürütüldüğü fark edilmiştir. Bununla birlikte karma yaklaşımın kullanıldığı çalışma sayısının ise araştırma yaklaşımının sadece nicel olduğu çalışma sayısından fazla olduğu dikkat çeken bir durumdur. Sosyal olaylara yönelik durumlarda nitel yaklaşım nicel yaklaşıma göre daha derinlemesine bilgi sağlamaktadır. Ancak bu durum nitel yaklaşımın nicel yaklaşımdan daha üstün olduğu anlamına gelmemektedir. Her yaklaşımın kendi içinde güçlü ve zayıf yönleri bulunmaktadır. Burada asıl nokta, araştırmacının hangi problem durumlarında ne tür bir yaklaşımı tercih etmesinin uygun olacağını tespit edebilmesidir (Frankel ve Devers, 2000; Yıldırım ve Şimşek, 2005). Eğitim çalışmalarının doğası dikkate alındığında da sadece nicel yaklaşıma dayalı yöntemlerle toplanan verilerin çok sağlıklı sonuçlar vermeyeceği, eldeki verilerin daha derinlemesine yorumlanabilmesi için nitel yaklaşıma dayalı yöntemlerle desteklenmesi gerekmektedir (Creswell ve Plano Clark, 2007). Bu bakımdan ispata yönelik çalışmalarda nitel ve karma yaklaşımın nicel yaklaşıma göre daha çok tercih edilmesi beklenen bir durumdur. Bununla birlikte ispat yapma birçok zihinsel eylemi içinde barındıran bir süreç (Öztürk, 2016) olarak herhangi bir grup üzerinde bu sürece ilişkin yapılan çalışmalarda bireylerin yaptıklarının tam anlamıyla anlaşılması nitel yaklaşımı gerektiği ifade edilebilir. Bu bakımdan matematik eğitimindeki konulardan biri olarak ispatın nitel yaklaşımın doğasına uygun bir çalışma alanı olduğu söylenebilir.

Çalışmada ulusal literatürde ispata yönelik yapılan araştırmaların çoğunlukla öğretmen adaylarıyla yürütüldüğü sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte ispat çalışmalarının öğretmen adaylarına yakın bir oranda ortaöğretim öğrencileri ile

gerçekleştirildiği fark edilmektedir. Ancak öğretim düzeyi aşağıya doğru indikçe daha küçük yaştaki öğrencilerle yapılan ispat çalışmalarının da bu oranda aşağıya düştüğü görülmüştür. Bu doğrultuda ulusal literatürde ortaokul öğrencileri ile yürütülen ispat çalışmalarının sayısı yok denecek kadar azdır. Ulusal literatürde ilkokul seviyesindeki öğrencilerle yapılan ispat çalışmalarına rastlanmazken uluslararası literatürde bu seviyedeki öğrencilerle yapılan ispat çalışmalarının varlığı dikkat çekmektedir (ör., Flegas ve Charalampos, 2013; Komatsu, 2010; Maher ve Martino, 1996; Stylianides, 2007). Buna karşın yapılan pek çok çalışmada, ispat yapmanın her sınıf seviyesinde okul matematiğinin merkezinde olması gerektiği vurgulanan durumlar arasındadır (Ball ve Bass, 2003; Ball vd., 2002; Hanna, 2000; Yackel ve Hanna, 2003). Bu duruma paralel bir şekilde ispata yönelik ulusal literatürde ortaöğretim öncesindeki öğrencilerle gerçekleştiren çalışmasının çok az olması eleştirilen bir durumdur (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016). Bu durumun sebebi olarak ülkemizde farklı öğretim kademelerinde ispata aynı derecede önem verilmemesi gösterilebilir. İspata lise ve üstü öğretim kademelerinde, hatta yalnızca ileri matematik kapsamında yer verilmesi gerektiğine yönelik geleneksel bir anlayışın hâkim olması (Cooper vd., 2011; Fawcett, 1995; Knuth, 2002) bu durumu destekler niteliktedir. NCTM'in (2000) ispat öğretimine okul öncesi dönemden başlanarak her bir matematik konusuna yönelik yer verilmesi gerektiğine ilişkin vurgusu bu anlayışın kısmen zedelenmesine yol açmıştır. Bunun aksine ülkemizdeki ilkokul ve ortaokul öğretim programları incelendiğinde ispat yapmanın hâlen ayrı bir beceri olarak ele alınmadığı görülmektedir. Bununla birlikte ortaöğretim düzeyine yönelik öğretim programında da yalnızca birkaç kazanımda ele alınan ispat ile ilgili kavramlar ve ispat yöntemleri bağlamında ispat yapmaya sınırlı bir şekilde yer verilmektedir. Bu bakımdan tam anlamıyla ispat kavramına lisans düzeyinde belirli programlar dahilinde yer verildiği söylenebilir. Bu bakımdan ulusal literatürde yer alan ispat çalışmalarının çoğunlukla öğretmen adaylarıyla yürütülmesinin bu durumun doğal bir sonucu olarak ortaya çıktığı belirtilebilir. Bu doğrultuda ulusal literatürde ispat ile ilgili çalışmaların gerek ilkokul ve ortaokul gerekse ortaöğretim düzeyinde yürütülmesine yönelik bir ihtiyacın olduğu açıkça görülmektedir.

Çalışma doğrultusunda ulusal literatürde yer alan ispat çalışmalarında veri toplama aracı olarak çoğunlukla açık uçlu sınav/test ve mülakatların kullanıldığı sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte açık uçlu sınav/test kullanılan çalışmaların bir kısmında mülakatlardan da yararlandığı dikkat çekmektedir. Eğitim çalışmalarındaki verilerin hangi kaynaklardan elde edildiği güvenilir sonuçlara ulaşma bakımından oldukça önemlidir.

Ayrıca araştırılan bir durumu daha detaylı bir şekilde ortaya koyabilmek için kullanılan veri toplama araçlarının çeşitlendirilmesi de önemli etkenler arasındadır. Bu doğrultuda tek bir veri toplama aracı kullanılarak elde edilen veriler, araştırılan bir durumu tam anlamıyla yorumlamada bir engel oluşturabilir. Bu bakımdan ulusal literatürdeki ispat çalışmalarında birden fazla veri toplama aracı ile çalışılması gerek araştırmanın detaylarına inmek gerekse ispat gibi kapsamlı bir süreci yansıtmak bakımından oldukça önemlidir.

Bu çalışma ile ulusal literatürde yer alan ispat çalışmalarının genel durumu bütüncül olarak yansıtılmıştır. Böylece incelenen boyutlar bağlamında ispata yönelik ulusal literatürün eksik yönleri ve ağırlıklı olarak ne yönde bir eğiliminin olduğunu görme fırsatı sağlanmıştır. Bir ülkede herhangi bir alanda yapılan çalışmalar, ülkenin o alanda gerçekleşen eğitim reformlarını da şekillendirmektedir. Ancak ulusal literatürde ispata yönelik yapılan çalışmaların uluslararası literatürle kıyaslandığında niceliksel olarak oldukça geride olduğu belirtilmektedir (Özer ve Arıkan, 2002). Ayrıca ulusal literatürde yapılan çalışmaların özellikle amaç ve ele aldığı örneklem bağlamında benzer yönde eğilim gösterdiği görülmüştür. Bu durum farklı öğretim kademelerinde araştırılmayı bekleyen birçok durum olduğu anlamına gelmektedir. Bu bağlamda ulusal literatürde yürütülen ispat çalışmalarının bu görevi yeterince yerine getirme noktasında eksik kaldığı söylenebilir. Bu bakımdan ispata yönelik ileride yapılacak olan çalışmalarda özellikle literatürde vurgulanan boşlukların dikkate alınması oldukça önemlidir.

Çalışma kapsamında sadece ulusal literatürde yayınlanmış makale ve tezlere yer verildiğinden, yurt dışında yayınlanmış olan makale ve tezlerin ele alınmaması çalışmanın en önemli sınırlılıkları arasında görülebilir. Bu bağlamda ileride yapılabilecek bir çalışma olarak matematik eğitimi alanında yapılan yurt dışındaki ispat çalışmalarının incelenmesi, yürütülmesi planlanan sonraki çalışmalara yön verebilme bakımından önemli görülmektedir.

Etik Kurul İzin Bilgisi: *Bu araştırma, bir sistematik derleme çalışması olması nedeniyle Etik Kurul Onayı alınmasını gerektiren bir çalışma niteliği taşımamaktadır.*

Çıkar Çatışması: *Yazarların beyan edeceği bir çıkar çatışması yoktur.*

Yazar Katkısı: *Her iki yazar, araştırmanın bütün aşamalarına eşit oranda katkı sunmuştur.*

Kaynakça

Adıgüzel, A. (2011). Bilgi okuryazarlığı ölçeğinin geliştirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 15-28.

- Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hitt, D. Holton & P. W. Thompson, (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 63-91). Washington: American Mathematical Society.
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Anapa, P., & Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 2700–2706.
- Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi, *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579.
- Aylar, M. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 47(1), 351-376.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In G. Martin (Ed.), *Research companion for the principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Education Studies in Mathematics*, 7, 23–40.
- Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajcevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 105-127.
- Cevher, A. Y. ve Yıldırım, S. (2020). Öğrenme stilleri konusunda yapılmış akademik çalışmaların incelenmesi: Sistemik derleme. *HAYEF: Journal of Education (Online)*, 17(1), 20-50.
- Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B., & Knuth, E. J. (2011, July). *Adolescent reasoning in mathematics: exploring*

- middle school students' strategic approaches in empirical justifications*. Paper presented at the the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society. Boston, MA.
- Creswell, W. J., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. London: SAGE.
- Çalık, M. ve Sözbilir, M. (2014). İçerik analizinin parametreleri. *Eğitim ve Bilim*, 39(174), 33-38.
- Çalışkan, Ç. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 47-71.
- Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 601-618.
- Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat – temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri, *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 44, 467-498.
- Doruk, M., Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.
- Fan, L., & Jones, K. (2018). About the teaching and learning of proof and proving: cognitive issues, curricular issues and beyond. In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.). *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 215-222). Germany: Springer.

- Fawcett, H. P. (1995). *The nature of proof. thirteenth yearbook of the national council of teachers of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Flegas, K., & Charalampos, L. (2013). Exploring logical reasoning and mathematical proof in grade 6 elementary school students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(1), 70-89.
- Frankel, R. M., & Devers, K. J. (2000). Study design in qualitative research. *Education for health: Change in learning and practice*, 13(2), 251-261.
- Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 325-345.
- Gough, D., Oliver, S. ve Thomas, J. (2012). Introducing systematic reviews. In D. Gough, S. Oliver & J. Thomas (Eds.). *An introduction to systematic reviews* (pp. 1-15). London: SAGE.
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.
- Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 446-462.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 55-61). USA: Kluwer Academic.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345-353.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate*

- Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 271-291.
- Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense.
- Ilgaz, H. (2018). Bireysel farklılıklar kapsamında çevrimiçi öğrenme araştırmalarına ilişkin sistematik bir derleme. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 11(4), 1003-1018.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(Özel Sayı 2), 247-265.
- Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 29, 1-10.
- Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 93-108.
- Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(3), 1-31.
- Lin Q., Yin Y., Tang X., Hadad R., & Zhai, X. (2020). Assessing learning in technology rich maker activities: A systematic review of empirical research. *Computers & Education*, 157, 103944.

- Lo, C. K. (2020). Systematic reviews on flipped learning in various education contexts. In O. Zawacki-Richter, M. Kerres, S. Bedenlier, M. Bond & K. Buntins (Eds.). *Systematic reviews in educational research* (pp. 129-143). Germany: Springer.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-Year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194-214.
- Magalhães, P., Ferreira, D., Cunha, J., & Rosário, P. (2020). Online vs traditional homework: A systematic review on the benefits to students' performance. *Computers & Education*, 152, 103869.
- Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 341-344.
- Martin, F., Sun, T., & Westine, C. D. (2020). A systematic review of research on online teaching and learning from 2009 to 2018. *Computers & Education*, 159, 104009.
- Martin, G. W., & Harel G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Oakley, A. (2012). Foreword. In D. Gough, S. Oliver & J. Thomas (Eds.). *An introduction to systematic reviews* (pp. vii-x). London: SAGE.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri. Ankara.
- Öztürk, M., Akkan, Y., Kaleli-Yılmaz, G. ve Kaplan, A. (2015, Mayıs). *Ortaokul öğrencileri ve öğretmenleriyle yapılan matematiksel ispat araştırmaları: Nitel meta-sentez çalışması*. 2. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildiri. Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Adıyaman.

- Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Petticrew, M., & Roberts, H. (2006). *Systematic reviews in the social sciences*. USA: Blackwell.
- Polanin, J. R., Maynard, B. R., & Dell, N. A. (2017). Overviews in education research: A systematic review and analysis. *Review of Educational Research*, 87(1), 172–203.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319–325.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H. Schoenfeld, (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-69) Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 373–393.
- Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253.
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Gutiérrez, A., Leder, G. & Boero, P. (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315–351). Rotterdam: Sense.
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307-332.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103–133.

- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (Eds.). (2010). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134.
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.
- Torgerson, C. (2003). *Systematic reviews*. London: Continuum.
- Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, 31-35.
- Turğut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-14.
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 43(4), 463-482.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards to school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mersin Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.

Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 115-130.

Zawacki-Richter, O. (2020). Introduction. In O. Zawacki-Richter, M. Kerres, S. Bedenlier, M. Bond & K. Buntins (Eds.). *Systematic reviews in educational research* (pp. v-xiii). Germany: Springer.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 155-173.

Ek 1. Çalışma Kapsamında İncelenen Makale ve Tezler

M1: Aylar, E. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 47(1), 351-376.

M2: Zeybek-Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 13(1), 196-216.

M3: Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 134-154.

M4: Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3.sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506.

M5: Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education*, 1(2), 134-141.

M6: Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies*, 8(12), 766-776

M7: Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 44, 467-498.

M8: Doruk, M. ve Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 71-93.

M9: Güner, P. ve Topan, B. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üçgenlerin öğretiminde geometrik ispatları kullanabilme becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 10(2), 210-242.

M10: Demircioğlu, H. (2019). Matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin incelenmesi: Bir durum çalışması. *Eğitim Bilimleri Araştırmaları Dergisi*, 9(1), 22-39.

M11: İnam, B. ve Uğurel, I. (2016). İspat kavrama testine dayalı bir öğretim uygulamasında karşılaşılan güçlükler ve sürece müdahale yolları. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(1), 1-21.

M12: Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64.

M13: Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 7(1), 222-241.

M14: Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.

M15: Keçeli-Bozdağ, S., Uğurel, I. ve Bukova-Güzel, E. (2014). Matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispatlamaya yönelik tutumlarının belirlenmesi: Bir ölçek geliştirme çalışması. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(4), 1585-1600.

M16: Moralı, S., Uğurel, I, Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.

M17: Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 12(2), 136-166.

M18: Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 446-462.

M19: Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.

M20: Doruk, M., Özdemir, F., ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.

M21: Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(3), 449-475.

M22: Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2017). Matematik öğretmenlerine yönelik ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 360-381.

M23: Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(Özel Sayı 2), 247-265.

M24: Polat, K., Oflaz, G. ve Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisinin, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, 3(2), 105-122.

M25: Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 59-100.

M26: Doğan, M. F. (2019). Ortaokul öğretmenlerinin ispatla ilişkili etkinliklere katılımlarının doğasının incelenmesi. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 48(1), 100-130.

M27: Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.

- M28:** Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 81-99.
- M29:** Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571 – 590.
- M30:** Aksoy, E. ve Narlı, S. (2019). Öğretim elemanlarının matematiksel ispatın önemine yönelik görüşlerinin incelenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 47, 134-156.
- M31:** Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219–236.
- M32:** Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.
- M33:** Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 601-618.
- M34:** Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat-temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55.
- M35:** Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 8(2), 429-452.
- M36:** Toprak, Z. ve Özmantar, M. F. (2019). Türkiye ve Singapur 5. sınıf matematik ders kitaplarının çözümlü örnekler ve sorular açısından karşılaştırmalı analizi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(2), 539-566.
- M37:** Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- M38:** Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2017). Üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlara yönelik bilgi ve farkındalıklarının incelenmesi. *Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi*, 4(2), 19-35.
- M39:** Urhan, S. ve Bülbül, A. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 10(1), 351-373.
- M40:** Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 137-157.
- M41:** Eldekci, S. (2018). Matematik eğitimi öğretmen adaylarının kanıt şemalarının ortaya çıkarılması. *Eğitim Bilimleri Dergisi*, 9(2), 119-136.
- M42:** Pektaş, O. ve Bilgici, G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusunda kullandıkları kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27(3), 1348-1358.

M43: İskenderoğlu-Aydoğdu, T., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenilirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.

M44: Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.

M45: Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579.

M46: Cihan, F. ve Akkoç, H. (2020). Öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin geliştirilmesi: Bir tasarım çalışması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 11(1), 280-311.

M47: Özdemir-Erdoğan, E., Erdoğan, A., Dur, Z. ve Akkurt-Denizli, S. (2020). Dinamik geometri yazılımı ile keşif, varsayım ve ispat: Bir durum çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 14(1), 661-690.

M48: Altıntaş, E. ve İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Education Journal*, 28(3), 1573-1582.

M49: Zeybek, Z., Üstün, A. ve Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *Elementary Education Online*, 17(3), 1317-1335.

T1: Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T2: Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T3: Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri* (Yayımlanmamış doktora tezi). Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

T4: Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

T5: Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mersin Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.

T6: Gelişen, A. (2017). *9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

T7: Göl, R. (2017). *12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.

T8: Yıldız, G. (2006). *Lisans seviyesinde genel matematik dersindeki teorem ve ispatları anlamaya yönelik kavrama testinin hazırlanması uygulanması ve öğrenci görüşlerinin*

değerlendirmesi (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T9: Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T10: Pesen, M. (2018). *An examination of the proof and argumentation skills of eighth-grade students* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, Institute of Social Sciences, İstanbul.

T11: Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, The Graduate School of Natural and Applied Science, Ankara.

T12: İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof* (Unpublished doctoral dissertation). Boğaziçi University, The Graduate School of Natural and Applied Science, İstanbul.

T13: Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, The Graduate School of Social Sciences, Ankara.

T14: Demiray, E. (2019). *An investigation of prospective middle school mathematics teachers' argumentation, proof, and geometric construction processes in the context of cognitive unity* (Unpublished doctoral dissertation). Middle East Technical University, The Graduate School of Social Sciences, Ankara.

T15: Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Erzincan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

T16: Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T17: İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

T18: Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

T19: Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T20: Haseki, D. (2018). *Improving attitudes towards geometric proof in the context of dynamic geometry software-based proof instruction* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, Institute of Social Sciences, İstanbul.

T21: Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

T22: Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

T23: Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

T24: Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T25: Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T26: Karahan, Ö. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının çift sütun ispat yöntemine yönelik görüşleri ve bu yönteme dayalı ispatlama süreçlerinin analizi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T27: Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

T28: Keçeli-Bozdağ, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T29: Birinci, K. S. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

T30: Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T31: Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

T32: Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T33: Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T34: Kunt, A. (2017). *Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelimlerinin yapay sinir ağı modeli kullanılarak incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T35: Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

T36: Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

T37: Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

T38: İnam, B. (2014). *Ortaöğretim düzeyinde, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretim uygulamasının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T39: Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

T40: Miral, D. (2013). *Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

T41: Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T42: Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

T43: Küçükbulut, C. (2019). *Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimine 5E modelinin etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

T44: Belin, M. (2016). *Prospective mathematics teachers' quantitative reasoning on the development of decimal representation of real numbers and its effect on their comprehension of a related proof* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, The Graduate School of Natural and Applied Science, İstanbul.

T45: Aydoğdu-İskenderoğlu, T (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

T46: Kaya, E. P. (2018). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt şemalarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T47: Pala, O. (2016). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T48: İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

T49: Urhan, S. (2018). *Kanıt yapma sürecinin Habermas akılcı davranış modeli ile analizi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T50: Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T51: Ateş Alpay, Ü. (2018). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T52: Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T53: Coşkun, M. (2020). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterliklerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

T54: Arslantaş-İlter, E. (2020). *Matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerinin Pisagor teoremi bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

T55: Üstüngün, Ş. (2020). *12. sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.



The Analysis of the Studies on Proof in Turkey: A Systematic Review

Tuğba ÖZTÜRK*, Damla DEMİREL**

• **Received:** 19.08.2020 • **Accepted:** 04.06.2021 • **Online First:** 07.06.2021

Abstract

Proof plays a key role in accomplishing requirements such as solving the problems we face in our lives and establishing correlations between the events by concurrent employment of high-level skills. The comprehension of the mathematical facts and their reasons during instruction, organization of the mathematical knowledge, and ensuring its permanence indicates that proof is at the core of mathematics education. Due to this significance, reviewing previous studies on proof with a holistic approach to provide direction for mathematics education makes sense. The present study aims to analyze the studies conducted on proof in Turkey with the systematic literature review method and discover the trends in mathematics education. In the study, 49 articles and 55 theses, a total of 104 studies that were selected with purposive sampling method were analyzed. The sample studies were accessed on YÖK National Thesis Center, TÜBİTAK ULAKBİM DergiPark, and Google Academic search engine. The studies were reviewed based on five dimensions: the year of publication, aim, approach/methodology, sample, and data collection tools. The study data were interpreted with frequencies and percentages, and the findings are presented in tables and graphs. The study findings demonstrated a significant increase in the number of studies on proof in recent years. Furthermore, it was determined that a significant section of these studies aimed to investigate the proof process and related approaches. It was concluded that the most employed methodology was the qualitative approach, and studies were predominantly conducted with pre-service teachers; and the preferred data collection tools were exams/tests and interviews that included open-ended questions. Based on these findings, it was suggested that the difficulties experienced in the proof process, the measures to eliminate these difficulties, and the issues about the design of the proof instruction should be clear in each level of instruction.

Keywords: mathematics education, proof, systematic review

Cited:

Öztürk, T. & Demirel, D. (2022). The analysis of the studies on proof in Turkey: A systematic review. *Pamukkale University Journal of Education*. 54, 32-68. doi:10.9779/pauefd.782832.

* Asst. Prof. Dr., Trabzon University, Fatih Faculty of Education, <https://orcid.org/0000-0003-1599-8574>, tugbaozturk@trabzon.edu.tr

** Res. Assist., Trabzon University, Fatih Faculty of Education, <https://orcid.org/0000-0001-7940-681X>, damlakutlu@trabzon.edu.tr

Introduction

In the information age, scientific and technological advances have changed the human profile required by the society. Today, individuals are not only expected to be knowledgeable, but also need to access information (Adıgüzel, 2011). A series of actions such as assumptions, associations, reasoning, and generalization take place during access to information. These high-level skills play a key role in the formation of the desired human profile in current times (Ministry of National Education [MEB], 2018). Thus, individuals should acquire assumption, association, reasoning, and problem-solving skills. Mathematics education is an important field where individuals could acquire these skills (Umay, 2003). The fact that proof is a process based on a series of cognitive habits such as the identification of structures and variables, making assumptions, and organization of logical justifications (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002), demonstrates that it entails high-level skills. However, since proof plays roles such as explanation, discovery, communication, systematization in mathematics (de Villiers, 1999; Yackel & Hanna, 2003) it serves as a bridge in the development of the above-mentioned skills. Thus, acquisition of daily life requirements in mathematics education is possible through the adoption of proving methods in mathematics instruction (Öztürk, 2016).

Proof, which played an important role in the universalization of mathematical knowledge (Hanna & Barbeau, 2008), is the process of knowledge development that leads to a formal proof based on the investigation of the accuracy of assumptions by employing discovery about any problem and providing justifications (Öztürk, 2016; Turğut, Yenilmez & Uygan, 2013). Thus, proof is a process that includes cognitive activities and several functions (Bell, 1976; de Villiers, 1990; 1999) beyond simple mathematical operations (Selden & Selden, 2003). Proof is a comprehensive process that includes the verification, explanation, discovery, systematization, communication, and intellectual challenge functions. Thus, it is not possible to exclude the functions associated with proof from the instruction process.

Many authors agreed that proof is one of the most important elements in instruction (Almedia, 2000; Hanna, 1991; Hanna & Jahnke, 1996; Knuth, 2002; Mariotti & Balacheff, 2008; Stylianides, 2007). The proof allows the students to establish mathematical communications and create mathematical knowledge rather than evidencing the accuracy of a statement (Schoenfeld, 1994). The proof allows the students to learn mathematical concepts in-depth and find logical answers to why and why questions associated with these

concepts (Güler & Temizyürek, 2015). The fact that mathematical proof allows the students to understand the mathematical facts and their reasons (Hanna, 1991) and leads to the permanence of this knowledge (Stylianides, 2007) further reinforces its significance in instruction. Thus, proof supports conceptual learning and serves as a bridge to acquire meaningful learning (Tucker, 1999). It also allows the students to develop various methods, strategies, predictions, and associate concepts to solve a problem (Dede & Karakuş, 2014; Mariotti & Balacheff, 2008). These are directly associated with the development of mathematical thinking and reasoning skills, among the most important objectives of mathematics education (Stylianides, 2007). NCTM (2000, p. 342) emphasized the significance of mathematical proof in instruction: Reasoning and proof is not a special activity conducted at certain times or specific curriculum topics. On the contrary, it should be a natural part of the instruction process regardless of the topic and indicated that it should be an integral part of instruction. In other words, it was emphasized that proof should be included in every stage of the instruction process in every topic. Several authors supported the role of proof in mathematics education with similar statements and emphasized its significance, and stated that proof should be included in the instruction starting from the lowest level of education (Ball & Bass, 2003; Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2008).

The review of mathematics curricula would demonstrate that these aim to acquire high-level skills such as problem-solving, reasoning, association, and communication by the students (MEB, 2018). However, despite its significance in mathematics education, proof has not been directly included as a concept in the curricula (Aylar, 2014; Doğan, 2019). Thus, the proof is not included in mathematics instruction, and students only encounter the concept of proof at the undergraduate level without prior knowledge. It is not clear whether the significance of proof in mathematics education has been recognized in Turkey. A review of the studies on proof in Turkish literature would help clarify this issue. The literature review did not reveal a study on the trends observed in studies conducted in Turkey on proof that tackled the topic with a comprehensive approach. However, only a study by Öztürk, Akkan, Kaleli-Yılmaz, and Kaplan (2015) reviewed studies on mathematical proof. The study reviewed postgraduate theses conducted with middle school students and teachers in national and international literature during the past three years on proof. This brings to mind the question about the significance of proof in mathematics education in Turkey. The review of the studies on proof conducted in Turkey and providing details about the findings of these

studies would play a key role in answering this question. The literature review did not reveal a study on the trends observed in studies conducted in Turkey on proof that tackled the topic with a comprehensive approach. However, only a study by Öztürk, Akkan, Kaleli-Yılmaz, and Kaplan (2015) reviewed studies on mathematical proof. The study reviewed postgraduate theses conducted with middle school students and teachers in national and international literature during the past three years on proof. The study conducted by Öztürk et al. (2015) significantly limited by the time, sample, type of the study and number of studies included in the review. The present study differs from the above research since it is not limited to a period and includes all national proof studies (excluding proceedings and theoretical studies). Thus, the need for a study to reveal the trends in studies on proof in Turkey to guide future studies is clear. The review of previous studies on proof in the present study with a holistic approach is quite important to reveal the problems in instruction processes and the implementation of the previous studies. Furthermore, since the present study could raise awareness about proof, it could be suggested that it would contribute significantly to the literature. Thus, the present study was conducted to present a general view of the studies on proof, investigate these studies based on various dimensions, analyze the studies on proof, determine the status of proof instruction in the Turkish education system, and provide a baseline for future studies. The following research problem was determined in the study: "What is the general status (trends) of the studies on proof in mathematics education in national literature?" Furthermore, the following sub-problems were identified:

- 1) How are the previous studies on proof in national literature distributed based on publication?
- 2) How are previous studies on proof in national literature distributed based on the study aim?
- 3) How are previous studies on proof in national literature distributed based on methodology?
- 4) How are the previous studies on proof in national literature distributed based on the sample type?
- 5) How are the previous studies on proof in national literature distributed based on the data collection tool?

Method

The Research Design

In the present study, a systematic literature review methodology was employed to determine the trends in studies on proof in mathematics education in Turkey. A systematic review is a comprehensive review of all studies on the same topic based on various inclusion and exclusion criteria, employed to determine the studies that would be included in the review, and synthesis if these studies are based on the research problems (Petticrew & Roberts, 2006; Torgerson, 2003; Oakley, 2012). A systematic review is not a conventional literature review method (Lo, 2020); it is a systematic, transparent and reproducible research method (Petticrew & Roberts, 2006; Zawacki-Richter, 2020). Since the 1990s, the increase in the number of educational studies introduced the need to review independent studies on a specific topic with a holistic approach. The systematic review method became more popular in educational research (e.g., Cevher & Yıldırım, 2020; Ilgaz, 2018; Lin, Yin, Tang, Hadad & Zhai, 2020; Magalhães, Ferreira, Cunha & Rosário, 2020; Martin, Sun & Westine, 2020). Although systematic review entails a single process, it includes certain steps (Gough, Oliver, & Thomas, 2012; Torgerson, 2003). The present study was conducted based on these steps. These steps are presented in Figure 1.

The systematic review provides a synthesis of several studies conducted on a topic and reveals the general trend in the relevant topic (Petticrew & Roberts, 2006). Furthermore, the systematic review reveals the gaps in the literature in the relevant topic and helps determine future applications to fill these gaps (Gough et al., 2012). Thus, providing guidelines for future studies and applications provides a significant baseline for researchers and policymakers (Petticrew & Roberts, 2006; Polanin, Maynard & Dell, 2017).



Figure 1. *Systematic review steps*

The Inclusion Criteria

The criterion sampling method was employed in the assignment of the studies included in the study sample. The inclusion criteria included the following:

- a) Studies conducted on mathematics education
- b) Studies that included the keywords proof, proving, evidence, and evidencing
- c) Studies published in Turkish literature
- d) Studies conducted with qualitative/quantitative/mixed data
- e) Studies in these and article formats
- f) Open access articles where the whole text is available

Data Collection

In the study, initially, the articles and theses published in mathematics education and included the "proof", "proving", "evidence", and "evidencing" keywords in the YÖK National Thesis Center, TÜBİTAK ULAKBİM Dergipark, and Google Academic search engine were identified. The accessed studies were examined by two researchers. And it was determined that 6 studies did not include quantitative/qualitative/mixed data, but included sections such as proof methods, the significance of proof in mathematics education, and 3 studies were proceedings. Thus, 9 studies were not included in the analysis since they did not meet the study criteria. Forty-nine articles and 55 theses (Appendix 1) that met the study criteria were analyzed.

Data Collection Tool and Data Analysis

In the analysis, an analysis form was initially developed based on the research problems. The developed "Proof Studies Analysis Form" is presented in Table 1.

Table 1. *Proof Studies Analysis Form*

Study Title:
Study ID:
Year of Publication:
Study Aim:
Study Sample:
Study Methodology*:
Data Collection Tools:

*Study methodology should be identified clearly.

The analysis mentioned above form was completed for each study. Content and descriptive analysis techniques were employed in data analysis. Two researchers reviewed the analysis forms, and codes were determined for the study aim field in the form with the intercoder agreement. Since the study aimed to determine the trends in studies conducted in Turkey on proof in mathematics education, all studies conducted on the topic were included without a time limit. Due to many available studies, categories were determined for the year of publication field in the form. Furthermore, after each study was analyzed using the analysis form, categories were determined for the study sample, methodology, and data collection tool fields. The analysis form was finalized after these codes and categories were determined for each field. Each study was also coded. Articles were coded as M1, M2, M3, ... and theses were coded as T1, T2, T3, The final Proof Studies Analysis Form is presented in Table 2.

Table 2. *Proof Studies Analysis Form*

Study Code:
Study Title:
Study ID:
Year of Publication: <input type="checkbox"/> 2005-2009 <input type="checkbox"/> 2010-2014 <input type="checkbox"/> 2015-2020
Study Aim:
<input type="checkbox"/> Determination of the challenges in proving <input type="checkbox"/> analysis of proof approaches
<input type="checkbox"/> Analysis of proof diagrams <input type="checkbox"/> Argumentative analysis of the proving process
<input type="checkbox"/> Analysis of the proving process <input type="checkbox"/> Determination of the effects of instructional methods on the proving process
<input type="checkbox"/> Development of a measurement tool for proving <input type="checkbox"/> Analysis of textbooks based on proof
Study Sample:
<input type="checkbox"/> Middle school students <input type="checkbox"/> Secondary education students <input type="checkbox"/> Pre-service teachers
<input type="checkbox"/> Various undergraduate programs <input type="checkbox"/> Teachers <input type="checkbox"/> Faculty members <input type="checkbox"/> Textbooks
<input type="checkbox"/> Documents
Study Methodology:
Qualitative:
<input type="checkbox"/> Action research <input type="checkbox"/> Case study <input type="checkbox"/> Theoretical <input type="checkbox"/> Phenomenological
<input type="checkbox"/> Document analysis <input type="checkbox"/> Teaching experiment <input type="checkbox"/> Developmental study
Quantitative:
<input type="checkbox"/> Comparative study <input type="checkbox"/> Literature review <input type="checkbox"/> Quasi-experimental study
<input type="checkbox"/> Descriptive study
Mixed:
Data Collection Tools:
<input type="checkbox"/> Interview* <input type="checkbox"/> Open-ended exam/test <input type="checkbox"/> Survey/Scale <input type="checkbox"/> Observation
<input type="checkbox"/> Textbooks <input type="checkbox"/> Documents <input type="checkbox"/> Activities

*Please indicate the interview type clearly.

Each study was analyzed again with the final analysis form. Finally, the category and code frequencies and percentages were calculated for each form field.

Study Validity and Reliability

The validity and reliability of the study were determined based on certain steps. First, the inclusion criteria and the search keywords were determined based on the discussion between the two authors. The studies identified in the search but did not meet the study criteria were excluded with the consensus of both authors. Each study was analyzed separately, and the initial Proof Studies Analysis Form fields were completed. After the discussions conducted by the two authors upon the initial analysis of the form, it was decided that it would be more adequate to create codes and categories for each field. Thus, the form that included field codes and categories was finalized with the collaboration of the two authors. Then, the studies included in the analysis were re-analyzed. The intercoder agreement was tested after this analysis. Coding reliability was calculated with the Agreement / (Agreement + Disagreement) formula (Miles & Huberman, 1994). Thus, the reliability coefficient was determined as 92.35%.

Findings

In this section, the findings obtained with the study data analysis are presented based on the research sub-problems. The annual distribution of the studies on proof in Turkish literature is presented in Table 3.

Table 3. *The annual distribution of the studies on proof in Turkish literature*

YEARS	ARTICLES	f	%	THESES	f	%
2005-2009	M4, M16, M44	3	%6,12	T8, T11, T22, T42	4	%7,4
2010-2014	M1, M3, M5, M6, M8, M13, M15, M20, M27, M29, M31, M32, M34, M37, M40, M43	16	%32,65	T1, T2, T3, T4, T12, T13, T15, T16, T17, T18, T21, T23, T24, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T38, T40, T41, T48, T50, T52	25	%46,29
2015-2020	M2, M7, M9, M10, M11, M12, M14, M17, M18, M19, M21, M22, M23,	30	%61,23	T5, T6, T7, T9, T10, T14, T19, T20, T31, T32, T33, T34, T35, T36, T37, T39, T43,	25	%46,29

M24,	M25,	M26,	T44,	T46,	T47,	T49,
M28,	M30,	M33,	T51,	T53,	T54,	T55
M35,	M36,	M38,				
M39,	M41,	M42,				
M45,	M46,	M47,				
M48,	M49					

Note: The study T45 was published in 2003. Since it was outside the category range, it is indicated separately.

As seen in Table 3, the highest number of articles on proof was published between 2015 and 2020. It was observed that the trend was similar in theses, and the same number of theses were published between 2010 and 2014 and between 2015 and 2020. An only a limited number of studies on proof, including both articles and theses, were conducted between 2005 and 2009. As seen in Table 3, it could be suggested that the number of studies on proof has increased in Turkish literature in recent years.

The annual distribution of the studies on proof in Turkish literature is presented in Figure 2. Thus, the number of articles and theses on proof could be observed comparatively based on the specific intervals.

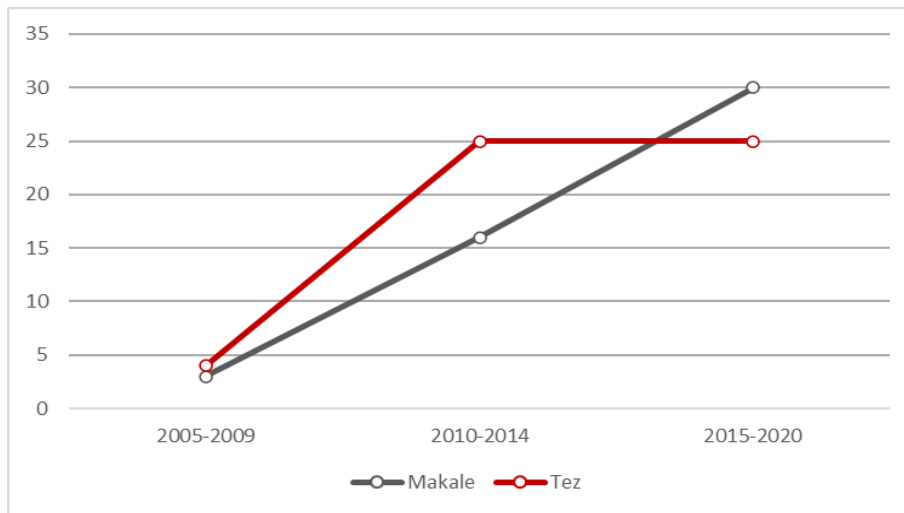


Figure 2. Annual distribution of the articles and theses on proof

The distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the study aim is presented in Table 4.

Table 4. *Distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the study aim*

AIM	ARTICLES	f	%	THESES	f	%
Determination of the challenges in proving	M4, M21, M28	3	%5,55	T5, T13, T23, T49	4	%5,12
Analysis of proof approaches	M5, M6, M8, M16, M20, M27, M29, M30, M31, M32, M34, M37, M40, M44, M46, M48	16	%29,63	T2, T6, T9, T12, T17, T18, T19, T20, T21, T23, T24, T26, T27, T28, T30, T31, T33, T38, T40, T48	20	%25,64
Analysis of proof diagrams	M17, M25, M41, M42	4	%7,41	T11, T27, T36, T45, T48	5	%6,41
Argumentative analysis of the proving process	M19, M35, M39	3	%5,55	T10, T14, T19, T50	4	%5,12
Analysis of the proving process	M2, M3, M6, M7, M9, M10, M12, M14, M18, M23, M24, M26, M31, M38, M40, M44, M45	17	%31,49	T3, T4, T7, T9, T12, T13, T22, T23, T25, T28, T29, T30, T32, T34, T35, T39, T41, T42, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T53, T54, T55	28	%35,89
Determination of the effects of instructional methods on the proving process	M1, M11, M13, M47	4	%7,41	T1, T6, T8, T15, T16, T17, T18, T20, T26, T31, T33, T37, T38,	15	%19,23

T43, T52							
Development of a measurement tool for proving	M8, M15, M22, M43	4	%7,41	-	-	-	
Analysis of textbooks based on proof	M33, M36, M49	3	%5,55	T4, T21	2	%2,56	

When a study had more than one aim, Table 4 was constructed to include each study aim in data analysis. For example, the study T30 aimed to determine the attitudes towards proving and to investigate the proving processes employed when learning algebra. Thus, T30 was coded twice to reflect both study aims. Thus, instead of the total number of studies, the total data count was determined based on the investigated properties. As seen in Table 4, articles and theses mostly aimed to investigate the proving process and approaches. The studies that investigated proving with an argumentative approach and those that analyzed the textbooks based on proving, on the other hand, were only a few. The study T50 that aimed to analyze argumentative proving process, was a literature review of previous studies on the correlation between argumentation and proving. Furthermore, there were 4 articles in the national literature that aimed to develop a measurement tool for proving, while there was no thesis in this group. As seen in Table 4, quite a few articles were conducted to determine the effect of instructional methods on the proving process. It was an interesting finding that the number of theses with the same aim was higher.

The distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the study methodology is presented in Table 5.

Table 5. *Distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the study methodology*

METHOD	TECHNIQUE	ARTICLES	f	%	THESES	f	%
	Action research	M1, M11, M45	3	%6,12	T1, T38	2	%3,63
	Case study	M2, M3, M6, M7, M9, M10,	20	%40,81	T3, T5, T7, T14, T16, T17, T18,	26	%45,27

QUALITATI VE		M17, M18,			T19, T24,		
		M21, M23,			T26, T30,		
		M25, M26,			T32, T34,		
		M28, M35,			T35, T36,		
		M38, M39,			T40, T41,		
		M40, M41,			T42, T45,		
		M44, M47			T46, T47, T49, T51, T53, T54, T55		
	Theoretical	M30	1	%2,05	T25	1	%1,81
	Phenomenological	M29, M32	2	%4,08	T8	1	%1,81
	Document analysis	M33, M36, M49	3	%6,12	T50	1	%1,81
	Teaching experiment	-	-	-	T6, T37, T52	3	%5,45
	Developmental	-	-	-	T48	1	%1,81
	Comparative	M5, M15, M20, M24	4	%8,16	T12, T20	2	%3,63
QUANTITA TIVE	Literature review	M8, M27, M42, M43, M48	5	%10,2	T2	1	%1,81
	Quasi-experimental	M13	1	%2,05	-	-	-
	Descriptive	M16, M22, M37	3	%6,12	-	-	-
MIXED		M4, M12, M14, M19, M31, M34, M46	7	%14,29	T4, T9, T10, T11, T13, T15, T21, T22, T23, T27,	17	%30,9

T28, T29,
T31, T33,
T39, T43,
T44

As seen in Table 5, a mostly qualitative approach was preferred in both articles and theses. However, it should be noted that the most preferred method was a case study among qualitative studies. Quite a few theses analyzed in the present study were quantitative research. It was observed that the number of studies conducted with the mixed method was significant.

The distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the study sample is presented in Table 6.

Each sample group was included in the analysis of studies conducted with more than one sample group in Table 6. For example, the sample in the study M11 included both teachers and secondary education students. Study M11 was included in both sample categories. Thus, instead of the total number of studies, the total data count was determined based on the categories in the table. Since no studies were conducted with primary school students, no sample category included primary school students. As seen in Table 6, mostly pre-service teachers were included in study samples in reviewed articles and theses. Only a few articles included middle school students in the sample; however, several theses were conducted with middle school students.

It should be noted that the authors did not prefer other undergraduate programs, teachers, and faculty members. However, all studies conducted with other undergraduate programs (M23, T12, T24, and T39) included mathematics department students. Thus, it could be suggested that studies were not conducted with other undergraduate students, except pre-service teachers and mathematics department students.

Table 6. *Distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the sample*

SAMPLE	ARTICLES	f	%	THESES	f	%
Middle school students	M1, M2, M45, M47	4	%7,4	T1, T2, T3, T4, T10, T15, T22, T34, T37, T43, T45, T51	12	%19,67
Secondary education students	M3, M11, M13, M38, M39	5	%9,26	T5, T6, T7, T9, T11, T20, T38, T41, T42, T55	10	%16,39
Pre-service teachers	M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, M12, M14, M15, M16, M17, M18, M19, M20, M21, M23, M24, M25, M27, M28, M29, M31, M32, M34, M35, M37, M40, M41, M42, M43, M44, M46, M48	34	%62,97	T8, T12, T13, T14, T16, T17, T18, T19, T21, T23, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T31, T32, T33, T35, T36, T39, T40, T44, T46, T47, T48, T49, T52, T53	30	%49,18
Other undergraduate students	M23	1	%1,85	T12, T24, T39	3	%4,91
Teachers	M3, M11, M12, M22, M26, M47	6	%11,11	T41, T54	2	%3,27
Faculty members	M30	1	%1,85	T21	1	%1,63
Textbooks	M33, M36, M49	3	%5,56	T4, T21	2	%3,27
Documents	-	-	-	T50	1	%1,63

Note: Certain studies included more than one study group.

The distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the data collection tool is presented in Table 7.

Table 7. *Distribution of the studies on proof in Turkish literature based on the data collection tool*

DATA						
COLLECTION	ARTICLES	f	%	THESES	f	%
TOOL						
Interview	M1, M2, M7, M9, M12, M14, M18, M19, M22, M25, M29, M30, M31, M32, M34, M35, M38, M40, M41, M42, M44, M45, M46	23	%28,05	T1, T5, T6, T7, T8, T9, T14, T16, T17, T18, T19, T21, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T29, T30, T31, T32, T33, T35, T36, T38, T39, T40, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T52, T53	37	%31,35
	M1, M2, M4, M6, M7, M9, M10, M12, M13, M14, M17, M19, M21, M22, M23, M24, M25, M28, M35, M39, M40, M41, M42, M44, M45	25	%30,49	T1, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9, T10, T11, T12, T13, T15, T19, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T28, T29, T30, T31, T32, T33, T34, T35, T36, T38, T39, T42, T43, T44, T45, T46, T47, T48, T49, T51, T52,	44	%37,28
Open ended exam/test						

				T53, T54, T55		
Survey/Scale	M5, M8, M15, M16, M20, M27, M31, M32, M34, M37, M42, M43, M46, M48	14	%17,07	T2, T12, T18, T20, T21, T23, T27, T28, T29, T33, T48	11	%9,32
Observation	M3, M11, M12, M26, M44	5	%6,1	T9, T39, T41, T47	4	%3,38
Textbooks	M33, M36, M49	3	%3,66	T4, T21	2	%1,69
Documents	M3, M11, M14, M18, M26, M44 M47	7	%8,53	T6, T9, T14, T16, T17, T25, T31, T32, T37, T39, T41, T50, T52	13	%11,01
Activities	M12, M13, M26, M34, M47	5	%6,1	T14, T15, T16, T17, T18, T20, T37	7	%5,93

Note: Certain studies employed more than one data collection tool.

The studies where more than one data collection tool was employed were included in more than one category in Table 7. For example, the study T33 employed a semi-structured interview form, a survey/scale and open-ended exam/test. The study T33 was included in all three categories. Thus, instead of the total number of studies, the total data count was determined based on the categories in the table. As seen in Table 7, open-ended exam/test and interview methods were the most common data collection tools in both articles and theses. However, it was observed that in certain studies, both open-ended exam/test and interview were used. In articles where interviews were employed as data collection tools, semi-structured interviews were used in 17 (M2, M9, M12, M14, M19, M22, M29, M30, M31, M32, M34, M35, M38, M42, M44, M45, M46), semi-structured interview forms were used in 5 (M1, M7, M25, M40, M41), and focus group interview was employed in 1 (M18) study. Among theses, semi-structured interviews were used in 29 (T1, T5, T6, T7, T8, T9, T17, T18, T21, T22, T23, T24, T25, T26, T27, T29, T30, T32, T33, T38, T39, T40, T44, T46, T47, T49, T51, T52, T53), clinical interviews were used in 7 (T16, T19, T31, T35,

T36, T45, T48), and focus group interviews were used in 2 (T14, T37) studies. Thus, it could be suggested that both in articles and theses, the semi-structured interview method was preferred.

Discussion and Conclusion

The present study aimed to reveal the general trends in studies on proof conducted in Turkey. Thus, the studies on proof in the national literature were analyzed based on five dimensions: the year of publication, study aim, methodology, sample, and the data collection tool. This section discusses the study findings based on the dimensions as mentioned earlier. In the study, it was observed that there had been an increase in the number of studies on proof in recent years. Thus, it could be suggested that the trend is upward in studies on proof in Turkey. Although proof, one of the main building blocks of mathematics, was developed long before, its employment in mathematics education is relatively recent. As it was recognized that proof plays a key role in the construction and development of mathematical knowledge, more studies have been conducted to demonstrate that proof should be at the core of mathematics curricula (Knuth, 2002; Stylianou, Blanton & Knuth, 2010; Stylianides, 2007). This emphasis could have led certain authors in Turkey to conduct studies on the topic. Thus, the recent increase in the number of studies on proof in Turkey could be explained by this fact. Similarly, it was reported that the number of studies on proof has increased in recent years in the international literature as well (Fan & Jones, 2018; Karakuş, Erşen & Ocak, 2017; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016). Thus, it could be suggested that there is a similarity between the trends in the national and international literature in recent years. However, international literature has a long history in studies on proof. The first studies on proof in Turkish literature date back to the early 2000s. It could be suggested that the studies on proof in international literature exhibited stable progress compared to the national literature since the initial studies in international literature date back to the early 1900s.

The literature review conducted on national studies revealed that most studies investigated the proving process in mathematics education and determined the approach to proof. Proof, which is the core of mathematics education, is a process that entails cognitive activities such as discovery, conjecturing, association, generalization, and reasoning by nature (Ball et al., 2002; Greenberg 1993; Hoyles & Healy, 2007; Öztürk, 2016). Thus, the comprehensive nature of proof may require various studies on each step it entails or analyses based on these dimensions. In the present study, several objectives such as the analysis of

proving levels, analysis of proving skills based on the divisibility/functions and numbers topics, investigation of communications during proving activities, cognitive analysis of proving processes, investigation of the development of proving skills, investigation of reasoning mistakes in proving, investigation of the employment of proving methods skills, and the investigation of proof analysis processes were coded in the analysis of the proving process theme. This could explain the high number of studies investigating the proving process. In a meta-synthesis conducted by Öztürk et al. (2015), 6 national and 9 international theses on proof conducted with qualitative methods and published between 2012 and 2015 were reviewed. The fact that the studies conducted between 2012 and 2015 mostly aimed to investigate the views on proving and analyzing proving processes demonstrated that the trend continues in the studies reviewed in the present study. The review of the international studies on proof demonstrated that the majority of studies aimed to determine the views of students, pre-service teachers, teachers or faculty members about proof and investigate the proving processes (Alcock & Weber, 2005; Alcock, 2010; Almeida, 2000, 2003; Bleiler, Thompson & Krajcevski, 2014; Fukawa-Connelly, 2012; Harel & Sowder, 1998; Hemmi, 2010; Jones, 2000; Knuth, 2002; Lai & Weber, 2014; Lesseig, 2016; Martin & Harel, 1989 ; Raman, 2003; Solomon, 2006; Stylianides & Stylianides, 2009; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2007; Stylianou, Blanton & Rotou, 2015; Varghese, 2009; Weber, 2012; Yopp, 2011; Zazkis, Weber & Mejia-Ramos , 2016). Thus, based on the aims of the studies in the national and international literature on proof, it could be suggested that both groups of studies were similar since most aimed to determine general views (beliefs, attitudes, opinions, etc.) on proof and analysis of the proving process.

The review of both national and international literature revealed that students adopted a negative attitude towards proving, believed that they would fail in proving, and were afraid of it independent of their education level in most studies that aimed to determine the views of the participants on proof (e.g., Almeida, 2003; de Villiers, 1990; Doruk, Kıymaz, Horzum & Morkoyunlu, 2014; Doruk, Özdemir & Kaplan, 2014; Gökkurt & Soylu, 2012; Jones, 2000; Raman, 2003). Similarly, the review of studies that aimed to investigate proving process demonstrated that students could not prove any mathematical correlation or comprehend a provided proof (e.g., Anapa & Şamkar, 2010; Doruk & Kaplan, 2017; Güler & Ekmekçi, 2016; Ko & Knuth, 2009; Moore, 1994; Stylianides et al., 2007; Şahin, 2016). These study findings could lead to further studies on proving processes and participant views on proving to determine whether there was a change in the views on proof and the

difficulties experienced in this process. It is important to conduct such studies to collect information about the possible revisions in instruction methods used in proving. Thus, it is necessary to determine the problems that students experience in the proving process and the possible measures for the elimination of these difficulties, as well as the design of a novel instruction method, to realize the significance of proof in mathematics by the students. In other words, these types of studies should be prioritized in national literature.

The literature review conducted on national studies revealed that only a few studies on the development of measurement tools for proving and studies that investigated textbooks based on proof. The fact that the proving process entails certain cognitive efforts such as discovery, conjecturing, association, generalization, etc., and requires the analysis of various dimensions for each effort could have limited the number of studies on the topic. In other words, since the proving process has a multi-dimensional structure, it is not possible to quantify it with a single scale, which could have led to this fact. Thus, the number of studies on the development of proof measurement tools could be expected to be limited. However, it was also determined that the number of studies conducted to analyze the textbooks based on proof was even more limited. It was noted that the concept of proof was not included in the current curricula for all education levels (Aylar, 2014; Aylar & Şahiner, 2016; Çalışkan, 2012; Yıldız, 2019). This could explain the findings mentioned above.

The studies' analysis on proof-based methodology demonstrated that most studies were qualitative. On the other hand, mixed-method research was higher than qualitative studies. About social events, the qualitative approach provides more in-depth knowledge when compared to the quantitative approach. However, this does not mean that the qualitative approach is superior to the quantitative approach. Each approach has its own strengths and weaknesses. The main point is the ability of the researcher to determine the accurate approach for the given research problem (Frankel & Devers, 2000; Yıldırım & Şimşek, 2005). In educational studies, data collected with only quantitative methods would not yield sufficient outcomes, and the quantitative data should be supported with qualitative methods to allow in-depth interpretation of the data (Creswell & Plano Clark, 2007). Thus, qualitative and mixed methods preference could be expected in studies on proof. However, it could also be suggested that since proving entails several cognitive processes (Öztürk, 2016), a qualitative approach is required to fully recognize the efforts of the individuals in any sample group. Thus, it could be argued that proof, as a topic in mathematics education, is suitable for the realm of qualitative research.

The study determined that the national studies on proof were mostly conducted with pre-service teachers. However, a similar number of studies were conducted with secondary education students. Furthermore, the number of studies conducted with the students decreased with the decrease in education level. Thus, almost no studies were conducted with middle school students in the national literature. Also, there were no studies on proof that were conducted with primary school students in the national literature, while there are several studies in the international literature (e.g., Flegas & Charalampos, 2013; Komatsu, 2010; Maher & Martino, 1996; Stylianides, 2007). Furthermore, several studies emphasized that proving should be at the core of mathematics education in every grade (Ball & Bass, 2003; Ball et al., 2002; Hanna, 2000; Yackel & Hanna, 2003). Thus, the fact that there were only a few studies with primary and middle school students in Turkish literature on proof could be criticized (Aylar, 2014; Aylar & Şahiner, 2016). This could be due to the fact that proving is not emphasized in various education levels in Turkey. The prevalence of the conventional approach that proving should only be included in high school and higher education curricula, or only in advanced mathematics curricula (Cooper et al., 2011; Fawcett, 1995; Knuth, 2002) is consistent with this finding. NCTM's (2000) emphasis on the need to include proof instruction in each mathematics topic starting from pre-school changed the prevalence of the approach mentioned above to a certain extent. However, an analysis of the primary and middle school curricula would demonstrate that proving is still not a separate skill. Furthermore, secondary education curricula are limited by a few achievements in proving concepts and methods. Thus, it could be suggested that the concept of proof was only included in certain undergraduate programs. Therefore, most of the studies on proof in Turkish literature were conducted with pre-service teachers. It was observed that there is a significant need to conduct further studies on proof with both primary and middle school students.

The study determined that most studies on proof in the national literature employed open-ended exam/test and interview methods as data collection tools. On the other hand, it should be noted that certain studies employed both open-ended exam/test and interview methods. The data sources are significant for acquiring reliable findings in educational studies. Furthermore, the diversification of data collection tools is important to collect in-depth data. Accordingly, the data collected with a single data collection tool could be an obstacle to the interpretation of the findings. It is important to employ more than one data

collection tool in studies on proof to achieve detailed information about the study topic and to represent a comprehensive process such as proving.

The current study reflected the general status of the studies on proof in Turkish literature with a holistic approach. Thus, the study provided an opportunity to observe the shortcomings and the trends in the national literature on proof based on the analyzed dimensions. Studies conducted in any educational discipline in a country could determine the future educational reforms in the country. However, it was observed that the studies conducted on proof in the national literature were quantitatively behind when compared to the international literature (Özer & Arıkan, 2002). Furthermore, it was observed that the studies conducted in the national literature exhibited a similar trend, especially in the study objectives and samples. Thus, several issues need to be investigated in various levels of education. It could be suggested that the studies on proof in the national literature could not fulfill this goal properly. It is very important to consider these gaps in the literature in future studies on proof.

Since the present study included only articles and theses published in the national literature, the most significant limitation of the study is the exclusion of the articles and theses published in the international literature. Thus, it could be suggested that future studies should investigate international studies on proof in mathematics education to fill that gap in the literature.

Ethical Approval: *This research is a systematic review study. In this regard, data collection has not been carried out on animals or humans. Therefore, this study does not require Ethics Committee Approval.*

Conflict of Interest: *Authors have no conflict of interest to declare.*

Author Contributions: *All authors contributed to the study at every stage.*

References

- Adıgüzel, A. (2011). Bilgi okuryazarlığı ölçeğinin geliştirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 15-28.
- Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hitt, D. Holton & P. W. Thompson, (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 63-91). Washington: American Mathematical Society.
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real Analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Anapa, P., & Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 2700–2706.
- Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi, *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579.
- Aylar, M. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 47(1), 351-376.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In G. Martin (Ed.), *Research companion for the principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907–920). Beijing: Higher Education.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Education Studies in Mathematics*, 7, 23–40.

- Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajcevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 105-127.
- Cevher, A. Y. ve Yıldırım, S. (2020). Öğrenme stilleri konusunda yapılmış akademik çalışmaların incelenmesi: Sistemik derleme. *HAYEF: Journal of Education (Online)*, 17(1), 20-50.
- Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B., & Knuth, E. J. (2011, July). *Adolescent reasoning in mathematics: exploring middle school students' strategic approaches in empirical justifications*. Paper presented at the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society. Boston, MA.
- Creswell, W. J., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. London: SAGE.
- Çalık, M. ve Sözbilir, M. (2014). İçerik analizinin parametreleri. *Eğitim ve Bilim*, 39(174), 33-38.
- Çalışkan, Ç. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum.
- Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 47-71.
- Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 601-618.
- Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat – temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55.

- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri, *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 44, 467-498.
- Doruk, M., Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.
- Fan, L., & Jones, K. (2018). About the teaching and learning of proof and proving: cognitive issues, curricular issues and beyond. In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.). *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 215-222). Germany: Springer.
- Fawcett, H. P. (1995). *The nature of proof. thirteenth yearbook of the national council of teachers of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Flegas, K., & Charalampos, L. (2013). Exploring logical reasoning and mathematical proof in grade 6 elementary school students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(1), 70-89.
- Frankel, R. M., & Devers, K. J. (2000). Study design in qualitative research. *Education for health: Change in learning and practice*, 13(2), 251-261.
- Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 325-345.
- Gough, D., Oliver, S. ve Thomas, J. (2012). Introducing systematic reviews. In D. Gough, S. Oliver & J. Thomas (Eds.). *An introduction to systematic reviews* (pp. 1-15). London: SAGE.
- Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.

- Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 446-462.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 55-61). USA: Kluwer Academic.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 40, 345–353.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 271-291.
- Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense.
- Ilgaz, H. (2018). Bireysel farklılıklar kapsamında çevrimiçi öğrenme araştırmalarına ilişkin sistematik bir derleme. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 11(4), 1003-1018.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.

- Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(Özel Sayı 2), 247-265.
- Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 29, 1-10.
- Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 93-108.
- Lesseig, K. (2016). Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17(3), 1-31.
- Lin Q., Yin Y., Tang X., Hadad R., & Zhai, X. (2020). Assessing learning in technology rich maker activities: A systematic review of empirical research. *Computers & Education*, 157, 103944.
- Lo, C. K. (2020). Systematic reviews on flipped learning in various education contexts. In O. Zawacki-Richter, M. Kerres, S. Bedenlier, M. Bond & K. Buntins (Eds.). *Systematic reviews in educational research* (pp. 129-143). Germany: Springer.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-Year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194-214.
- Magalhães, P., Ferreira, D., Cunha, J., & Rosário, P. (2020). Online vs traditional homework: A systematic review on the benefits to students' performance. *Computers & Education*, 152, 103869.
- Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, 40, 341-344.

- Martin, F., Sun, T., & Westine, C. D. (2020). A systematic review of research on online teaching and learning from 2009 to 2018. *Computers & Education, 159*, 104009.
- Martin, G. W., & Harel G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik dersi (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Oakley, A. (2012). Foreword. In D. Gough, S. Oliver & J. Thomas (Eds.). *An introduction to systematic reviews* (pp. vii-x). London: SAGE.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002, Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri. Ankara.
- Öztürk, M., Akkan, Y., Kaleli-Yılmaz, G. ve Kaplan, A. (2015, Mayıs). *Ortaokul öğrencileri ve öğretmenleriyle yapılan matematiksel ispat araştırmaları: Nitel meta-sentez çalışması*. 2. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildiri. Adıyaman Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Adıyaman.
- Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Petticrew, M., & Roberts, H. (2006). *Systematic reviews in the social sciences*. USA: Blackwell.
- Polanin, J. R., Maynard, B. R., & Dell, N. A. (2017). Overviews in education research: A systematic review and analysis. *Review of Educational Research, 87*(1), 172-203.
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 319-325.

- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In Alan H. Schoenfeld, (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-69) Hillsdale, NJ, England: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 373–393.
- Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253.
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Gutiérrez, A., Leder, G. & Boero, P. (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315–351). Rotterdam: Sense.
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307-332.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103–133.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (Eds.). (2010). *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective*. New York: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and

- classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134.
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.
- Torgerson, C. (2003). *Systematic reviews*. London: Continuum.
- Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, 31-35.
- Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-14.
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 43(4), 463-482.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards to school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mersin Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- Yopp, D. A. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 115-130.

Zawacki-Richter, O. (2020). Introduction. In O. Zawacki-Richter, M. Kerres, S. Bedenlier, M. Bond & K. Buntins (Eds.). *Systematic reviews in educational research* (pp. v-xiii). Germany: Springer.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 155-173.

Appendix 1. Articles and Theses Examined in the Study

M1: Aylar, E. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 47(1), 351-376.

M2: Zeybek-Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 13(1), 196-216.

M3: Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 134-154.

M4: Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3.sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506.

M5: Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education*, 1(2), 134-141.

M6: Köğce, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın matematik öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *Turkish Studies*, 8(12), 766-776

M7: Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 44, 467-498.

M8: Doruk, M. ve Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 71-93.

M9: Güner, P. ve Topan, B. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üçgenlerin öğretiminde geometrik ispatları kullanabilme becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 10(2), 210-242.

M10: Demircioğlu, H. (2019). Matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin incelenmesi: Bir durum çalışması. *Eğitim Bilimleri Araştırmaları Dergisi*, 9(1), 22-39.

M11: İnam, B. ve Uğurel, I. (2016). İspat kavrama testine dayalı bir öğretim uygulamasında karşılaşılan güçlükler ve sürece müdahale yolları. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(1), 1-21.

M12: Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64.

M13: Kılıç, H. (2013). Lise öğrencilerinin geometrik düşünme, problem çözme ve ispat becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 7(1), 222-241.

M14: Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.

M15: Keçeli-Bozdağ, S., Uğurel, I. ve Bukova-Güzel, E. (2014). Matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispatlamaya yönelik tutumlarının belirlenmesi: Bir ölçek geliştirme çalışması. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(4), 1585-1600.

- M16:** Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- M17:** Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 12(2), 136-166.
- M18:** Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 446-462.
- M19:** Güler, G. ve Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.
- M20:** Doruk, M., Özdemir, F., ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.
- M21:** Pala, O. ve Narlı, S. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(3), 449-475.
- M22:** Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2017). Matematik öğretmenlerine yönelik ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 360-381.
- M23:** Karakuş, F., Erşen, Z. B. ve Ocak, G. (2017). Matematik ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin ispat yapma düzeylerinin incelenmesi. *Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(Özel Sayı 2), 247-265.
- M24:** Polat, K., Oflaz, G. ve Akgün, L. (2019). Görsel ispat becerisinin, Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenek ile ilişkisi. *Erciyes Eğitim Dergisi*, 3(2), 105-122.
- M25:** Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 59-100.
- M26:** Doğan, M. F. (2019). Ortaokul öğretmenlerinin ispatla ilişkili etkinliklere katılımlarının doğasının incelenmesi. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 48(1), 100-130.
- M27:** Turgut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- M28:** Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 81-99.
- M29:** Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571 – 590.
- M30:** Aksoy, E. ve Narlı, S. (2019). Öğretim elemanlarının matematiksel ispatın önemine yönelik görüşlerinin incelenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 47, 134-156.
- M31:** Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- M32:** Özdemir, F. ve Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.

- M33:** Doğan, M. F. (2019). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 601-618.
- M34:** Doruk, B. K., Kıymaz, Y., Horzum, T. ve Morkoyunlu, Z. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının ispatla ilgili görüşleri: Formal ispat-temsili ispat. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 23-55.
- M35:** Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, 8(2), 429-452.
- M36:** Toprak, Z. ve Özmantar, M. F. (2019). Türkiye ve Singapur 5. sınıf matematik ders kitaplarının çözümlü örnekler ve sorular açısından karşılaştırmalı analizi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(2), 539-566.
- M37:** Gökçurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- M38:** Öztürk, M., Akkan, Y. ve Kaplan, A. (2017). Üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlara yönelik bilgi ve farkındalıklarının incelenmesi. *Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi*, 4(2), 19-35.
- M39:** Urhan, S. ve Bülbül, A. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, 10(1), 351-373.
- M40:** Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 137-157.
- M41:** Eldekci, S. (2018). Matematik eğitimi öğretmen adaylarının kanıt şemalarının ortaya çıkarılması. *Eğitim Bilimleri Dergisi*, 9(2), 119-136.
- M42:** Pektaş, O. ve Bilgici, G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusunda kullandıkları kanıt şemalarının öğrenme stillerine göre incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27(3), 1348-1358.
- M43:** İskenderoğlu-Aydoğdu, T., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenilirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.
- M44:** Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.
- M45:** Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(3), 559-579.
- M46:** Cihan, F. ve Akkoç, H. (2020). Öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin geliştirilmesi: Bir tasarım çalışması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 11(1), 280-311.
- M47:** Özdemir-Erdoğan, E., Erdoğan, A., Dur, Z. ve Akkurt-Denizli, S. (2020). Dinamik geometri yazılımı ile keşif, varsayım ve ispat: Bir durum çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 14(1), 661-690.
- M48:** Altıntaş, E. ve İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Education Journal*, 28(3), 1573-1582.
- M49:** Zeybek, Z., Üstün, A. ve Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *Elementary Education Online*, 17(3), 1317-1335.

- T1:** Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- T2:** Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T3:** Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri* (Yayımlanmamış doktora tezi). Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.
- T4:** Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- T5:** Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Mersin Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- T6:** Gelişen, A. (2017). *9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- T7:** Göl, R. (2017). *12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- T8:** Yıldız, G. (2006). *Lisans seviyesinde genel matematik dersindeki teorem ve ispatları anlamaya yönelik kavrama testinin hazırlanması uygulanması ve öğrenci görüşlerinin değerlendirmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- T9:** Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T10:** Pesen, M. (2018). *An examination of the proof and argumentation skills of eighth-grade students* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, Institute of Social Sciences, İstanbul.
- T11:** Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, The Graduate School of Natural and Applied Science, Ankara.
- T12:** İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof* (Unpublished doctoral dissertation). Boğaziçi University, The Graduate School of Natural and Applied Science, İstanbul.
- T13:** Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, The Graduate School of Social Sciences, Ankara.
- T14:** Demiray, E. (2019). *An investigation of prospective middle school mathematics teachers' argumentation, proof, and geometric construction processes in the context of cognitive unity* (Unpublished doctoral dissertation). Middle East Technical University, The Graduate School of Social Sciences, Ankara.
- T15:** Demir, F. (2011). *Bir dinamik geometri yazılımının ilköğretim öğrencilerinin geometride ispat becerilerine etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Erzincan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

- T16:** Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- T17:** İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- T18:** Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- T19:** Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T20:** Haseki, D. (2018). *Improving attitudes towards geometric proof in the context of dynamic geometry software-based proof instruction* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, Institute of Social Sciences, İstanbul.
- T21:** Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- T22:** Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- T23:** Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- T24:** Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T25:** Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- T26:** Karahan, Ö. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının çift sütun ispat yöntemine yönelik görüşleri ve bu yönteme dayalı ispatlama süreçlerinin analizi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T27:** Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- T28:** Keçeli-Bozdağ, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T29:** Birinci, K. S. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- T30:** Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T31:** Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- T32:** Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T33:** Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T34:** Kunt, A. (2017). *Ortaokul 8.sınıf öğrencilerinin matematiksel ispata yönelimlerinin yapay sinir ağı modeli kullanılarak incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T35:** Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- T36:** Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.
- T37:** Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- T38:** İnam, B. (2014). *Ortaöğretim düzeyinde, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretim uygulamasının değerlendirilmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T39:** Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- T40:** Miral, D. (2013). *Ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin matematiksel ispat yöntemleri hakkındaki görüşleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- T41:** Uğural, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T42:** Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- T43:** Küçükbulut, C. (2019). *Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimine 5E modelinin etkisi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.
- T44:** Belin, M. (2016). *Prospective mathematics teachers' quantitative reasoning on the development of decimal representation of real numbers and its effect on their comprehension of a related proof* (Unpublished master's thesis). Boğaziçi University, The Graduate School of Natural and Applied Science, İstanbul.
- T45:** Aydoğdu-İskenderoğlu, T (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.
- T46:** Kaya, E. P. (2018). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt şemalarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- T47:** Pala, O. (2016). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T48: İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt semaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

T49: Urhan, S. (2018). *Kanıt yapma sürecinin Habermas akılcı davranış modeli ile analizi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T50: Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T51: Ateş Alpay, Ü. (2018). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin kanıt imajlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

T52: Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

T53: Coşkun, M. (2020). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometri alanındaki ispat yapabilme yeterliklerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

T54: Arslantaş-İlter, E. (2020). *Matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerinin Pisagor teoremi bağlamında incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

T55: Üstüngün, Ş. (2020). *12. sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.