Eğitim Bilim ve Araştırma Dergisi

2020, Cild. 01, NO. 01, 10-12
https://dergipark.org.tr/tr/pub/ebad

Matematik Öğretmenlerinin Pisagor Teoremi İle İlgili Görselleri Tanıma Düzeylerinin İncelenmesi*

Investıgation of the Level of Visuals Recognition of Mathematics Teachers Related to the Pythagorean Theorem

Handan DEMIRCIOĞLU[1], Ebru ARSLANTAŞ İLTER[2]

[1]Cumhuriyet Üniversitesi MFBE Bölümü, Matematik Eğitimi A.B.D.

handandemircioglu@gmail.com ORCID 0000-0001-7037-6140

[2]Milli Eğitim Bakanlığı Ölçme Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü

ebruarslantas@yahoo.com ORCID 0000-0002-1616-6393

ÖZ

Bu çalışmada matematiksel ifadesi verilmeyen Pisagor teoremi bağlamındaki sözsüz ispatlardaki görsellerin, matematik öğretmenlerine ne ifade ettiğini incelemek amaçlanmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmaya gönüllü 20 matematik öğretmeni katılmıştır. Veriler Garfield ve Hardy tarafından verilen Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarındaki görseller ile toplanmıştır. Verilerin analizinde içerik analiz kullanılmıştır. Elde edilen bulgular Garfield ve Hardy tarafından yapılan sözsüz ispattaki görsellerden Garfield'ın ispatındakine daha aşina olduklarını ve Pisagor teoremi ile daha fazla ilişkilendirdiklerini göstermiştir. Ayrıca çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi Garfield tarafından yapılan sözsüz ispattaki görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen 8 öğretmen Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş bu öğretmenlerden de yalnızca 3'ü bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamıştır. Yalnızca bir öğretmen hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem nasıl bulunacağını ifade etmiştir.

Anahtar Kelimeler: *İspat, Görselleştirme, Sözsüz İspatlar, Matematik Öğretmeni, Pisagor teoremi*

ABSTRACT

In this study, it is aimed to examine what the visuals in non-verbal proofs in the context of the Pythagorean theorem, whose mathematical expression is not given, mean to mathematics teachers. Case study, one of the qualitative research methods, was used in the study. 20 volunteer math teachers participated in the study. The data were collected with visuals in non-verbal proofs of the Pythagorean theorem given by Garfield and Hardy. Content analysis was used in the analysis of the data. The findings obtained showed that the visuals in the non-verbal proof made by Garfield and Hardy showed that they were more familiar with the one in Garfield's proof and correlated more with the Pythagorean theorem. In addition, although 19 of the 20 mathematics teachers who participated in the study stated that they had seen the visual in *the non-verbal proof made by Garfield before, 8 teachers stated that it could be related to the Pythagorean theorem, and only 3 of these teachers explained how this relationship was. Only one teacher expressed both the Pythagorean theorem and how to find it.*

Keywords: *Proof, Visualization, Non-Verbal Proofs, Mathematics Teacher, The Pythagorean Theorem*

GİRİŞ

İspatın öğretimi, öğrencilere kazandırdıkları, zorluklar matematik eğitimindeki araştırmaların konusu olmuştur ve olmaya da devam edecektir. İspatın farklı tanımları yapılmaktadır. İspat, bir ifadenin doğruluğu ile ilgili deliller (Rodd, 2000, s. 225), geçerliği önceden ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisi (Morash, 1987, s. 149), bir dizi geçerli sonuçlar (Hanna & Sidoli, 2007, s.75), tanımlar ve aksiyomlarla fikirlerin açıklık kazandığı final aşaması (Hanna, 1991, s. 55), muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmek (Almeida, 1996, s. 660), bir dizi mantıksal hükümlerle önermenin doğru ya da yanlış olduğunu gösterme (Konyalıoğlu, 2015, s. 43) şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tanımlardan da görüldüğü gibi ispatın farklı yönlerine vurgu yapılmaktadır. Hanna'ya (2000, s. 8) göre ispat bir iddianın doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermeyi amaçlamaktan çok niçin doğru ya da niçin yanlış olduğunu göstermeyi amaçlamaktadır.

Matematiksel düşünmenin bir alt boyutu olduğundan da matematik eğitimcileri öğrencilerin ispat becerilerini geliştirmenin matematiksel düşünme becerisini de geliştireceğine vurgu yapmaktadırlar. Bunun yansıması olarak da akıl yürütme, muhakeme yapabilme ve ispat hem Türkiye'de hem de yurt dışında matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında yer almaktadır. Gelişen teknoloji ve araştırmalar doğrultusunda Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu (2014) ifade ettiği gibi *"artık fikirlerin anlaşılması ve keşfedilmesi gereken yeni bir dünyası vardır ve bu dünyaya girmek için matematiksel ispatın kullanılması gerekmektedir"* (s. 234). Bu yaklaşım ise ispata yüklenen önemin daha da artacağını göstergesidir.

Gerek yurt içinde gerekse yurt dışındaki yapılan araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin (Hawro, 2007; Özer & Arıkan, 2002; Uğurel & Moralı, 2010; Bülbül & Urhan, 2016; Şimşek, Şimşek, & Dündar, 2013; Weber, 2001), öğretmen adaylarının (Gökkurt, Soylu & Şahin, 2014; Öçal & Güler, 2010; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Ünveren, 2010), ve hatta öğretmenlerin (Bayazıt, 2017; Knuth, 2002) ispat yapmakta veya ispatı anlamada zorluk yaşadıkları görülmektedir. Bu zorlukların neler olduğuna, nasıl üstesinden gelinebileceğine sınıf içinde ne tür uygulamalar yapılabileceğine yönelik birçok araştırma yapılmasına rağmen halen yapılmaya devam edilmekte, alternatif yollar önerilmekte ve sonuçları sunulmaktadır. Öğrencilerin bireysel farklılıkları olmasına rağmen genellikle ispatlar öğrencilere değişmez ve kesin formatta sunulmaktadır (Lockhart, 2009, s. 18). Hâlbuki öğrenme ve öğretme sürecinin anlamlı olabilmesi için öğrencilerin ilgi, öğrenme ihtiyacı, hazır bulunuşluk düzeyi, öğrenme stili gibi bireysel farklılıklarının tespit edilmesi ve öğretim yöntem ve teknikleri belirlenirken bu farklılıkların göz önünde bulundurulması gerekmektedir (MEB, 2018). Bu bağlamda düşünüldüğünde öğrencilere kullanabilecekleri ***alternatif ispat yöntemlerinin*** sunulması, hem zengin öğrenme ortamları oluşturmuş olacak hem de öğrenciye farklı bakış açıları kazandırılmış olacaktır. Bell (2011), matematiksel bir ispatın görselinin oluşturulmasının ispatın daha iyi anlamlandırılmasına neden olacağına vurgu yapmaktadır. Nitekim öğrencilerin ispat becerisini geliştirmenin yollarından birisi de ***görselleştirme*** yapmaktır.

Görselleştirmenin amacı resimler, imajlar ve diyagramlar kullanılarak matematiksel düşünmeyi geliştirmede yardımcı olmaktır (Yılmaz & Argün, 2013, s.565). Diyagramlar ve görsel sunumlar matematiğin her alanında kullanılmıştır (Hanna & Sidoli, 2007). Bundan dolayı görselleştirmenin matematiği anlamada, matematik yapmada, matematiğin öğretiminde hatta ispat sürecinde önemli olduğu kabul edilmektedir. Öğrencilerin hatta öğretmenlerin ispat sürecine yaklaşımları, zorluklar, hepsi göz önüne alındığında sözsüz ispatların (veya görsel ispatların, diyagramların) matematik öğretiminde kullanılmasına yapılan vurgular giderek artmaktadır. Bunun yansıması olarak da özellikle son yıllarda yapılan araştırmalarda, öğretim programlarında, ders kitaplarında genel anlamı ile matematiği öğrenme ve öğretme sürecinde ***görsel ispat veya sözsüz ispatlara*** ilgi hızla artmaktadır. Görselleştirme; zihinden geometri yapma, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturma ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı, şekillerin farklı perspektiften nasıl görüleceğini, içermektedir (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2019). Ayrıca görselleştirme, görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, üretme, iletişim kurma, belgeleme ve yansıtma kabiliyetlerini içermekle (Hershkowitz, 1990) beraber matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak veya ikna etmek için bir araç olup şekil veya diğer görsel sunumları kullanmaktır (Hanna & Sidoli, 2007). Bardelle (2009) öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebinin öğrencilerin öğretim hayatlarında görselleştirmeyle çok az karşılaşmalarına bağlamaktadır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri ise derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkün olmaktadır (Rodd, 2000). Alsina ve Nelsen (2010) matematiksel başarı için görselleştirme yeteneğinin gerekliliğinden bahsetmektedir. O halde öğretmenleri, öğretmen adaylarını hatta öğrencileri görsel etkinliklerle daha fazla karşı karşıya getirmek önemlidir.

Sözsüz ispatlar son yıllarda bulunmuş yeni bir yaklaşım değildir (Alsina & Nelsen, 2006; 2009; 2010; 2011; Bell, 2011) tarihsel süreci oldukça eskiye dayanmaktadır. Tümdengelimsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamanın resimlerin okunmasıyla mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Sözsüz ispatlar söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Ayrıca sözsüz ispat, özel bir matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu hatta matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler (Alsina & Nelsen, 2010) ve geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermeyen ispatlardır (Gierdien, 2007). Yani sözsüz ispat, kelimeler olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel çizimlerdir (Bell, 2011). Sözsüz ispatlar ilköğretimden üniversiteye kadar her kademede matematikte önemli roller üstlenmektedir (Alsina & Nelsen, 2010). Sözsüz ispatları anlamak için yapılan tartışmalar, açıklamalar, farklı matematiksel fikirler arasında bağlantılar bulmayı dolayısıyla da kavramayı geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar faydalı olarak görülmesine rağmen çok yurtiçinde fazla çalışma (Polat, 2018; Ülker, 2018; Gelişen, 2016) bulunmamaktadır. Yapılan çalışmalar öğrencilerle veya öğretmen adayları ile yapılmıştır, öğretmenlerle yapılan çalışmaya rastlanmamıştır. Sözsüz ispatlarda gelenekselden farklı olarak Gierdien (2007) ifade ettiği gibi öğrenciden teorem veya ifadenin doğruluğunu göstermesi yerine ispatı açıklaması istenmektedir. Sözsüz ispatların açıklanması için öğrencilerin öğretim sürecinde karşılaşmış olması gerekmektedir. Bu açıdan bakıldığında öğretmenlerin karşılaşmış olmaları beklenmektedir. Buradan hareketle bu çalışma da öğretmenlerin sözsüz ispatları nasıl açıklayacaklarına ve nasıl ispat yapacaklarına odaklanılmıştır.

Matematikte hemen her konu ile ilgili sözsüz ispat bulunmaktadır. ***Pisagor teoremi*** geometrinin hatta matematiğin en önde gelen, en çok ispatı yapılan ve herkes tarafından bilinen teoremlerinden birisidir. Bu nedenle bu çalışmada matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerini Pisagor teoremi bağlamında incelemek amaçlanmıştır. İspatın matematik öğretimindeki önemi, öğrencilerin zorlukları göz önüne alındığında çalışmanın ana odak noktası ispat becerisi olmaktadır. Görselleştirmenin önemi ve literatürdeki vurgularda göz önüne alındığında sözsüz ispatlar, ispat geliştirmenin alternatif ve etkili bir yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle Türkiye'de çok fazla çalışma olmaması hatta öğretmenlerle bir çalışma olmaması bu çalışmanın alana katkılarını önemli hale getirmektedir. İspat, görselleştirme ve sözsüz ispat ile ilgili olan çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerle ile ilgili çalışmanın neredeyse yok derecede az olduğu görülmektedir. Bu çalışmanın öğretmenlerle yürütülmüş olması bu anlamda bu eksikliği gidermeye yardımcı olacaktır. Pisagor teoreminin ispatlarını ele alan araştırma makaleleri (Chambers,1999; Givental, 2006; Aslaner &İlhan;

2018; Saikia, 2015) ve kitaplar (Loomis,1968; Veljan, 2000; Maor, 2007; Ferguson, 2008; ; Sparks, 2008; Pickover, 2009; Martinez, 2012; Ferguson; 2008; Strathern,1997) halen yayımlanmaya devam etmektedir. Literatür incelendiğinde matematik öğretmenlerinin Pisagor teoreminin ispatına nasıl öğretilebileceğini ve Pisagor teoreminin farklı ülkelerde nasıl öğretildiğine ilişkin araştırmalar özetleyen makaleler (Crawford, 2001; Huang &Leung, 2002; Güner, 2018; Lipowsky, Rakoczy, Pauli, Drollinger-Vetter, Klieme & Reusser, 2009; Yang, 2009; Flores, 1993; 2000) olduğu görülmektedir. Fakat sözsüz ispat becerilerinin incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu bağlamda sözsüz ispat ile Pisagor teoreminin ele alınışı bakımından ilgili literatüre katkı sağlayacaktır.

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Nitel yöntemler metin ve imgesel verilere dayanır ve veri analizinde özgün adımlara sahiptir. İnsan davranışı ancak esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılabilir ve bu yaklaşımda araştırmaya katılan bireylerin görüşleri ve deneyimleri büyük önem taşımaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2013, s. 41). Bu nedenle bu çalışmada bireylerin görüşlerine ve deneyimlerine başvurulacağından dolayı nitel araştırma yöntemi tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışma grubu gönüllü olan 20 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Çalışmaya katılan tüm öğretmenlere Ö1, Ö2, …, Ö20 şeklinde kodlama yapılmıştır. Bu öğretmenlerle ilgili demografik bilgiler Tablo 1'de özetlenmiştir.

Tablo 1. Çalışmaya katılan öğretmenlerin demografik bilgileri

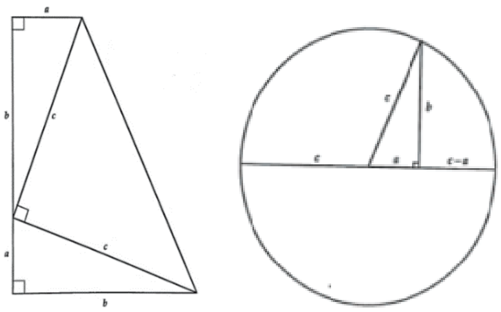
Kod	Üniversite	**Fakülte**	**Yıl**	**Kademe**
Ö1	Ankara Üniversitesi	Fen	10	Lise
Ö2	Ankara Üniversitesi	Fen	9	Lise
Ö3	İstanbul Üniversitesi	Fen	7	Lise
Ö4	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	14	5 yıl ortaokul- 9 yıl lise
Ö5	Anadolu Üniversitesi	Fen Edebiyat	21	Lise
Ö6	Gazi üniversitesi	Eğitim	5	Ortaokul
Ö7	Gazi üniversitesi	Eğitim	23	Lise
Ö8	Anakara Üniversitesi	Fen	20	Lise
Ö9	Ankara üniversitesi	Fen	24	Lise
Ö10	19 Mayıs Üniversitesi	Fen	30	Lise
Ö11	Gazi Üniversitesi	Eğitim	24	Lise
Ö12	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	18	Lise
Ö13	ODTÜ	Fen	24	Lise
Ö14	Gazi Üniversitesi	Eğitim	9	Lise
Ö15	Gazi Üniversitesi	Eğitim	20	Lise
Ö16	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	26	Lise

Ö17	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	24	Lise
Ö18	Ankara Üniversitesi	Fen	9	Lise
Ö19	Ankara Üniversitesi	Fen	15	Lise
Ö20	İnönü Üniversitesi	Fen	22	Lise

Tablo 1'den de görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğretmenler farklı üniversitelerden mezunlardır. Bunun yanı sıra 5 öğretmen Eğitim Fakültesi 15 öğretmen Fen Fakültesi mezunudur. MEB'e bağlı okullarda 5 ile 30 yıl arasında görev yapmaktadırlar.

Veri Toplama Araçlarında Kullanılan Sözsüz İspatlar ve Veri Toplama Süreci

Veriler pilot çalışması yapılmış uzman görüşleri ile son haline getirilmiş olan açık uçlu sorulardan oluşan veri toplama aracı ile toplanmıştır. Veri toplama aracında ikisi Pisagor teoremi diğerleri farklı matematiksel teoremlere/ ifadelere yönelik olan 10 tane sözsüz ispatın sadece görseli verilmiştir. Bu sayede görselin ne çağrıştırdığı, görsel ile kural arasında ilişkiyi kurup kuramayacakları ya da nasıl bir ilişki kuracakları incelemek hedeflenmiştir. Bu görsellerden iki tanesi çalışmanın bulgularını oluşturan (Şekil 1) Garfield ve Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarıdır. Ayrıca veri toplama aracında her bir sözsüz ispat ile birlikte iki tane de soru yöneltilmiştir. Bu sorulardan birincisi "*1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (...)/ Evet (...) Nerede ...*" ve ikincisi de *"Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız*" şeklindedir. Bu sorulardan birincisinin amacı görsel ile daha önce karşılaşıp karşılaşmadıklarını belirlemek diğeri ise görsel ile ilgili ne düşündüklerini, hangi kavramları ya da kuralları çağrıştırdığını tespit etmektir. Bu aşamada veriler yazılı olarak toplanmıştır. Öğretmenler ile önceden randevulaşılmıştır. Belirlenen gün ve saatte katılımcıya veri toplama aracı verilmiş ve süreç boyunca hiçbir müdahale yapılmamıştır. Katılımcı öğretmen veri toplama aracını teslim ettikten sonra yaklaşık 15 dk sonra oturum sonlandırılmıştır. Veriler bireysel toplanmıştır.



Şekil 1. Veri toplamak için kullanılan sözsüz ispatlardaki görseller

Şekil 1'den görüldüğü gibi veri toplamak amacı ile kullanılan bu ispatlardan birincisi yamuk ikincisi çember ile yapılan ispatlardır. *Garfield Tarafından Yapılan Sözsüz* İspat 1876 da yapılmış ve Nelsen'ın (1993; s.6, 7) kitabında da yer verilmiş olan Pisagor teoremine yönelik sözsüz ispattır. Bu ispatta yamuğun alanı ile verilen üç dik üçgenin alanları arasında ilişki kurulması beklenmektedir. *Hardy'nin Pisagor teoreminin sözsüz ispatı* 1988 yılında "*Mathematical Intelligencer*" adlı dergide basılmıştır.

Verilerin Analizi

20 matematik öğretmeninden toplanan veriler öncelikle bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra benzerliklerine göre gruplandırılarak içerik analizi yapılmıştır. Her bir sözsüz ispata yönelik kod ve temalar elde edilmiştir. Elde edilen kod ve temalar alanda uzman iki matematik eğitimcisi tarafından incelenmiş ve öneriler doğrultusunda son haline getirilmiştir. Bu çalışmada araştırmanın öneri aşamasından veri analizine ve rapor edilmesine kadar tüm süreçlerde bir danışman gözetiminde yürütülmüştür. Bulgular alanda uzman kişilere

sunulmuş görüşler doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Çalışmada bulgular direk alıntılar yapılarak sunulmuştur.

BULGULAR ve YORUM

Garfield Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin İspatından Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

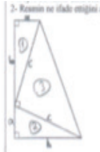
Çalışmaya katılan öğretmenlerin Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görsel ile daha önceden karşılaşıp karşılaşmadıklarına ve karşılaştılarsa nerede olduğuna yönelik sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2. Öğretmenlerin Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli nerede gördüklerine ilişkin elde edilen bulgular

Kod	Kategori	Örnek cevaplar	f	∑f
Evet	Kitap	Üniversite hazırlık soru bankası (Ö1) Ders kitapları (Ö19,Ö16, Ö2, Ö5) Matematik test kitapları (Ö6, Ö7, Ö8) (Ö4) Kitaplarda (Ö9, Ö12, Ö17, Ö10) Konu anlatımı ve sorularda (Ö15)	14	19
	Ders	Matematik derslerinde (Ö20) Derslerde (Ö11)	2	
	Öğrenim sırasında	İlkokul (Ö3) Ortaokul, lise üniversite (Ö13)	2	
	Diğer	Üçgenlerde (Ö18)	1	
Hayır		Ö14	1	1

Tablo 2'den görüldüğü gibi çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi verilen görseli kitaplarda (Üniversite hazırlık soru bankası, Geometri test kitabı, ders kitabı, Matematik test kitapları), İlkokulda veya derslerde gördüklerini ifade etmişlerdir. Yalnızca Ö14 görseli önceden görmediğini ifade etmiştir. Görselin ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 3'de özetlenmiştir.

Tablo 3. Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli açıklamalarından elde edilen bulgular

Tema	Kod	Örnek cevap	f	∑f
Boş	Cevap yok	(Ö20)	1	1
Pisagor teoremi	Dik yamuk içerisindeki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı	Dik yamuk içerisindeki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı (Ö1)	1	8
	Şekli açıklama, üçgenlerin alanı toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagora ulaşılır	Bir yamuk 2 tane eş dik üçgen, 1 tane ikizkenar dik üçgene bölünmüştür. 3 üçgenin alanları toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan pisagor teoremine ulaşılır. (Ö6)	1	
	Eşlik benzerlik, pisagor teoremi	Üçgenlerde Eşlik-Benzerlik Konusu - Ders Ki Üçgenlerde Pisagor Bağıntısı ile ilgili soru tiplerinde rastladığımız bir resim. (Ö5, Ö2)	2	
	Dik üçgende pisagor, kenar uzunlukları hipotenüs	Dik üçgende pisagor bağıntısı, kenar uzunlukları, hipotenüs Dik yamuk (Ö10)	1	
	Benzerlik,Hipotenüs eşit ise bu üçgenler eşittir İkizkenar üçgen olduğunu ifade etme	2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız  Dik yamuk, Dik üçgen, Benzerlik, 1 ve 2 nolu üçgenlerde hipotenüsler eşitse bu üçgenler eştir ve Dolayısıyla 3 nolu üçgen ikizkenar üçgen olur. (Ö12)	1	
	Yamuğun alanı üçgenlerin alanı toplamına eşit	Yamuk alanı üçgenlerin alanları toplamına eşittir. (Ö7)	1	
	Parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme	Bu resmi daha önce soru bankalarında gördüm. Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını etme ile ilgili sorular oluşturulabilir. Ayrıca şekil kareye tamamlatılarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir. (Ö4)	1	
Şekile odaklanma	Dik yamuk,dik üçgen Eş üçgenler	Bir geometrik şekil. Dik yamuk Dik yamuk içerisinde bir dik üçgen (Ö9,Ö13,Ö17,Ö3,Ö18)	5	5
Benzerlik	Benzerlik	Benzerlik	1	4
	Benzerlik,Dik yamuk Dik üçgen	Dik yamuk Dik üçgen Benzerlik (Ö11, Ö15, Ö8)	2	
	Benzerlik,Yamuk,yamukta alan	Yamuk konusunda → Benzerlik, yamukta alan vs. (Ö14)	1	
Bağlantı	Dik üçgenle ilgili bağlantılar	Dik üçgen ile İlgili bağıntılar (Ö16, Ö19)	2	2

Tablo 3'ten görüldüğü gibi 1 matematik öğretmeni (Ö20) hiçbir cevap vermezken yalnızca 6 matematik öğretmeni Pisagor teoremi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Bu 6 öğretmen den yalnızca bir tanesi "Üçgenlerin alanı toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagora ulaşılır" şeklinde açıklama yapmıştır. Diğer öğretmenler yalnızca Pisagor teoremi yazmış fakat nasıl elde edileceği ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Bunun yanı sıra bu 6 öğretmen Pisagor teoremine ek olarak da üçgenlerde eşlik benzerlik gibi ifadeler yazmışlardır. 2 öğretmen ise (Ö7 ve Ö4) alanlardan yola çıkarak Pisagor tereominin nasıl elde edilebileceğini açıklamış ama Pisagor teoremi diye ifade etmemiştir. Bu öğretmenler yamuğun alanını üçgenlerin alanları toplamına eşitleğdiğinde pisagor teoremini elde edileceği düşünüldüğü için bu iki öğretmenin cevabı da Pisagor kategorisi altına alınmıştır. Özetlemek gerekirse 8 öğretmen pisagor teoremi olduğunu ifade ederken yalnızca 3 öğretmen açıklama yapmışlardır. 5 matematik öğretmeni, yalnızca görselde verilen geometrik şekillere odaklanmışlardır. Bu öğretmenlerden 3 tanesi sadece dik yamuk derken 2 tanesi dik yamukla birlikte dik üçgen ve eş üçgenleride ifade etmiştir. 4 öğretmen ise benzerlik ifade etmiştir. Bu öğretmenlerden 1 tanesi yalnızca benzerlik yazarken 2 tanesi benzerliğe ek olarak dik yamuk dik üçgen eş üçgen ifade etmişken bir tanesi ise benzerliğe ek olarak Yamuk ve yamukta alan ifade etmiştir. 2 öğretmen ise dik üçgenle ilgili bağlantıları ifade etmiştir. Özellikle bu iki öğretmen ile farklı zaman ve mekanda veri toplanmasına rağmen aynı kelimeleri ifade etmiş olmaları dikkat çekmektedir. 1 öğretmen ise yamuğun alanına ek olarak eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğunu bulma ve kenarlar arasındaki uzunluk ilişkisini ifade ettiği görrülmektedir. Diğer önemli bir bulgu ise Tablo 3 ve Tablo 4 birlikte incelendiğinde çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen yalnızca 4 öğretmen (Ö1, Ö4, Ö6, Ö2, Ö5, Ö10, Ö12, Ö7) pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş ama yalnızca 3 tanesi (Ö6, Ö7, Ö4) bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamıştır.

Hardy Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin İspatından Elde Edilen Bulgular

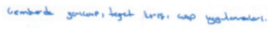
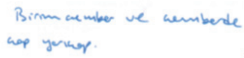
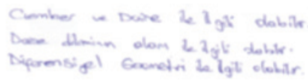
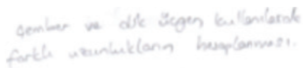
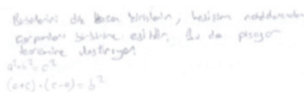
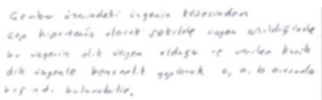
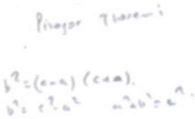
Çalışmaya katılan öğretmenlerin bu görselle daha önceden karşılaşıp karşılaşmadıklarına ve karşılaştılarsa da nerede olduğuna yönelik sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmenlerin görseli nerede gördüklerine ilişkin elde edilen bulgular

Kod	Kategori	Örnek cevaplar	f	∑f
Evet	Kitap	Matematik kitabında (Ö2, Ö3)	9	12
		Geometri kitaplarında (Ö5)		
		Kitaplarda (Ö11, Ö12, Ö10, Ö17)		
		Ders kitabı (Ö8, Ö19)		
	Ders	Matematik dersinde (Ö20)	1	
	Geometri	Çember ve özellikleri (Ö15)	2	
		Geometride (Ö18)		
Hayır		Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16	8	8

Tablo 4'ten görüldüğü gibi çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden verilen görseli kitaplarda (matematik, geometri, ders kitabı gibi), matematik derslerinde veya geometride gördüklerini ifade etmişlerdir. Diğer taraftan Tablo 3'ten görüldüğü gibi 8 matematik öğretmeni ise daha önce görmediklerini ifade etmiştir. Görselin ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 5'da özetlenmiştir.

Tablo 5. Hardy tarafından yapılan ispatın görselinden elde edilen bulgular

Kod	Kategori	Örnek cevap	f	∑f
Cevap yok	Cevap yok	Ö1,Ö20	2	2
Çember	Çemberin özellikleri	 Ö2, Ö5, Ö15	3	13
	Çemberde teğet ,yarıçap, kiriş	 Ö3	1	
		 Ö13	1	
	Çemberin analitik incelenmesi	 Ö11	1	
	Çemberde uzunluk	 Ö12, Ö17, Ö19, Ö18	4	
	Çember ve daire	 Ö16	1	
	Çember, dik üçgen	 Ö9, Ö10	2	
Pisagor teoremi	Pisagor	 Ö7	1	5
		 Ö8	1	
		 Ö6	1	
		 Ö4	1	
		 Ö14	1	

Tablo 5'den görüldüğü gibi 2 matematik öğretmeni (Ö1, Ö20) cevap yok kategorisinde değerlendirilmiştir. Bunlardan biri tam olarak ifade edemiyorum yanıtı vermiştir. 10 matematik öğretmeni ise çember ile ilgili olabileceğini ifade etmişlerdir. Tablo 5'ten görüldüğü gibi bu öğretmenlerin cevapları incelendiğinde çemberin özellikleri (Ö2, Ö5, Ö15), çemberde teğet, yarıçap, kiriş (Ö3, Ö13), çemberin analitik incelenmesi (Ö11), çemberde uzunluk (Ö12, Ö17, Ö18, Ö19) şeklinde ifade ettikleri görülmektedir. Bir öğretmen ise (Ö16) daire diliminin alanı veya diferansiyel geometri ile ilgili olabileceğini ifade etmiştir. İki öğretmen (Ö10, Ö9) ise çember ve dik üçgen ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Yalnızca 5 öğretmen (Ö7, Ö8, Ö6, Ö4, Ö14) Pisagor teoremi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Ö8 sadece Pisagor yazmış nasıl elde edilebileceğine dair hiçbir açıklama yapmamıştır. Diğer önemli bir bulgu ise çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 12'si görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen yalnızca 5 öğretmen (Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö14) Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiştir. Bu öğretmenlerden Ö4, Ö6, Ö7, Ö14 daha önce görmediğini ifade eden öğretmenlerdir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Miller (2012) ve Doyle, Kutler, Miller ve Schueller (2014) ifade ettiği gibi Pisagor teoreminin Zhou Bi Suan Jing tarafından verilen sözsüz ispatındaki görsele çoğu matematikçi aşinadır. Fakat bu görselden başka birçok görsel daha bulunmaktadır. Bu çalışmanın kapsamında Pisagor teoreminin Garfield ve Hardy tarafından verilen sözsüz ispatlarındaki görsellerden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Çalışmaya katılan 19 matematik öğretmeni Pisagor teoreminin Garfield tarafından yapılmış olan sözsüz ispatındaki görseli kitaplarda (üniversite hazırlık soru bankası, geometri test kitabı, ders kitabı, matematik test kitapları), ilkokulda veya derslerde gördüklerini ifade etmiştir. Yalnızca bir öğretmen görmediğini ifade etmiştir. Fakat Hardy tarafından yapılan ispattaki görseli ise çalışmaya katılan 12 matematik öğretmeni kitaplarda (matematik, geometri, ders kitabı gibi), matematik derslerinde veya geometride gördüklerini ifade etmişlerdir. Diğer 8 matematik öğretmeni ise daha önce görmediklerini ifade etmiştir. Her iki görsel birlikte değerlendirildiğinde Ö14 her iki görseli daha önceden görmediğini ifade eden tek öğretmendir. Ö14 eğitim fakültesinden mezun ve 9 yıllık lise matematik öğretmenidir. Pisagor teoremi ile ilişkilendiremese bile geometri derslerinde de en azından bir şekilde karşılaşmış olduğu sorular, örnekler ile benzerlik kurması beklenmiştir.

Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görselin ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplarda bir matematik öğretmeni hiçbir cevap vermezken 8 öğretmenin cevabı "*Pisagor teoremi*" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu öğretmenlerden 6 matematik öğretmeni kâğıdına "Pisagor teoremi" ile ilgili yazarken 2 öğretmen görseldeki alanlardan yola çıkarak Pisagor teoremini açıklamış ama Pisagor teoremi diye ifade etmemiştir. Bu öğretmenlerin cevabı da Pisagor teoremi kategorisi altına alınmıştır. Bu 6 öğretmenden yalnızca biri (Ö6) "Üçgenlerin alanı toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagor'a ulaşılır" şeklinde ifade etmiş ve görselden yararlanarak nasıl elde edilebileceğine yönelik açıklama yapmıştır. Yani Ö6 hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem de görsel ile nasıl elde edilebileceğini açıklamıştır. Diğer öğretmenler Pisagor teoremi yazmış fakat nasıl elde edilebileceği ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Bunun yanı sıra bu 6 öğretmen Pisagor teoremine ek olarak da üçgenlerde eşlik benzerlik, şekli açıklama ifadelerini yazmışlardır. Sonuç olarak 8 öğretmen Pisagor teoremi olduğunu ifade ederken yalnızca 3 öğretmen nasıl bulunacağı ile ilgili açıklama yapmıştır. Geriye kalan 11 matematik öğretmeni ise ya görselde verilen geometrik şekillere odaklanmışlar ya da eşlik-benzerlik demişlerdir. Özetlemek gerekirse çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen 8 öğretmen Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş bu öğretmenlerden de yalnızca 3'ü bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamıştır. Yalnızca bir öğretmen (Ö6) hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem nasıl bulunacağını ifade etmiştir. Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görselin ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplardan 5 öğretmenin cevabı "Pisagor teoremi" kategorisinde değerlendirilmiştir.

Gierdien (2007) sözsüz ispatlarda bulunan şekiller ve diyagramalar teoremi ispat etmeye nasıl başlayacağımıza ve teoremin niçin doğru olduğunu anlamamıza yardımcı olmaktadırlar. Öğrencilere farklı ispat yöntemleri öğretebilmek için öğretmenlerin farklı ispat yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmaları gerektiği söylenebilir (Polat 2018,s.150). İspat ve muhakeme becerisinin gelişimi öğretmenlere bağlıdır. Eğer öğretmen öğrenciler için geniş bir öğrenme yelpazesi sunar ve değişik ispat yöntemlerini verirlerse öğrenciler matematiği ve matematiksel düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır (Altıparmak & Öziş, 2005). Doruk (2016) ifade ettiği gibi ispata başlamadan önce başarılı bir argümantasyon süreci geçirme ispat yapma sürecinde önemlidir. Sözsüz ispat sürecinde ön öğrenmeler olarak kavramsal bilginin de önemli bir boyut olduğu ifade edilebilir. Bu bulgu Karrass (2012) geometrik bilgi düzeyi iyi olan öğretmen adaylarının sözsüz ispatları daha iyi çözebildiği önceden öğrenilmiş bilgiyi kullanmayı gerektirdiği görüşünü desteklemektir. İspatı yapma aşaması var olan bilgilerin transferi, işlem yapabilme becerisi gibi birçok değişkeni içinde bulundurmaktadır. Bu aşamada ispat yapmada başarısız olma ile ilgili çalışmaların (Bardelle, 2009; Moore, 1994) bulgularını desteklemektedir. Diğer taraftan Güner ve Topan (2016) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yapmış olduğu çalışmada Pisagor teoreminin ispatı gibi aşina oldukları ispatlarda, diğer ispatlara nazaran daha fazla geçerli ispat yazabildikleri ve bu ispata dair yaşamış oldukları deneyimler ile ispat becerileri arasında doğru orantı olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Güneş ve Tapan Broutin (2017) ise öğrencilerin adidaktik bir öğrenme ortamında Pisagor Bağıntısını oluştururken genel olarak öğretmenin otoritesine bağlı oldukları gözlenmiştir. Bu nedenle Chambers (1999) ifade ettiği gibi Pisagor Teoremini "en iyi" öğretme yönteminin öğretmenlere farklı seçenekler sunmak, alternatif yaklaşımlar üzerinde düşünmeye teşvik etmek ve öğretmenleri Pisagor Teoremini öğretme bağlamında ispat konusunu düşünmeye zorlamak olduğunu ifade etmiştir. Nitekim öğretmenler eğer pisagor teoreminin uzunluk veya alan yardımıylamı verilmesi konusunda derin anlayış sahibi olabilirlerse hem nasıl ispatlanacağı hem de nasıl doğrulanacağı konusunda rehberlik edebileceklerdir. Üstbilişsel olarak da kendi ispat süreçlerinin farkında olurlarsa, öğrencilerin zorluklarının üstesinden nasıl gelebilecekleri konusunda anlayışa sahip olabileceklerdir. Sözsüz ispatlarda, ispat yapan neyin önemli olup olmadığını, ilişkileri neye göre sıralaması gerektiğini saptamak durumundadır (Borwein & Jörgenson, 2002). Dolayısıyla bu ispatların derslerde kullanılması, öğrenciye ispat becerisinin yanında muhakeme yapabilme, sonuca ulaşabilmesi için değerlendirme ve matematiksel bilgiyi kullanabilme olanağı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışma yalnızca Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispatlardaki görsellerle ve 20 matematik öğretmeni ile sınırlıdır. İleride yapılacak olan çalışmalarda farklı konulardaki sözsüz ispatlar ile de benzer çalışmalar yapılabilir. Ayrıca matematik öğretmenleri ile yapılan bu çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının ve öğrencilerin sözsüz ispat yapma süreçleri karşılaştırılabilir benzerlik ve farklılıkları belirlenebilir. Bu çalışmada öğretmenlerden herhangi bir sözsüz ispat oluşturmaları beklenmemiştir. Öğretmen, öğretmen adayları ve öğrencilerin kendilerinin oluşturabileceği sözsüz ispatlar ile ilgili çalışmalar yapılabilir.

Bilgilendirme / Acknowledgement:

1. Bu çalışma ikinci yazarın, birinci yazar danışmanlığında yaptığı yüksek lisans çalışmasından üretilmiştir.
2. Çalışmaya katkılarından dolayı matematik öğretmenlerine teşekkür ederiz.
3. Makale yüksek lisans tez çalışmasında üretildiği için etik kurulu izni ve/veya yasal/özel izin alınmasını gerektiren bir durum yoktur.
4. Bu makalede araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*(5), 659-665. doi:10.1080/0020739960270504.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics.* United States of America: Mathematical Association of America. doi:10.5948/UPO9781614441007

Alsina, C., & Nelsen, R. (2009). *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities.* Mathematical Association of America .

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3*(1), 118-127.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images. Washington, DC: Mathematical Association of America

Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi.* Ankara: Gazi Kitapevi.

Aslaner, R. &İlhan, A (2018). Kare İçin İfade Edilen Pisagor Bağıntısının Diğer Düzgün Çokgenlere ve Daireye Uygulanması. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi,* 45, 55-67

Bardelle, C. (2009). Visual Proofs: An Experiment. V. Durand-Guerrier et a (Dü.), *Annual meeting CERME6* içinde (s. 251-260). Lyon: INRP. http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf adresinden alınmıştır

Bayazıt, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 12*(14), s. 19-40. doi:10.7827/TurkishStudies.11589

Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematics Teachers, 104*(9), 690-695.

Borwein, P., & Jörgenson, L. (2002). Visible structures in number theory. The American Mathematical Monthly, 108(5), 897-910.

Bülbül, A., & Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt süreçleri Arasındaki İlişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 0-0. doi:10.17522/nefefmed.00387

Chambers, P. (1999). Teaching Pythagoras' theorem. Still hazy after all these years. *Mathematics in School*, 28(4), 22-24.

Crawford, D. (2001). Pythagoras' theorem – more than just a square rule. *Mathematics in School*, 30(1), 14-17.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı, Erzurum.

Doyle, T., Kutler, L., Miller, R., & Schueller, A. (2014). Proofs Without Words and Beyond. *Mathematical Association of America*. doi:10.4169/convergence20140801

Ferguson, K. (2008). *Pythagoras. His lives and the legacy of a rational universe*. New York: Walker Publishing Company.

Flores, A. (1993). Pythagoras Meets Van Hiele. *School Science and Mathematics*. 93(3)

Flores, A. (2000). Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra. F. Hitt (Dü.), *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education; Reprensentation and Mathematics Visualization* içinde, (s. 9-29).

Gelişen, A. (2016). *9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deney.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı.

Gierdien, F. M. (2007). From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in secondary mathematics. *Pythagoras, 65*, 53-62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92

Givental, A. (2006). The Pythagorean theorem: What is it about?. *The American Mathematical Monthly,* 113(3), 261-265.

Gökkurt, B., Soylu, Y., & Şahin, Ö. (2014, December). Analysis of the mathematical proof skills of students of science education. *Educational Research Quarterly, 38*(2), 3-22.

Güner, N. (2018). Pisagor Teoremini Nasıl Öğretirsiniz: Ders Planlarının Analizi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*. 51(1), 119-141. DOI:10.30964/auebfd.405041

Güner, P., & Topan, B. (2016, Aralık). Prospective Elementary Mathematics Teachers' Abilities of Using Geometric Proofs in Teaching of Triangle. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 10*(2), 210-242.

Güneş, K, & Tapan Broutin, M. (2017). 8. Sınıf Öğrencilerine Pisagor Bağıntısının Adidaktik Bir Ortamda Öğretimi. *Academy Journal of Educational Sciences* , 1 (1) , 11-22 . DOI: 10.31805/acjes.340364

Hanna, G. (1991). Research on mathematical proof. (D. Tall, Dü.) *Advanced mathematical thinking*, 54-61.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007, January 24). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education, 39*(1-2), 73-78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0

Hawro, J. (2007). University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. *CERME-5*, (s. 2290-2299). http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG14.pdf#page=72 adresinden alınmıştır

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. (P. Nesher, & J. Kilpatrick, Dü) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95. doi:10.1017/CBO9781139013499.006

Huang, R.&Leung, F. K. S. (2002). How Pythagoras' theorem is taught in Czech Republic, Hong Kong and Shanghai: A case study. *ZDM Mathematics Education*, 34(6), 268-277.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 31*(1), 53-60. doi:10.1080/002073900287381

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers.*Unpublished Doctoral Thesis , Columbia University, Graduate School of Arts and Sciences. doi:10.7916/D8PK0P5M

Knuth, E. J. (2002, November). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405. http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/articles/Knuth(2002).pdf adresinden alındı

Konyalıoğlu, A. C. (2015). *Matematik alan Eğitimi Test Kitabı Konu Özeti ve Çözümlü.* Erzurum: Ertual Akademi.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean theorem. Learning and Instruction, 19, 527-537. doi:10.1016/j.learninstruc.2008.11.001

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament.* https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf adresinden alınmıştır.

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of 'Proofs'*, 2nd edn. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Martinez, A. A. (2012). *The cult of Pythagoras: Math and myths*. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem. A 4,000 year history*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Miller, R. L. (2012). *On Proofs Without Words.* https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf adresinden alınmıştır.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educ Stud Math* **27,** 249–266 https://doi.org/10.1007/BF01273731

Moralı S, Uğurel I., Türnüklü E. & Yeşildere S. (2006, Mart). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures.* New York: Random House, Inc.

Öçal, M. F. & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 9*, 318-323. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.157

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. *5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Konferansı.* Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi.

Pickover, C. A. (2009). *The math book. From Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics.* New York: Sterling.

Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Erzurum.

Rodd, M. M. (2000). On Mathematical Warrants: Proof Does Not Always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Proof. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(3), 221-244. doi:10.1207/S15327833MTL0203_4

Saikia, M. P. (2015). The Pythagoras theorem. *Asia Pac. Math. Newsl.* 5(2), 5–8.

Sparks, J.C. (2008) *The Pythagorean Theorem*. Published by Author House 1663 Liberty Drive, Suite 200 Bloomington, Indiana 47403

Strathern, P. (1997). *Pythagoras and his theorem*. London: Arrow Books.

Şimşek, E., Şimşek, A.& Dündar, S. (2013, Kasım). Lise 12. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreçlerinin İncelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi,* *2*(4), 43-47.

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıfiçi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 135-154.

Ülker, E. (2018, Ocak). *Ortaokul İspata Giriş: Gerçekçi Matematik Eğitimi Çerçevesinde Sözsüz İspatların Kullanımı.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Tutumlarının Matematiksel Modelleme Sürecinde İncelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretimnm Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi. Balıkesir: Balıkesir Üniversitesi.

Veljan, D. (2000). The 2,500-year-old Pythagorean theorem. *Mathematics Magazine*, 73(4), 259-272.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2019). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim* (7th b.). (S. Durmuş, Dü.) Nobel Akademik Yayıncılık.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119. doi:10.1023/A:1015535614355

Yang, Y. (2009). How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: a case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. *ZDM Mathematics Education*, 41, 279-296. doi: 10.1007/s11858-009-0171-y

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (Genişletilmiş 9. Baskı b.). Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013). Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergi [Hacettepe University Journal of Education], 28*(2), 564-576.

Genişletilmiş özet

Sözsüz ispatlar son yıllarda bulunmuş yeni bir yaklaşım değildir (Alsina & Nelsen, 2006; 2009; 2010; 2011; Bell, 2011) tarihsel süreci oldukça eskiye dayanmaktadır. Tümdengelimsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamanın resimlerin okunmasıyla mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Sözsüz ispatlar söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Sözsüz ispatlar ilköğretimden üniversiteye kadar her kademede matematikte önemli roller üstlenmektedir (Alsina & Nelsen, 2010). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar faydalı olarak görülmesine rağmen çok fazla çalışma (Polat, 2018; Ülker, 2018; Gelişen, 2016) bulunmamaktadır. Yapılan çalışmalar öğrencilerle veya öğretmen adayları ile yapılmıştır, öğretmenlerle yapılan çalışmaya rastlanmamıştır. Sözsüz ispatlarda gelenekselden farklı olarak Gierdien (2007) ifade ettiği gibi öğrenciden teorem veya ifadenin doğruluğunu göstermesi yerine ispatı açıklaması istenmektedir. Sözsüz ispatların açıklanması için öğrencilerin öğretim sürecinde karşılaşmış olması gerekmektedir. Bu açıdan bakıldığında öğretmenlerin karşılaşmış olmaları beklenmektedir. Buradan hareketle bu çalışma da öğretmenlerin sözsüz ispatları nasıl açıklayacaklarına ve nasıl ispat yapacaklarına odaklanılmıştır. Hemen her konu ile ilgili sözsüz ispat bulunmaktadır. ***Pisagor teoremi*** geometrinin hatta matematiğin en önde gelen, en çok ispatı yapılan ve herkes tarafından bilinen teoremlerinden birisidir. Bu nedenle bu çalışmada matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerini Pisagor teoremi bağlamında incelemek amaçlanmıştır. İspatın matematik öğretimindeki önemi, öğrencilerin zorlukları göz önüne alındığında çalışmanın ana odak noktası ispat becerisi olmaktadır. Görselleştirmenin önemi ve literatürdeki vurgularda göz önüne alındığında sözsüz ispatlar, ispat geliştirmenin alternatif ve etkili bir yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada matematiksel ifadesi verilmeyen Pisagor teoremi bağlamındaki sözsüz ispatlardaki görsellerin, matematik öğretmenlerine ne ifade ettiğini incelemek amaçlanmıştır.

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Çalışma grubu gönüllü olan 20 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. 5 öğretmen Eğitim Fakültesi 15 öğretmen Fen Fakültesi mezunudur. MEB'e bağlı okullarda 5 ile 30 yıl arasında görev yapmaktadırlar. Çalışmaya katılan tüm öğretmenlere Ö1, Ö2, …, Ö20 şeklinde kodlama yapılmıştır. Veriler Garfield ve Hardy tarafından verilen Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarındaki görseller ile toplanmıştır. Verilerin analizinde içerik analiz kullanılmıştır.

Elde edilen bulgular Garfield ve Hardy tarafından yapılan sözsüz ispattaki görsellerden Garfield'ın ispatındakine daha aşina olduklarını ve Pisagor teoremi ile daha fazla ilişkilendirdiklerini göstermiştir. Ayrıca çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi Garfield tarafından yapılan sözsüz ispattaki görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen 8 öğretmen Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş bu öğretmenlerden de yalnızca 3'ü bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamıştır. Yalnızca bir öğretmen hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem nasıl bulunacağını ifade etmiştir.

Extended summary

Verbal proofs are not a new approach found in recent years (Alsina & Nelsen, 2006; 2009; 2010; 2011; Bell, 2011), the historical process is very old. It is a form of deductive steps based on figures, diagrams and graphs. This means that understanding the proof is possible by reading the pictures. Verbal proofs are expressed as proofs that are not words, based only on diagrams, maybe numbers, letters, arrows, points and associated symbolic expressions, and whose construction is left to the reader (Bardelle, 2009). Proofs without words or non verbal proof play important roles in mathematics at all levels from primary education to university (Alsina & Nelsen, 2010). Although non-verbal proofs are seen as useful in mathematics education, there are not many studies (Polat, 2018; Ülker, 2018; Geliştirme, 2016). Studies have been conducted with students or teacher candidates, no studies with teachers have been found. In nonverbal proofs, as Gierdien (2007) stated, unlike the traditional, the student is asked to explain the proof instead of showing the correctness of the theorem or statement. In order to explain non-verbal proofs, students must have encountered them during the teaching process.

From this point of view, it is expected that teachers have met. From this point of view, this study focused on how teachers explain nonverbal proofs and how they make proofs. There is no verbal proof on almost every subject. Pythagoras theorem is one of the foremost, most proven and known theorems of geometry and even mathematics. Therefore, in this study, it is aimed to examine the non-verbal proof skills of mathematics teachers in the context of the Pythagorean theorem. Considering the importance of proof in mathematics teaching and the difficulties of students, the main focus of the study is the proof skill. Considering the importance of visualization and the emphasis in the literature, nonverbal proofs emerge as an alternative and effective method of developing proof. In this study, it is aimed to examine what the visuals in non-verbal proofs in the context of the Pythagorean theorem, whose mathematical expression is not given, mean to mathematics teachers.

Case study, one of the qualitative research methods, was used in the study. The working group consists of 20 volunteer mathematics teachers. 5 teachers from Faculty of Education 15 teachers are graduates of Science Faculty. They work in schools affiliated to the Ministry of National Education for 5 to 30 years. All teachers participating in the study were coded as Ö1, Ö2,…, Ö20. The data were collected with visuals in non-verbal proofs of the Pythagorean theorem given by Garfield and Hardy. Content analysis was used in the analysis of the data.

The findings obtained showed that the visuals in the non-verbal proof made by Garfield and Hardy showed that they were more familiar with the one in Garfield's proof and correlated more with the Pythagorean theorem. In addition, although 19 of the 20 mathematics teachers who participated in the study stated that they had seen the visual in the non-verbal proof made by Garfield before, 8 teachers stated that it could be related to the Pythagorean theorem, and only 3 of these teachers explained how this relationship was. Only one teacher expressed both the Pythagorean theorem and how to find it.