Cilt 11, Sayı 2, Sayfa 99-106, 2022 Volume 11, Issue 2, Page 99-106, 2022

Araştırma Makalesi https://doi.org/10.46810/tdfd.808519 Research Article

Türk Doğa ve Fen Dergisi
Turkish Journal of Nature and Science
www.dergipark.gov.tr/tdfd

R^3_1 Semi-Riemannian Uzayda 2-Cob Üreteç Kobordizm Örnekleri

Muhsin İNCESU[1*], Sara IŞIK[2]

[1] Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi ABD, Muş, Türkiye
[2] Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş, Türkiye
Muhsin INCESU ORCID No: 0000-0003-2515-9627
Sara ISIK ORCID No: 0000-0002-4058-3277

**Sorumlu yazar: m.incesu@alparslan.edu.tr*

(Alınış: 09.10.2020, Kabul: 31.05.2022, Online Yayınlanma: 29.06.2022)

Anahtar Kelimeler
Kobordizm, Birasyonel invaryant, Semi-Riemannian manifold, Kodaira boyutu, Regle yapı

Öz: Duggal ve Bejancu 1996 da yayınladıkları kitapta bir semi-Riemannian manifoldda lightlike (null) alt uzayın varlığını gösterdiler ve alt manifoldların geometrisi için ihtiyaç duyulan önemli bir boşluğu doldurdular. Semi-Riemannian manifoldlar için unireglelik, kodaira boyutu gibi birasyonel invaryantların yanında maximum lineer bağımsız lightlike vektörlerin sayıları olan k(U) değerlerinin de bir birasyonel invaryant olduğu vurgulanarak R^3_1 Semi-Riemannian Uzayda 2-Cob Üreteç kobordizmlere örnekler verilmiş, bunların kodaira boyutları ve k(U) invaryantları ifade edilmiştir.

The Examples of Generators of 2-cob Cobordisms in Semi-Riemannian Space R^3_1

Keywords
Cobordism, Birational invariant, Semi-Riemannian manifold, Kodaira dimension, Ruled variety

Abstract: In their book published in 1996, Duggal and Bejancu demonstrated the existence of a lightlike (null) subspace in a semi-Riemannian manifold and filled an important gap needed for the geometry of submanifolds. In addition to birational invariants such as uniruledness and kodaira dimensions for Semi-Riemannian manifolds, in this study, by emphasizing the k (U) values which are the numbers of maximum linearly independent lightlike vectors, that are a birational invariance, the examples of generators of 2- Cob cobordisms are given in Semi-Riemannian Space R(3,1). Their codaira dimensions and k (U) invariants of these examples has been expressed.

1. GİRİŞ

Uzun zamandır simplektik geometride birasyonel denkliğin uygun bir kavramının ne olduğu gerçekten açık değildi. Simplektik geometride blow-up/blow-down gibi basit birasyonel operasyonlar biliniyordu[1,2]. Fakat esnek simplektik kategoride genel birasyonel fonksiyon kavramının açık bir genellemesi yoktu. Bu durum son zamanlarda zayıf faktörizasyon teoreminin geliştirilmesiyle büyük ölçüde değişmiştir [3] ki bu teoreme göre projektif manifoldlar arasındaki herhangi bir birasyonel fonksiyon blow-up ve blow-down ların (yukarı ve aşağı etkilerin) bir dizisi halinde ayrıştırılabilir [4].

Birasyonel geometrinin en temel kavramı unireglelikt ir. Cebiro-geometrik bir şekilde bunun anlamı bir manifoldun cebirsel eğrilerle kaplanabilmesi demektir. Dikkat etmek gerekir ki, cebirsel geometrideki tanımı basit bir şekilde taklit ederek bu kavramı tanımlamak anlamsızdır [5] ve her noktadan geçen sabit sınıflarda bir simplektik kürenin olması da gerekir. Aksi takdirde her basit bağlantılı manifold uniregle olmalıdır [4].

Diğer yandan Kollar- Ruan'ın teoremiyle [6,7] bir uniregle projektif manifold, bir nokta arakesitiyle, sıfırdan farklı bir cins sıfır GW-invaryanta sahiptir. Bu nedenle, eğer bir nokta kısıtlaması dahil ederek sıfırdan farklı bir tür sıfır GW-invaryant varsa (M,w) simplektik manifolda uniregledir denir [4].

Duggal ve Bejancu 1996 da yayınladıkları kitapta bir semi-Riemannian manifoldda lightlike (null) alt uzayın varlığını gösterdiler [8,9,10] ve alt manifoldların geometrisi için ihtiyaç duyulan önemli bir boşluğu doldurdular. Bu kitabin yayınlanmasından sonra hedef, lightlike geometrideki yeni geometrik sonuçların ispatı ve lightlike geometrinin fizikteki uygulamaları oldu. Böylece geometrinin önemli bir boşluğu dolduruldu ve yeni bir çalışma alanı ortaya çıktı.

1942 yılında Moskova Üniversitesinde Lev Pontjagin, Charles Ehresmann sayesinde bir hücre alt bölümünü kullanarak Grassmann manifoldlarının homolojisini çalışmaya başlamıştır. Bu onun yeni önemli bir karakteristik sınıf oluşturmasına olanak sağlamıştır.[11] 1946 yılında Shiing-Shen Chern kompleks vektör demetleri için bir sınıf tanımlamıştır. [12] Chern göstermiştir ki kohomoloji yapısına sahip olan kompleks Grassmann manifoldlarını anlamak, reel Grassmann manifoldlarını anlamaktan daha kolaydır[11]. Chern temel makalesinde Hermitian manifoldları için karakteristik sınıflarının bazı inşaalarını vermiştir. [11].

2. MATERYAL VE METOT

Tanım 1: R birimli ve değişmeli bir halka ve $R-\{0_R\}=R^*$, ikinci işlem $\cdot$ ye göre bir grup ise R ye bir cisim denir [13].

Tanım 2: R bir tamlık bölgesi olsun. $m1_R=0_R$ olacak şekilde bir $m>0$ tam sayısı varsa böyle m lerin en küçüğüne R nin karakteristiği denir. Eğer bu özellikte hiçbir $m>0$ bulunamıyorsa R nin karakteristiği sıfır denir [13].

,
Tanım 3: R ve S tamlık bölgeleri verildiğinde, R den S ye 1-1 bir homomorfizma bulunabiliyorsa R, S içine gömülebilir veya S, R nin bir genişlemesidir denir [13].

Tanım 4: Eğer K, bir L cisminin alt cismi ise , o zaman (L, K) sıralı ikilisi, bir cisim genişlemesidir. L/K olarak yazılabilir. K üzerinde vektör uzayı olarak L nin boyutu $[L:K]$ olarak yazılır. Bu boyutun sonlu olduğu durumda L/K genişlemesinin kendisine sonlu denir [14].

Tanım 5: M bir C^∞ manifold olsun. $p\in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere,

$$g_p: T_pM \times T_pM \longrightarrow R$$
$$(X_p, Y_p) \longrightarrow g_p(X_p, Y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-degenere $(0,2)$ tensörüne M üzerinde bir metrik tensör denir [15].

Tanım 6: M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir semi-Riemannian manifold denir [15].

Tanım 7: Bir M Semi-Riemannian manifoldu üzerinde tanımlı g metrik tensörünün indeksine semi-Riemannian manifoldun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0\leq\nu\leq boyM$ dir. Özel olarak, $\nu=0$ ise $\forall p\in M$ için g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemannian manifold olur. $\nu=1$ ve $n\geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir [15].

Tanım 8: V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerindeki simetrik bilineer form

$$\gamma: V\times V\to R$$

R-bilineer fonksiyonu olsun. V üzerinde tanımlı γ simetrik bilineer formu

(i) $\nu\neq 0$ iken $\gamma(\nu,\nu)>0$ ise γ pozitif tanımlıdır.

(ii) $\nu\neq 0$ iken $\gamma(\nu,\nu)<0$ ise γ negatif tanımlıdır.

(iii) $\forall\omega\in V$ iken $\gamma(\nu,\omega)=0$ şartı sadece $\nu=0$ için sağlanıyorsa γ ye non-degeneredir denir [15].

Tanım 9: M bir Semi-Riemannian manifold olsun. $X_p\in T_pM$ olmak üzere,

i) $g_p(X_p,X_p)>0$ veya $X_p=0$ ise X_p vektörüne spacelike,

ii) $g_p(X_p,X_p)<0$ ise X_p vektörüne timelike,

iii) $g_p(X_p,X_p)=0$, $X_p\neq 0$ ise X_p vektörüne lightlike (null) denir [15].

R^n n- boyutlu reel vektör uzayı olsun.

Tanım 10: Eğer bir $\{f_\tau(x), \tau\in T\}$ ailesi, $f_\tau(x)\in R[x]$ olmak üzere bulunabiliyorsa,

$$X=\{x\in R^n : f_\tau(x)=0, \forall\tau\in T\}\subset R^n$$

altkümesine R^n nin bir afin manifoldu denir [16].

Örnek 1: R de keyfi bir sonlu altküme bir afin manifolddur. Yani,

$$X=\{r_1, r_2, \dots, r_m\}\subset R$$

bir afin manifolddur. Çünkü,

$$X=\{x\in R: (x-r_1).(x-r_2)\dots(x-r_m)=0\}\subset R$$

yazılabilir [16].

Önerme 1: X, R de bir afin manifold olsun. Bu takdirde X=R veya $X=\emptyset$ ya da X, R nin sonlu bir altcümlesidir [16].

Örnek 2 : $n = 2$ durumunda iki değişkenli polinomların sıfır yerleri olarak,

$X = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = ax + by + c = 0\}$
kümesini alalım, burada $a, b, c \in R$ sabit sayılar olsun. Bu küme düzlemde bir doğrudur. Dolayısıyla keyfi doğru düzlemde bir afin manifolddur.

Önerme 2: Herhangi sayıda afin manifoldların arakesiti de bir afin manifolddur [16].

Önerme 3: X_1, X_2 afin manifoldlar ise $X_1 \cup X_2$ de bir afin manifolddur [16].

Sonuç 1: Sonlu sayıda afin manifoldun birleşimi de bir afin manifolddur.

Şimdi R^n deki afin manifoldlarla bir topoloji oluşturacağız. $\Im$ ile R^n deki tüm afin manifoldlar sistemini gösterelim. Yani,

$\Im = \{X : X \subset R^n \ bir\ Afin\ manifold\}$
olsun. Böylece

$$T1)\ R^n \in \Im$$
$$T2)\ \ \emptyset \in \Im$$
$$T3)\ \forall \tau \in T \text{ için } X_\tau \in \Im \text{ iken } \bigcap_{\tau \in T} X_\tau \in \Im$$
$$T4)\ X_1, \dots, X_m \in \Im \text{ için } \bigcup_{\tau=1}^{m} X_\tau \in \Im$$

dır. Dolayısıyla $\Im$ sistemi, R^n de kapalı kümelerle oluşturulmuş bir topolojidir. Bu topolojiye Zarisski topolojisi denir [16].

R^n deki sonlu sayıda noktadan oluşan keyfi bir altküme Zarisski topolojisine göre kapalıdır. Önerme 1 e göre n = 1 için R deki Zarisski topolojisine göre R nin kapalı altkümeleri ancak $R, \emptyset$ ve sonlu altkümelerdir. Buna göre R de $[0,1]$ aralığı öklid topolojisine göre kapalı olmasına karşın Zarisski topolojisine göre kapalı değildir [16].

Önerme 4: R de Zarisski topolojisi Housdorf topolojisi değildir [16].

Tanım 11: X bir topolojik uzay olsun. Eğer, $X_1, X_2 \subset X$ kapalı altkümeleri, $X_1 \neq X$ $X_2 \neq X$, iken $X_1 \cup X_2 = X$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına indirgenebilir denir. Aksi halde X topolojik uzayına indirgenemez denir. [16].

Örnek 3: Zarisski topolojisine göre R topolojik uzayı indirgenemezdir.

Önerme 5: M topolojik uzayı indirgenemezdir ancak ve ancak M deki keyfi iki boştan farklı açık kümelerin arakesiti boş değildir [16].

Önerme 6: R^n indirgenemezdir [17].

Önerme 7: U, R^n de boştan farklı keyfi bir açık küme ise $\overline{U} = R^n$ dir. Yani U, R^n de yoğundur [17].

Önerme 8: $B \subset R^n$ bir alt küme ve $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ öyleki $f(x) = 0, \forall x \in B$ olsun. Bu takdirde $f(x) = 0$, $\forall x \in \bar{B}$ dir [16].
Lemma 1:(R^n için Cebirsel Eşitsizliklerin Önemli Olmadığı Prensibi):

$p_i \in R[x_1, \dots, x_n]$, $i=1,\dots,k$ sıfırdan farklı polinomlar olsunlar.

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, \dots, k\}$$

olsun. Bir $F(x_1, \dots, x_n)$ polinomu için $F|_B = 0$ ($\forall x \in B$ için $F(x) = 0$) ise, $F|_{R^n} = 0$ dir [16].

Sonuç 2: $p_i \in R[x_1, \dots, x_n]$,, $i=1,\dots,k$ sıfırdan farklı polinomlar ve

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, \dots, k\}$$

olsun. $f.g \in R[x_1, \dots, x_n]$ öyle ki, $f|_B = g|_B$ olsun. Bu takdirde $f|_{R^n} = g|_{R^n}$ dir.

Tanım 12: Bir (C, ∂, ι)kobordizm *kategorisi* şu şartları sağlayan bir üçlüdür.

1) C bir sonlu toplamlı ve başlangıç nesnesi $\emptyset$ olan bir kategoridir.

2) $\partial : C \to C$ funktörü $\partial\partial M = \emptyset$ (her $M \in C$ için) ve $\partial\emptyset = \emptyset$ şartını sağlayan toplamsal bir funktördür.

3) $\iota : \partial \to id$ funktörü, id birim funktör olmak üzere toplamsal funktörlerin bir doğal transformasyonudur.

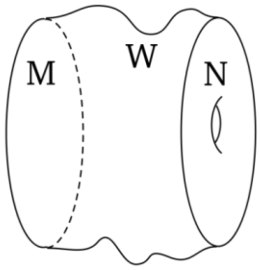
4) C nin her zaman bir küçük C_0 alt kategorisi vardır öyle ki C nin her elemanı, C_0 ın bir elemanına izomorfiktir.

Burada, kompakt diferansi-yellenebilir manifoldlar durumunda $\emptyset$, bir boş manifold olarak ve ι da M nin ∂M yi içermesi olarak düşünülür. D_0 alt kategorisinin varlığı, Whitney gömme teoreminin, (her manifoldun R^∞ un bir alt manifolduna izomorfik olması) biçimindeki ifadesiyle algılanır [18].

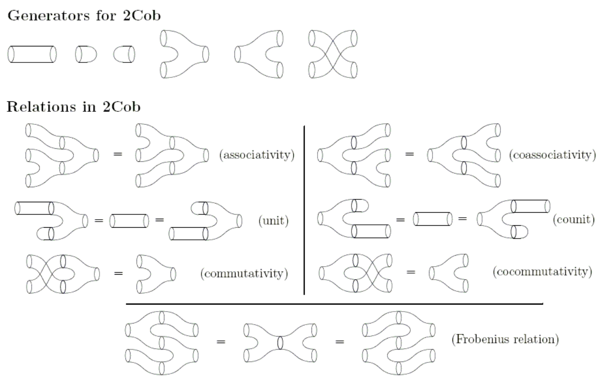
27 farklı durum için kobordizm problemlerinin bir listesini [19] de görebiliriz.

Kobordizm temel tanımı, şu denklik bağıntısıyla verilir.

Tanım 13: M ve N, n boyutlu iki kompakt manifoldlar olmak üzere, eğer n+1 boyutlu bir W kompakt manifoldu, sınırı M ve N nin ayrık birleşimi olarak yazılabilecek şekilde bulunabilirse M ile N ye kobordant, W ye de M ile N arasında bir kobordizm denir [20] (bkz. Şekil 1).



Şekil 1: Kobordizm (*W*; *M*, *N*).



Şekil 2: 2 boyutlu kobordizmler için üreteçler ve onlarla üretilen denk kobordizmler

Tanım 14: Bir Semi-Rieamannian manifoldda maximum lineer bağımsız lightlike (null) vektörlerinin sayısına k(U) indexi denir [21].

Önerme 8:

$$k(U) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} U-spacelike, & boyU = 1 \\ U-spacelike, & boyU > 1 \\ U-timelike, & boyU = 1 \end{cases}$$

[21].

Cebirsel geometride, Kodaira boyutu κ (X), projektif bir X yapısının kanonik modelinin boyutunu ölçer. Bir cisim üzerinde tanımlı n boyutlu bir X düzgün cebirsel yapısının kanonik demeti, X in kotanjant demetinin n. nci dış kuvveti olan bir d tamsayısı için, K_X in d. nci tensor kuvveti yine bir doğru demetidir.

$$K_X = \bigwedge^{n} \Omega_X^1$$

n-formlarının doğru demetidir. $d \geq 0$ için $H^0(X,K_X{}^d)$ global bölümlerin vektör uzayı, X düzgün projektif yapısının birasyonel invaryantı olmasından dolayı olağanüstü özelliğe sahiptir. Yani, bu vektör uzayı, daha düşük boyutlu alt kümelerin dışında X'e izomorfik olan herhangi bir düzgün projektif yapı için karşılık gelen uzay ile kanonik olarak tanımlanır. $d \geq 0$ için X in d.nci P_d çoğul genusu (plurigenus), $K_X{}^d$ nin global bölümlerinin vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır:

$$P_d = dim\, H^0(X,K_X{}^d)$$

Buna gore X in kodaira boyutu κ (X),

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty, & eğer \ \text{her } d > 0 \text{ için } P_d = 0 \ ise \\ {P_d}/{d^k} \ yı\ sınırlı\ yapan\ k\ ların\ minimumu, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

biçimninde tanımlanır. Böylece n boyutlu bir X projektif yapısının kodaira boyutu ya $-\infty$ dur ya da 0 ile n arasında bir tamsayı değeridir [25].

Cebirsel geometride K -cismi üzerinde tanımlı bir cebirsel yapıya “ruled” denir, eğer o, bir projektif doğru ile K üzerindeki bazı yapıların çarpımına birasyonel ise. Bir cebirsel yapı “uniruled” dir eğer, o bir rasyonel eğriler ailesi ile kaplanırsa. (Daha kesin bir ifadeyle, X uniruleddir eğer, vardır bir γ ve $\gamma \times P_1 \rightarrow X$ dominant rasyonel map öyle ki, Y ye projeksiyon boyunca etki etmez) [25].

Karakteristiği 0 (sıfır) olan bir cisim üzerindeki her uniruled yapı, -∞ kodaira boyutuna sahiptir. Tersi, en fazla 3 boyutta bilinen bir varsayımdır: karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki cebirsel yapının kodaira boyutu -∞ ise uniruled olmalıdır. Bununla ilgili şu ifade tüm boyutlarda bilinir: Boucksom, Dewailly, Pâun, ve Peternell gösterdi ki, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki bir düzgün projektif X yapısı, uniruleddir. ⇔ X in kanonik demeti pseudo-effektive değildir (Yani, reel sayılarda tensörlendirilmiş Neron-Severi grubundaki, efektif bölenlerle elde edilmiş kapalı konveks koni içinde değil) [22,25]. Çok özel bir durumda karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki P^n de derecesi d olan bir düzgün hiperyüzey, uniruleddir ⇔ $d \leq n$ ise, (Aslında P^n deki derecesi $d \leq n$ olan bir düzgün hiperyüzey Fano yapısındadır ve bundan dolayı, (unireglelikten daha güçlü olan) rasyonel bağlantılıdır) [25].

Sayılamayan cebirsel kapalı *K*- cismi üzerindeki X cebirsel yapısı uniruleddir. ⇔ En az bir rasyonel eğri vardır öyle ki X in her k noktasından geçer. Tersine, bir *K*- sonlu cisminin cebirsel kapanışı üzerinde, cebirsel yapılar vardır ve bunlar uniruled değildir. Fakat bunların her k noktasından geçen bir rasyonel eğri vardır (p -tek alınmak üzere herhangi bir F_p non-super singüler abelyen yüzeyinin Kummer yapısı bu özelliğe sahiptir) [23,25].

Uniruledlik bir geometrik özelliktir. Cisim genişlemeleri altında değişmezdir. Oysa ki ruled yapı böyle değildir. Pozitif karakteristikte uniruledlik çok farklı davranır. Özellikle genel tipte uniruled yüzeyler (hatta unirational) vardır. $p \geq 5$ olan p asal sayıları için $\bar{F}_p$ üzerindeki P^3 de $x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} + w^{p+1} = 0$ yüzeyi bunun bir örneğidir [24]. Böylece uniruledlik, pozitif karakteristikte kodira boyutunun $-\infty$ olmasını ima etmez [25].

Kısaca özetlersek;

1 boyutlu eğriler için,

Düzgün projektif eğriler, g = 0,1,… gibi herhangi bir doğal sayı olan genuslarına göre ayrık olarak sınıflandırılır. Buradaki ayrık olarak sınıflandırma şu anlamdadır: bir genus verildiğinde o genuslu eğrilerin indirgenemez bir moduli uzayı vardır.

Bir X eğrisinin Kodaira bayutu :

- K=-∞ : genus 0 (projective line P[1]): K_X efektif değil, her $d>0$ için $P_d=0$
- K=0 : genus 1(eliptik eğriler): K_X aşikar demet, her $d \geq 0$ için P_d=1
- K=1 : genus $g \geq 2$ (genel tipten eğri): K_X geniştir (ample), her $d \geq 2$ için $P_d=(2d\text{-}1)(g\text{-}1)$

2, 3 ya da daha büyük boyutların sınıflandırmaları için bakınız [25].

3. BULGULAR

3.1. R^3_1 Semi-Riemannian Uzayda 2-Cob Üreteç Kobordizm Örnekleri

Örnek 1:
R^3_1 Semi- Rieamann alt uzayında bir kobordizm örneği olarak en temel kobordizmlerden pantolon şeklindeki kobordizmi göz önüne alalım. l doğrusu olarak {z = 4y+12; x = 0} doğrusunu ve p parabolü olarak da {z =- 4y^2; x = 0} parabolünü göz önüne alalım. l nin z > 0 olan kısmını z- ekseni etrafında döndürelim. Bu tam dönmede büyük çemberler oluşacağından pantolonun üst tarafında boşluklar oluşacaktır. Burada dönmeyi dönme açısına göre ilk 180 ve son 180 derecelik açılarla ayırıp ve küresel koordinatlar ile istenilen yüzeyi sağlayacak dönme açılarını sağlamak gerekir. Benzer şekilde $z \leq 0$ kısmını da; z = z_0 a karşılık gelen l doğrusu üzerindeki noktayı A ile, z = z_0 a karşılık gelen p parabolü üzerindeki noktayı da B ile gösterirsek, A noktasını, A ile B nin orta noktası etrafında xy- düzlemine paralel kalacak şekilde döndürelim. Bu döndürme sonucunda bir çember elde edilecektir. Bu çember hem l doğrusuna ve hem de p parabolüne teğet bir çemberdir. Bu şekilde z değerlerine göre elde edilecek çemberler pantolon yüzeyinin uzun bacaklarını oluşturacaktır. Şimdi pantolonumuzu z>0 ve $z \leq 0$ göre ayıracak olursak 3 parça elde ederiz. Birinci parça z>0 a karşılık gelen dönel yüzey, ikinci ve üçüncü parçalar ise $z \leq 0$ a karşılık gelen biri diğerinin yansıması şeklinde iki pantolon bacağını oluşturan yüzeylerdir. Birinci dönel yüzeyi de parametrik ifadesini yazabilmek adına y≤0 ve y>0 olmak üzere tekrar ikiye ayırırsak, pantolon yüzeyini 4 parçaya ayırmış oluruz (Şekil 3).

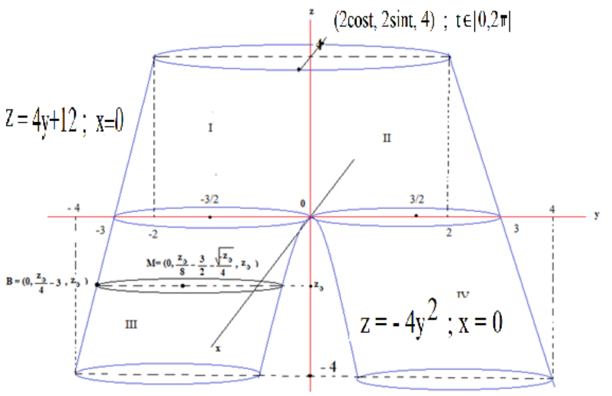
Şimdi bu yüzeyin parametrik denklemini verelim:

I yüzeyi:

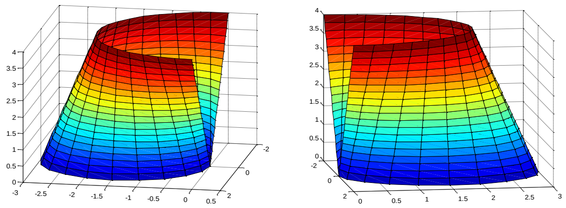
$a \in [0,1]$ ve $w \in [0,\pi]$ olmak üzere

$$X = 2cosw + a\left[\frac{3}{2}cos\left(-\frac{3}{2}\pi + 2(w-\pi)\right) - 2cosw\right]$$
$$Y = 2sinw + a\left[\frac{3}{2}sin\left(-\frac{3}{2}\pi + 2(w-\pi)\right) - 2sinw - \frac{3}{2}\right]$$
$$Z = 4(1-a)$$

biçiminde verilebilir. MATLAB ile bu yüzeyi çizersek Şekil 4-a'daki grafik elde edilir.



Şekil 3: {z = 4y+12; x = 0} doğrusu ve {z = -4y^2; x = 0} parabolü ile elde edilen kobordizm tasarım örneği



(a) (b)

Şekil 4: Pantolon tipi kobordizmin I ve II nolu parçası

II Yüzeyi:

$a \in [0,1]$ ve $w \in [\pi, 2\pi]$ olmak üzere,

$$X = 2cosw + a\left[\frac{3}{2}sin2w - 2cosw\right]$$
$$Y = 2sinw + a\left[-\frac{3}{2}cos2w - 2sinw + \frac{3}{2}\right]$$
$$Z = 4(1-a)$$

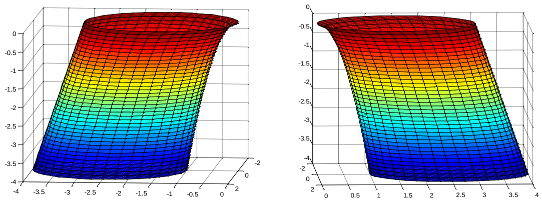
biçiminde verilebilir. MATLAB ile bu yüzeyi çizersek şekil 4-b deki gibi grafik elde ederiz.

III Yüzeyi:

$k \in [-4,0]$ ve $t \in [0,2\pi]$ olmak üzere,

$$X = \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}\right]cost$$
$$Y = \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}\right]sint + \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2}\right]$$
$$Z = k$$

biçiminde verilebilir. MATLAB ile bu yüzeyi çizersek şekil 5-a grafiği elde edilir.



(a) (b)

Şekil 5: Pantolon tipi kobordizmin III ve IV nolu parçası

IV Yüzeyi:

$k \in [-4,0]$ ve $t \in [0,2\pi]$ olmak üzere

$$X = \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}\right] cost$$

$$Y = \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}\right] sint - \frac{k}{8} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}$$

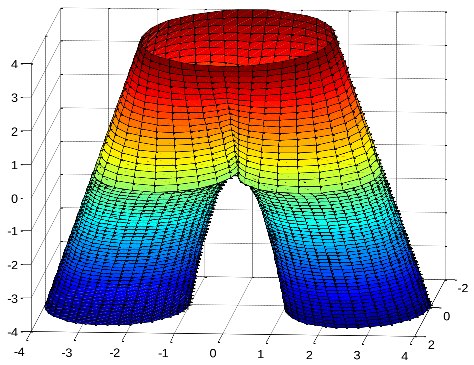
$$Z = k$$

biçiminde verilebilir. MATLAB ile bu yüzeyi çizersek şekil 5-b grafiği elde edilir.

Şimdi bu dört yüzeyi birleştirirsek;

Z > 0 ve Y < 0 durumunda I yüzeyi;
Z > 0 ve Y > 0 durumunda II yüzeyi;
Z < 0 ve Y < 0 durumunda III yüzeyi;
Z < 0 ve Y > 0 durumunda IV yüzeyi;

biçiminde birleştirdiğimizde parametrik yüzey parçalı olarak şekil 6 daki gibi elde edilecektir.

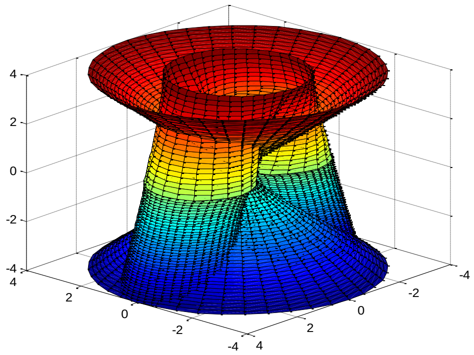


Şekil 6: Dört yüzeyin birleşimiyle elde edilen pantolon kobordizm örneği

Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar birer elips çiftleri oluşturacaklardır. Bu çiftler yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemini de ifade edersek, u∈R, v∈[0,2π] olmak üzere parametrik denklem,

X(u,v)=ucos(v); Y(u,v)=usin(v); Z(u,v)=u;

biçimindedir. O halde arakesit grafiği aşağıdaki gibi olur:



Şekil 7: Kobordizm üzerindeki lightlike (ışıksal) vektörler pantolon yüzeyi ile koninin arakesitini oluşturan elipsler

Bu elips çiftleri bir boyutlu manifold olduklarından boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu k(U)=1 olur. Bu da [21] e göre birasyonel kobordizm invaryantdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan complex cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Rieamannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invaryantı, kodaira boyutu -∞ dur. Eğer yukarıdaki pantolon şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da k(u) invaryantı k(u)=0, kodaira boyutu yine -∞ olurdu.

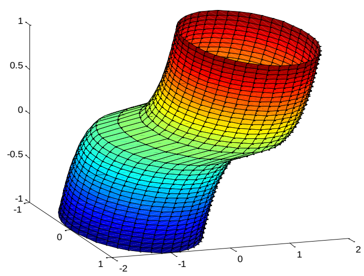
Örnek 2: Şimdi ikinci bir örnek olarak yine R^3_1 uzayında eğik boru şeklindeki bir kobordizm göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in R,\ v \in [0,2\pi]$ olmak üzere,

$$X(u,v) = sinv$$

$$Y(u,v) = \sqrt[3]{u} - cosv$$

$$Z(u,v) = u$$

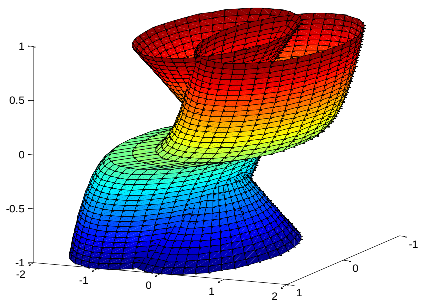
olarak alınabilir (Şekil 8).



Şekil 8: Eğik boru şeklindeki kobordizm örneği

Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar bir hiperbol çifti oluşturacaklardır. Bu çift yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemi yukarıdaki gibi, u∈R, v∈[0,2π] olmak üzere parametrik denklem,
X(u,v)=ucos(v); Y(u,v)=usin(v); Z(u,v)=u;

biçimindedir. O halde arakesit grafiği şekil 9 daki gibi olur:



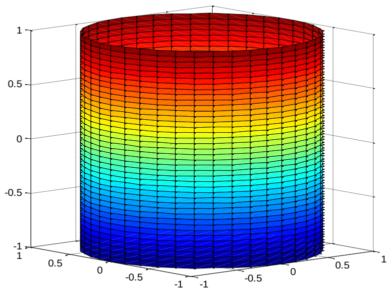
Şekil 9: Eğik boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

Bu hiperbol çifti bir boyutlu manifold olduğundan boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu k(U)=1 olur. Bu da yine [21] e göre birasyonel kobordizm invaryantıdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan complex cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Rieamannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invaryantı, kodaira boyutu -∞ dur. Eğer yukarıdaki eğik boru şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da yine k(u) invaryantı k(u)=0, kodaira boyutu yine -∞ olurdu.

Örnek 3: Şimdi üçüncü bir örnek olarak yine R^3_1 uzayında düz boru şeklindeki yarıçapı 1 br. olan bir silindir kobordizmini göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in R$ ve $v \in [0,2\pi]$ olmak üzere:

$$X(u,v) = cosv$$
$$Y(u,v) = sinv$$
$$Z(u,v) = u$$

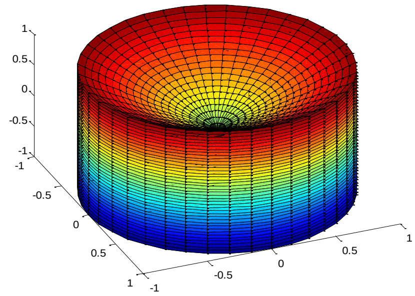
biçimindedir. Bu yüzeyi de çizdiğimizde şekil 10 daki grafik elde edilir.



Şekil 10: silindir boru şeklindeki kobordizm örneği

Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar bir çember çifti oluşturacaklardır. Bu çift yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemi yukarıdaki gibi, u∈R, v∈[0,2π] olmak üzere parametrik denklem,

X(u,v)=ucos(v); Y(u,v)=usin(v); Z(u,v)=u;
biçimindedir. O halde arakesit grafiği şekil 11 gibi olur. Bu çember çifti bir boyutlu manifold olduğundan boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu k(U)=1 olur. Bu da yine [21] e göre birasyonel kobordizm invaryantıdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan complex cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Rieamannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invaryantı , kodaira boyutu -∞ dur. Eğer yukarıdaki silindir şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da yine k(u) invaryantı k(u)=0, kodaira boyutu yine -∞ olurdu.



Şekil 11: Silindir boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

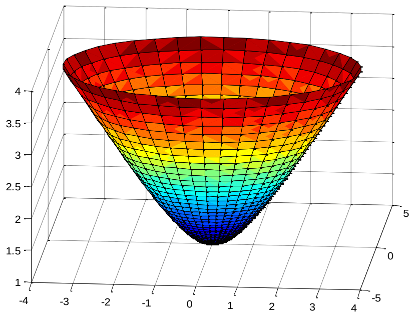
Örnek 4: Dördüncü bir örnek olarak yine R^3_1 uzayında çift kanatlı hiperboloid şeklindeki timelike bir kobordizmi göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $v \in R$, $\vartheta \in [0,2\pi]$ olmak üzere:

$$X(u,v) = sinhv.cos\vartheta$$
$$Y(u,v) = sinhv.sin\vartheta$$
$$Z(u,v) = coshv$$

olur. Kartezyen denklemi de,

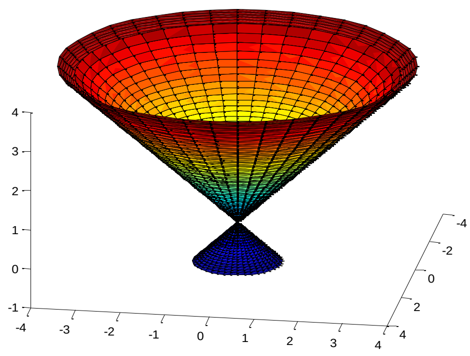
$Z^2 = X^2 + Y^2 + 1$

olur.



Şekil 12: çift kanatlı hiperboloidin üst yarısı şeklindeki kobordizm örneği

Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörler yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Eğer kobordizmi sınırlı olarak seçersek arakesit oluşmayacağından kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu k(U)=0 olur.



Şekil 13: Çift kanatlı hiperboloid kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

Teşekkür

Bu çalışma Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimince desteklenmiştir. Proje no: BAP-18-EMF-4902-02.

Yazarların Katkısı

Bu çalışma sorumlu yazarın danışmanlığında diğer yazarın yüksek lisans tez çalışmalarından alınmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Guillemin, V., Sternberg, S. Birational equivalence in the symplectic category. Invent. Math. 1989; 97: 485–522.

[2] McDuff, D., Salamon, D. Introduction to Symplectic Topology, 2nd edn New York: Oxford Math. Monogr. Oxford University Press;1998.

[3] Matsuki,K.:Lectures on factorization of birational maps. arXiv:math.AG/0002084

[4] Hu J., Li T-J., Ruan Y., Birational cobordism invariance of uniruled symplectic manifolds, Invent. math. 2008; 172: 231–275.

[5] Li, T.-J.,Existence of embedded symplectic surfaces. In: Geometry and Topology of Manifolds. Fields Inst. Commun.,47: 203–217. Am. Math. Soc., Providence, RI. 2005.

[6] Kollar J., Low degree polynomial equations: arithmetic, geometry, topology. European Congress of Mathematics, vol. I (Budapest, 1996). Prog. Math., 1998; 168: 255–288.

[7] Ruan Y.,Virtual neighborhoods and pseudoholomorphic curves. Turk. J. Math., 1999; 23: 161–231.

[8] Duggal K. L. and Bejancu, A., Lightlike submanifold of semi-Riemannian manifolds and its applications, The Netherlands: Kluwer Academic; 1996.

[9] Duggal K. L. and Şahin, B., Differential geometry of lightlike submanifolds, Birkhäuser: Verlag; 2010.

[10] Kupeli D. N., Singular Semi-Riemannian Geometry, Dordrecht:Kluwer Academic Publishers; 1996.

[11] Kocaayan H., Karakteristik Sınıfları, [Y.Lisans Tezi], İzmir: Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü; 2012.

[12] Chern,S.S., Charecteristic classes of Hermitian manifolds, Annals of Mathematics, 1946;47(1):85-121.

[13] Çallıalp, F., Soyut Cebir, İstanbul: Birsen Yayınevi; 2009.

[14] Pierce, D. [internet], Galois Teorisi, Matematik Bölümü,*MSGSÜ,* 2018.Available from: *http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Galois-Teorisi/galois-kurami-2018.pdf.*

[15] O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to relativity, San Diego-California: Akademic Press. Inc.; 1983.

[16] İncesu M., "Benzerlik Geometrisinde Noktaların Tam İnvaryantları Sistemi", [doktora tezi] , Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, 2008

[17] Sağıroğlu Y., Parametrik Eğrilerin Afin Diferen-siyel İnvaryantları, [doktora tezi], Trabzon: Karadeniz Teknik Üniv. Fen Bilimleri Ens., 2002.

[18] Hirsch M.W., Graduate Text in Mathematics: Differential Topology, New York: Springer; 1976.

[19] Stong R. E., Notes on cobordism theory, Princeton N.J.: Princeton University Press; 1968.

[20] Thom, R., Qoelques propi_et es globales des varieties differentiables, *Commentari Mathematici Helvetici*, 1954; 28: 17-86.

[21] Ören İ., O(3,1)-Ortogonal Grubu için Noktaların İnvaryantları, [doktora tezi], Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, 2007.

[22] Boucksom S., Demailly J.P., Paun M. and Peternell T., The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, J. Alg. Geometry 2013; 22 (2): 201-248.

[23] Bogomolov F., Tschinkel Y., Rational curves and points on *K*3 surfaces, Amer. J. Math., 2005;127 (4) : 825-835.

[24] Shioda T., An example of unirational surfaces in characteristic*p* . *Math. Ann.*, 1974; 211: 233–236.

[25] Wikipedia contributors. Ruled variety [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia; 2020 Apr 12, 13:29 UTC [cited 2020 Oct 9]. Available from: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ruled_variety&oldid=950515178.